

OBLICZANIE CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNEJ KONSTRUKCJI
PLYTOWO-SPRĘŻYNOWEJ ZA POMOCĄ METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW
SKOŃCZONYCH*)

JERZY STELMARCZYK (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Wzrost mocy jednostkowych i szybkobieżności maszyn spowodował konieczność dokładniejszej znajomości cech dynamicznych układów podpierających maszyny, traktowanych dotychczas jako idealnie sztywne.

Własności dynamiczne podparcia zawiera jego charakterystyka — macierz dynamiczna, której elementy — receptancje są to wielkości określające, dla widma częstości, stosunek przemieszczeń punktów podparcia wywołanych harmonicznymi siłami wymuszającymi do tych sił, przy założeniu liniowości układu [2].

Receptancje — podatności dynamiczne podparcia są funkcjami parametrów układu i częstości wymuszenia. Podatne podparcie maszyny można podzielić na konstrukcję podpierającą i fundament. Konstrukcję podpierającą stanowią elementy, poprzez które mocuje się maszynę na fundamencie. Mogą to być różne elementy: podkładki izolujące, np. gumowe, sprężyny, skomplikowane układy kratownic, ram lub płyty podparte sprężyscie.

Konstrukcja podpierająca stanowi często układ ciągły, masowy, anizotropowy, zawierający tłumienie. Można tu przytoczyć przykład mocowania silnika napędowego na statku, gdzie konstrukcję podpierającą stanowi płyta lub konstrukcja spawana z kształtowników i zespół elementów sprężystych. Podobne konstrukcje podpierające stosowane są też dla maszyn energetycznych.

Konstrukcja podpierająca izoluje drgania maszyny od podłoża i jednocześnie modyfikuje wartości częstości rezonansowych układu maszyna — podparcie. Określenie charakterystyki dynamicznej konstrukcji podpierającej pozwala na określenie stanu dynamicznego układu i stanowi jeden z głównych problemów dla konstruktora. Charakterystykę dynamiczną konstrukcji można uzyskać w wyniku obliczeń i badań doświadczalnych.

Określenie charakterystyki dynamicznej w wyniku eksperymentu musi być przeprowadzone na obiekcie rzeczywistym i pozwala stwierdzić w jaki sposób będzie się zachowywał już wykonany układ. W przypadku, gdy szkodliwe efekty dynamiczne są wyższe od dopuszczalnych, wykonanie poprawek na obiekcie rzeczywistym jest żmudne i kosztowne. Jednakże, prowadząc badania wielu konstrukcji podpierających i katalogując ich charakterystyki dynamiczne, konstruktor, w fazie projektowania, może dobrać kon-

*) Praca nagrodzona na konkursie na prace z mechaniki teoretycznej i stosowanej, zorganizowanym przez Łódzki Oddział PTMTS w 1975 r.

strukcję podpierającą, zapewniającą właściwą pracę układu. W dużej liczbie przypadków konstrukcji jest to jedyna możliwość, ponieważ matematyczny model obliczeniowy, z uwagi na wierność odtworzenia układu rzeczywistego, uniemożliwi obliczenie charakterystyki lub będzie modelem uproszczonym, wnoszącym znaczne błędy.

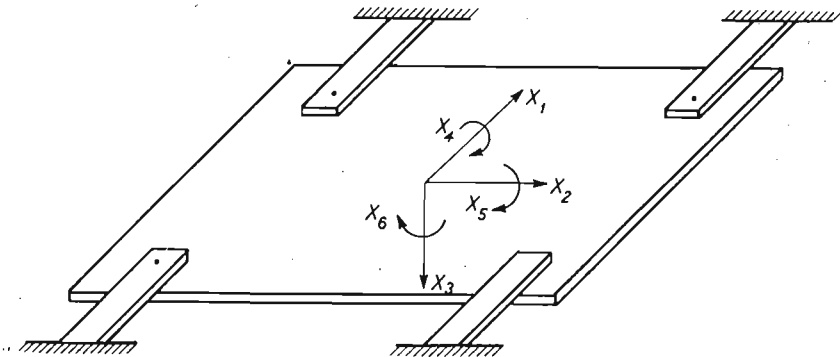
Klasyczne metody obliczeniowe z zadowalającą dokładnością pozwalają na określenie charakterystyk dynamicznych w stosunkowo prostych przypadkach konstrukcji, tzn. wtedy, gdy mamy do czynienia z konstrukcjami podpierającymi, dla których obliczeniowy dyskretny układ zastępczy dobrze odtwarza układ rzeczywisty.

Duże nadzieje w dziedzinie obliczeń charakterystyk dynamicznych złożonych konstrukcji prętowych i płytowych rokuje metoda elementów skończonych [1, 3, 4, 7, 9], w szczególności metoda sztywnych elementów skończonych [6], jednakże stosowanie ich do obliczeń związane jest z maszynami cyfrowymi o bardzo dużych pojemnościach pamięci i szybkościach obliczeń. Poza tym, stosowanie tych metod w zagadnieniach dynamicznych stanowi dla każdej konstrukcji osobne, skomplikowane zadanie.

W dalszej części opracowania wykonane będą obliczenia charakterystyki dynamicznej konstrukcji płytowo-sprężynowej przy użyciu metody sztywnych elementów skończonych oraz dokonana zostanie weryfikacja tych obliczeń na stanowisku modelowym.

2. Obliczenie charakterystyki dynamicznej konstrukcji

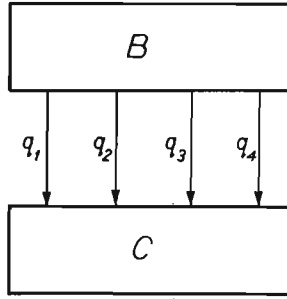
Analizowana konstrukcja (rys. 1) złożona jest z płyty podpartej na czterech płaskich sprężynach mocowanych do fundamentu. Poczynione zostały następujące założenia upraszczające:



Rys. 1

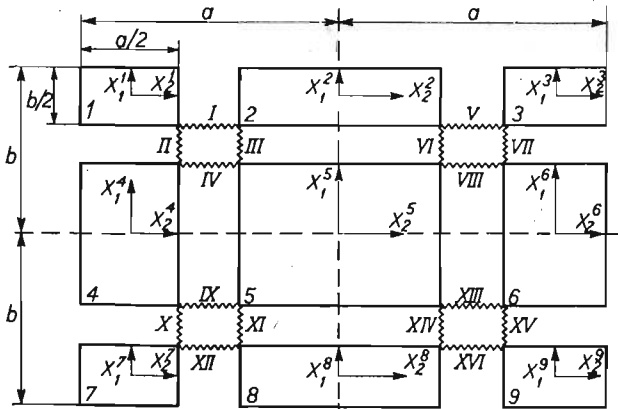
1. Brak tłumienia w układzie,
2. fundament, do którego są mocowane sprężyny, jest sztywny,
3. podparcie płyty przyjęto jako punktowe,
4. sprężyny pracują tylko na zginanie w płaszczyźnie x_1x_3 .

Układ ten można przedstawić schematycznie (rys. 2), jako złożony z dwóch podukładów — płyty B i sprężyn C , które są scharakteryzowane receptancjami $[\beta]$ i $[\gamma]$. Macierze te zostaną zapisane w dalszej części tak, aby wskaźniki przy receptancjach miały ozna-



Rys. 2

czenia wynikające z podziału płyty na sztywne elementy skończone. Dlatego też najpierw zostanie wyznaczona macierz dynamiczna płyty. Do obliczenia receptancji płyty metodą SES zostanie ona podzielona na dziewięć sztywnych elementów skończonych połączonych elementami sprężystymi. Schemat podziału i przyjęte układy osi pokazano na rys. 3.



Rys. 3

Sztywności elementów sprężystych, którymi połączone są SES, oblicza się ze wzorów wytrzymałościowych [5] dla płyty o wymiarach $a \times b$ (podział liniami przerywanymi). Początek układu współrzędnych przyjęto w środku masy każdego SES. Przesunięcia $q_1^s, q_2^s, \dots, q_s^s$ odpowiadają współrzędnym $x_1^s, x_2^s, \dots, x_s^s$. Równania ruchu wyprowadzono w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju i mają postać:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s^s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s^s} + \frac{\partial U}{\partial q_s^s} = Q_s^s.$$

Energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u \sum_{s=1}^6 m_s^r (\dot{q}_s^r)^2.$$

Natomiast energię potencjalną oblicza się z zależności

$$(3) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^u e^{r-p} k_s^{r-p,l} (\Delta V_s^{r-p,l})^2.$$

Użyte we wzorach oznaczenia wyrażają: r, p — numer SES ($r = 1, 2, \dots, n$, $p = 1, 2, \dots, n$), s — wskaźnik oznaczający ukierunkowanie oznaczonego parametru względem układu osi $s = 1, 2, 3, \dots, 6$, l — numer elementu sprężystego w połączeniu między r -tym i p -tym SES

Odształcenia elementów sprężystych w układzie osi związanych z tymi elementami są równe

$$(4) \quad \Delta V_s^{r-p,l} = V_s^{r-p,l} - V_s^{p-r,l}.$$

Dla uzależnienia energii potencjalnej od współrzędnych uogólnionych, przemieszczenia elementów sprężystych należy wyrazić w układzie osi związanych z SES:

$$(5) \quad \{V^{r-p,l}\}_{1-3} = [C^{r-p,l}]\{W^{r-p,l}\}_{1-3},$$

$$\{V^{r-p,l}\}_{4-6} = [C^{r-p,l}]\{W^{r-p,l}\}_{4-6}.$$

Występuje w nich macierz cosinusów kierunkowych:

$$(6) \quad [C^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{1,1}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{1,2}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{1,3}^{r-p,l} \\ \cos \varphi_{2,1}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{2,2}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{2,3}^{r-p,l} \\ \cos \varphi_{3,1}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{3,2}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{3,3}^{r-p,l} \end{bmatrix}.$$

Zależności określające przemieszczenia, wyrażone w układzie osi związanych z SES, w funkcji współrzędnych uogólnionych, wyglądają następująco:

$$(7) \quad \{W^{r-p,l}\}_{1-3} = \{q^r\}_{1-3} - [z^{r-p,l}]\{q^r\}_{4-6},$$

$$\{W^{r-p,l}\}_{4-6} = \{q^r\}_{4-6}$$

Macierz współrzędnych zamocowania elementu sprężystego do r -tego SES jest:

$$(8) \quad [z^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} 0 & z_3^{r-p,l} & -z_2^{r-p,l} \\ -z_3^{r-p,l} & 0 & z_1^{r-p,l} \\ z_2^{r-p,l} & -z_1^{r-p,l} & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając zależności (2)÷(8) w równaniach Lagrange'a (1), uzyskuje się 6n jednorodnych równań różniczkowych opisujących ruch układu. Równania te można zapisać

$$(9) \quad [M]\{\ddot{q}\} + [H]\{q\} = \{Q\}.$$

Macierz $[H]$ złożona z bloków $[H^{r,p}]$ jest macierzą symetryczną względem głównej przekątnej. Sposób wyznaczania bloków $[H^{r,p}]$ oraz usystematyzowane wzory podane są w pracy [6].

Rozpatrywany przypadek konstrukcji płytowo-sprężynowej przedstawia sobą układ przestrzenny o osiach równoległych. Uwzględniając, że dla takiego przypadku oraz dla takiej konstrukcji stosuje się elementy o trzech stopniach swobody — ruch wzdłuż osi x_3 ,

oraz obroty x_4 i x_5 , otrzymujemy wzory (9) w formie znacznie uproszczonej. I tak macierz cosinusów kierunkowych ma postać:

$$(10) \quad [C^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

a macierze mas i współrzędnych uogólnionych dla r -tego SES są:

$$(11) \quad [M^r] = \begin{bmatrix} m_3^r & 0 & 0 \\ 0 & m_4^r & 0 \\ 0 & 0 & m_5^r \end{bmatrix},$$

$$(12) \quad \{q^r\} = \begin{bmatrix} q_3^r \\ q_4^r \\ q_5^r \end{bmatrix}.$$

Bloki $[H^{r,p}]$ określone są zależnościami:

$$(13) \quad [H^{rr}] = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} \\ \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} k_4^{r-p,l} + z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{r-p,l} \\ \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} k_5^{r-p,l} + z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} \end{bmatrix},$$

$$(14) \quad [H^{rp}] = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{XVI} -k_3^{r-p,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} k_3^{r-p,l} z_2^{p-r,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} -k_3^{r-p,l} z_1^{p-r,l} \\ \sum_{l=1}^{XVI} z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} -k_4^{r-p,l} - z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{p-r,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_1^{p-r,l} \\ \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{p-r,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} -k_5^{r-p,l} - z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_1^{p-r,l} \end{bmatrix}.$$

Siły uogólnione określone są związkami:

$$(15) \quad \{Q^r\} = \begin{bmatrix} Q_3^r \\ Q_4^r \\ Q_5^r \end{bmatrix}.$$

Równania ruchu mają postać:

$$(16) \quad \begin{bmatrix} [M^1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [M^2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [M^9] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{q}^1\} \\ \{\ddot{q}^2\} \\ \vdots \\ \{\ddot{q}^9\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [H^{1,1}], [H^{1,2}] \dots [H^{1,9}] \\ [H^{2,1}], [H^{2,2}] \dots [H^{2,9}] \\ \dots \\ [H^{9,1}], [H^{9,2}] \dots [H^{9,9}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \\ \vdots \\ \{q^9\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{Q^1\} \\ \{Q^2\} \\ \vdots \\ \{Q^9\} \end{bmatrix}$$

lub

$$(17) \quad \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q}.$$

Ponieważ siły wymuszające są siłami harmonicznymi

$$(18) \quad Q = Qe^{i\omega t},$$

to rozwiązanie ma też postać harmoniczną

$$(19) \quad q = qe^{i\omega t}.$$

Uwzględniając (18) i (19) w (17) otrzymujemy

$$(20) \quad (\mathbf{H} - \mathbf{M}\omega^2) \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

lub

$$(21) \quad \mathbf{q} = (\mathbf{H} - \mathbf{M}\omega^2)^{-1} \cdot \mathbf{Q}.$$

Charakteryzująca płytę macierz receptancji \mathbf{B} jest równa

$$(22) \quad \mathbf{B} = (\mathbf{H} - \mathbf{M}\omega^2)^{-1}.$$

Do dalszych obliczeń korzystnie jest wybrać tylko te elementy macierzy, które mają znaczenie przy łączeniu podukładu płyty z innymi podukładami. Dlatego np. do połączenia z podukładem sprężyn \mathbf{C} wystarczająca jest następująca postać macierzy:

$$(23) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}; \beta_{1,3}; \beta_{1,7}; \beta_{1,9} \\ \beta_{3,1}; \beta_{3,3}; \beta_{3,7}; \beta_{3,9} \\ \beta_{7,1}; \beta_{7,3}; \beta_{7,7}; \beta_{7,9} \\ \beta_{9,1}; \beta_{9,3}; \beta_{9,7}; \beta_{9,9} \end{bmatrix},$$

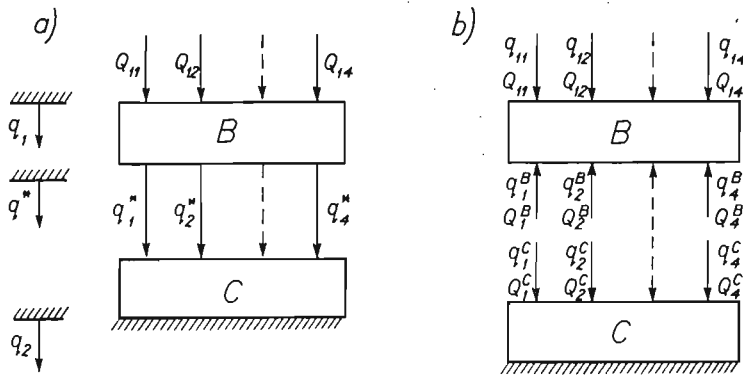
gdzie każdy ze składników jest stosunkiem przemieszczenia środka masy SES w kierunku x_3 do siły działającej w tym kierunku. Oczywiście, każda z receptancji obliczona jest z uwzględnieniem własności dynamicznych płyty i obciążenia na nią działającego i charakteryzuje ją dynamicznie. Ponieważ podukład sprężyn \mathbf{C} jest połączony z płytą w punktach będących środkami mas SES, macierz płyty w postaci (23) całkowicie wystarcza do uzyskania charakterystyki dynamicznej układu płyta-sprężyny i nie komplikuje dalszych obliczeń.

Należy tu dodać, że dla każdej częstości wymuszenia ω macierz płyty w postaci (23) uzyskiwana jest w wyniku obliczeń prowadzących do postaci (22), a następnie wybrania tylko interesujących nas wartości. Charakterystyka dynamiczna sprężyn, a więc macierz ich receptancji \mathbf{C} ma postać:

$$(24) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{99} \end{bmatrix}.$$

Wskaźniki przy receptancjach związane są z punktami mocowania sprężyn do płyty. Charakterystyka dynamiczna układu płyta-sprężyny określona zostanie w oparciu o warunki składania charakterystyk podukładów [2, 8]. Zgodnie z oznaczeniami na rys. 4 warunki ciągłości są:

$$(25) \quad \mathbf{q}^B = \mathbf{q}^C = \mathbf{q}^* = \mathbf{q}_1,$$



Rys. 4

natomiast warunki równowagi

$$(26) \quad Q^B + Q^C = Q^* = Q_1.$$

Wiedząc, że:

$$(27) \quad q^B = B \cdot Q^B,$$

$$(28) \quad q^C = C \cdot Q^C,$$

uwzględniając (26) i (28) w równaniu (25) i biorąc pod uwagę (27), otrzymujemy ostatecznie

$$(29) \quad q_1 = (B^{-1} + C^{-1})^{-1} \cdot Q_1.$$

W ten sposób została wyznaczona charakterystyka konstrukcji podpierającej płytowo-sprężynowej, określająca receptancje będące stosunkami przemieszczeń na poziomie 1 do sił wymuszających, wywołujących te przemieszczenia, działających na poziomie 1. Czyli, że

$$(30) \quad A_1 = (B^{-1} + C^{-1})^{-1}.$$

W podobny sposób można wyznaczyć pozostałe receptancje konstrukcji podpierającej. Obliczenia macierzy dynamicznej zostały zaprogramowane i wykonane na maszynie cyfrowej Odra 1204.

Płyta. Obliczenia wykonano dla płyty prostokątnej o wymiarach $400 \times 600 \times 3$ mm ($2a \times 2b \times h$) wykonanej ze stali ST5 ($E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m²; $G = 8,1 \times 10^{10}$ N/m²; $\nu = 0,3$).

Dane do obliczeń: 1. Sztywności elementów sprężystych: Elementy sprężyste I, IV, V, VIII, IX, XII, XIII, XVI

$$k_1 = \frac{Eha}{2b} = 209\,000\,000 \text{ N/m}$$

$$k_2 = k_3 = \frac{Gha}{2xb} = 67\,500\,000 \text{ N/m} \quad (x = 1,2)$$

$$k_4 = \frac{Gh^3a}{12b} = 121 \text{ Nm}$$

$$k_5 = \frac{Eh^3a}{24(1-\nu^2)b} = 173 \text{ Nm}.$$

Elementy sprężyste II, III, VI, VII, X, XI, XIV, XV

$$k_1 = k_3 = \frac{Ghb}{2\lambda a} = 152\,000\,000 \text{ N/m}$$

$$k_2 = \frac{Ehb}{2a} = 472\,000\,000 \text{ N/m}$$

$$k_4 = \frac{Eh^3b}{24(1-\nu^2)a} = 380 \text{ Nm}$$

$$k_5 = \frac{Gh^3b}{12a} = 274 \text{ Nm.}$$

Tablica 1

Numer SES	Masy uogólnione		
	m_3^r	$m_4^r \cdot 10^6$	$m_5^r \cdot 10^6$
	kg	Nms ²	Nms ²
1	2	3	4
1	0,36	300,27	675,27
2	0,72	600,54	5400,54
3	0,36	300,27	675,27
4	0,72	2400,54	1350,54
5	0,144	4801,08	10801,08
6	0,72	2400,54	1350,54
7	0,36	300,27	675,27
8	0,72	600,54	5400,54
9	0,36	300,27	675,27

2. Masy uogólnione podano w tablicy 1.

3. Współrzędne zamocowania elementów sprężystych do SES podano w tablicy 2.

Sprężyny. Płyta została podparta czterema płaskimi sprężynami wykonanymi z brązu krzemowego CuSi3Mn $E = 1,2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ i $\rho = 8800 \text{ kg/m}^3$ o wymiarach $40 \times 3 \times 80 \text{ mm}$. Traktując sprężyny jak belki według [2], obliczamy receptancję ze wzoru

$$(31) \quad \gamma = \frac{(\sin \lambda l + \sin h \lambda l)(\cos \lambda l - \cosh \lambda l) - (\cos \lambda l + \cosh \lambda l)(\sin \lambda l - \sin h \lambda l)}{2EI\lambda^3(1 + \cos \lambda l \cosh \lambda l)}$$

gdzie

$$(32) \quad \lambda l = \left(\frac{A\rho l^4 \omega^2}{EI} \right)^{1/4}$$

Oczywiście, wszystkie receptancje $\gamma_{11}, \gamma_{33}, \gamma_{77}, \gamma_{99}$ są sobie równe.

Tablica 2

Współrzędne zamocowania	Wartości współrzędnych	Współrzędne zamocowania	Wartości współrzędnych
$z_5^{r-p, I}$	m	$z_5^{r-p, I}$	m
$z_1^{1-2, I}; z_1^{1-4, II}; z_1^{4-5, IX}; z_1^{4-7, X}$ $z_1^{7-4, X}; z_1^{7-8, XII}; z_1^{4-1, II}$	0,075	$z_2^{1-2, I}; z_2^{2-1, I}; z_2^{1-4, II}; z_2^{2-5, III}$ $z_2^{2-3, V}; z_2^{3-2, V}; z_2^{2-5, VI}; z_2^{2-6, VII}$	-0,05
$z_1^{1-2, V}; z_1^{3-6, VII}; z_1^{6-5, VIII};$ $z_1^{6-5, XIII}; z_1^{6-9, XV}; z_1^{9-6, XV};$ $z_1^{9-8, XVI}$	-0,075	$z_2^{7-4, X}; z_2^{8-5, XIV}; z_2^{8-5, XI}$ $z_2^{9-6, XV}; z_2^{7-8, XII}; z_2^{8-7, XII}$ $z_2^{8-9, XVI}; z_2^{9-8, XVI}$	0,05
$z_1^{2-1, I}; z_1^{2-5, III}; z_1^{5-2, IV}; z_1^{5-4, IV}$ $z_1^{5-4, IX}; z_1^{5-8, XI}; z_1^{8-5, XI};$ $z_1^{8-7, XII}$	-0,15	$z_2^{4-1, II}; z_2^{5-2, III}; z_2^{5-2, VI}$ $z_2^{6-3, VII}; z_2^{4-3, IV}; z_2^{5-4, IV}$ $z_2^{5-6, VIII}; z_2^{6-5, VIII}$	0,1
$z_1^{2-3, V}; z_1^{2-5, VI}; z_1^{5-2, VI};$ $z_1^{5-6, VIII}; z_1^{5-6, XIII}; z_1^{5-8, XIV}$ $z_1^{8-5, XIII}; z_1^{8-9, XVI}$	0,15	$z_2^{2-5, IX}; z_2^{5-4, IX}; z_2^{2-7, X}$ $z_2^{3-6, XIII}; z_2^{6-5, XIII}; z_2^{5-8, XIV}$ $z_2^{5-8, XI}; z_2^{6-9, XV}$	-0,1
$z_3^{r-p, I}$	0		

Korzystając z podanych wzorów zaprogramowano, dla przedstawionych danych, obliczenia receptancji na maszynie cyfrową. Weryfikację metody wyznaczania charakterystyki dynamicznej przeprowadzono dla wyznaczonych częstości rezonansowych układu płyta-sprężyna, uzyskanych jako rozwiązanie równania częstości. Równanie częstości układu otrzymuje się z warunku rezonansu układu tzn. równości

$$(33) \quad \frac{1}{\alpha_{ik}} = 0,$$

gdzie α_{ik} jest dowolnym elementem macierzy A_1 .

Warunek ten sprowadza się do poszukiwania miejsc zerowych wyznacznika macierzy

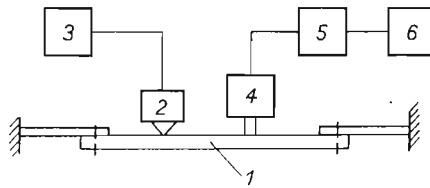
$$B^{-1} + C^{-1},$$

ponieważ w wyniku jej odwrócenia otrzymujemy macierz A_1 (30). W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano następujące wartości częstości rezonansowych:

$$\omega_{rez} = 185; 246; 389; 644 \text{ s}^{-1}.$$

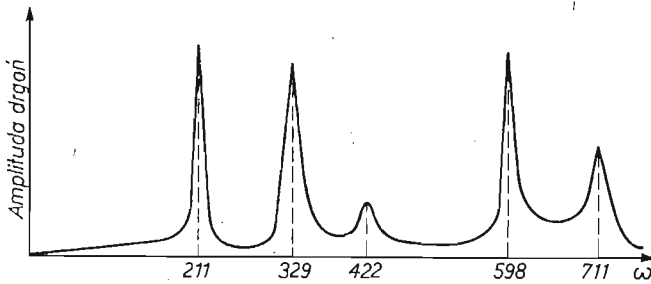
3. Doświadczalne sprawdzenie metody obliczeniowej

Badania doświadczalne, przeprowadzone dla sprawdzenia przedstawionej metody obliczeniowej, zawierały test rezonansowy konstrukcji płytowo-sprężynowej z rys. 1, zamocowanej sztywno do fundamentu, będącego konstrukcją spawaną z kształtowników. Schemat blokowy układu pomiarowego przedstawia rys. 5.



Rys. 5

Na rys. 5 oznaczono: 1 — konstrukcja płytowo-sprężynowa, 2 — piezoelektryczny czujnik przyspieszeń typ KD-12/070222-RFT-Dresden, 3 — miernik drgań SM-231-RFT-Dresden, 4 — elektrodynamiczny wzбудnik drgań PR-9270/01-Philips, 5 — generator akustyczny 12 × GO17 Tesla, 6 — częstotściomierz liczący PFL-4-Zopan.



Rys. 6

Na podstawie wykonanych pomiarów sporządzono wykres rezonansowy przedstawiony na rys. 6.

Wyniki obliczeń częstotliwości rezonansowych wraz z ich wartościami zmierzonymi zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Częstość obliczona ω	Częstość zmierzona ω^*	Błąd	
		$\frac{\omega^* - \omega}{\omega^*}$	100%
rad/s	rad/s		
185	211		12,3
246	329		25,2
389	422		7,8
563	598		5,8
644	711		9,4

4. Ocena wyników i wnioski

Zgodność wyników otrzymanych na drodze obliczeniowej i z pomiarów należy ocenić jako bardzo dobrą. Rozbieżności między wartościami ω i ω^* są wynikiem przede wszystkim założenia punktowego podparcia płyty i wynikającego z tego założenia sposobu wyznaczenia sztywności sprężyn. W rzeczywistości połączenie to znacznie zwiększa sztywność konstrukcji w stosunku do konstrukcji przyjętej do obliczeń.

Duży wpływ na dokładność wyników obliczeń ma liczba SES, na które zostanie podzielona płyta. Przy podziale płyty na SES decydujące znaczenie mają możliwości maszyny cyfrowej, którą można użyć do obliczeń, ponieważ wymiar macierzy receptancji płyty jest określony iloczynem: $m \times n = (\text{liczba SES} \times \text{liczba stopni swobody}) \times (\text{liczba SES} \times \text{liczba stopni swobody})$. W obliczanym przypadku macierz ta miała wymiar 27×27 .

W oparciu o przeprowadzone obliczenia i badania można stwierdzić, że zastosowana do obliczeń metoda SES rokuje duże nadzieje przy analitycznym wyznaczaniu charakterystyki dynamicznej pewnych rodzajów konstrukcji podpierających, co ma szczególnie istotne znaczenie w praktyce inżynierskiej. Istotnym momentem jest duża dokładność wyników uzyskanych dla analizowanej konstrukcji przy znacznych uproszczeniach modelu obliczeniowego.

Jakkolwiek wyznaczenie charakterystyki dynamicznej dla każdej konstrukcji stanowi tu oddzielne zagadnienie, zresztą trudne, to łatwość zaprogramowania i wykonania obliczeń na maszynie cyfrowej całkowicie uzasadnia stosowanie tej metody.

Literatura cytowana w tekście

1. I. A. ARGYRIS, A. S. L. CHAN, *Application of finite elements in space and time*, Ing. Archiv., **41**, 235 - 257 (1972).
2. R. E. D. BISHOP, D. C. JOHNSON, *The Mechanics of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge 1960.
3. I. W. CLOUGH, I. L. TOCHER, *Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending*, First Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson, AFB, 515 - 541 (1965).
4. L. R. HERRMANN, *Finite Element Bending Analysis for Plates*, J. Eng. Div., ASCE, EM5, 13 - 26 (1967).
5. M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, PWN, Warszawa 1958,
6. J. KRUSZEWSKI-MAJEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk., Pol. Gdańska, Nr 165, Mechanika z. XII (1971).
7. S. NEMAT-NASSER, K. N. LEE, *Finite — Element Formulations for Elastic Plates by General Variational Statement with Discontinuous Fields*, DCAMM Reports No. 39 (January 1973).
8. J. STELMARCZYK, *Analiza drgań maszyn wirnikowych metodą składania charakterystyk dynamicznych zespołów*, Praca doktorska, Łódź 1972.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛИТНО-ПРУЖИННОЙ КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Динамической характеристикой податливой конструкции является матрица коэффициентов динамической податливости, называемых рецептаниями, которые являются функциями частоты возбуждения и параметров конструкции. Современные конструкции отличаются податливостью,

сложной конфигурацией, сложным распределением массы и жесткости а также демпфированием. Поэтому динамические характеристики таких конструкций обычно определяются опытным путем.

В данной работе представлен метод расчета динамической характеристики плитно-пружинной конструкции при помощи жестких конечных элементов. Этот метод использован для определения рецептанций плиты. С использованием рецептанций получена матрица динамических податливостей конструкции. Вычисления проведены на ЭВМ и проверены экспериментально.

S u m m a r y

THE RIGID FINITE ELEMENT METHOD OF DETERMINING THE DYNAMIC CHARACTERISTIC OF A PLATE-SPRING STRUCTURE

Characteristics of a flexible structure is represented by a matrix of dynamic flexibility coefficients i.e. receptances, which are functions of the excitation frequency and the structure parameters. The present-day constructions are characterized by their high flexibility and intricate shapes, complex distribution of masses and stiffnesses, and by their damping properties. In general, it is proposed to use an experimental method to find dynamic characteristics of structures. The paper presents a rigid finite element method of determining the dynamic characteristics of plate-spring structures. The method is used to determine the matrix of receptances of the plate. The construction is dynamically characterized by means of receptances. The dynamic characteristics of the construction was calculated by a digital computer. The results of calculations were verified experimentally, and the results seem to be very promising.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1976 r.
