

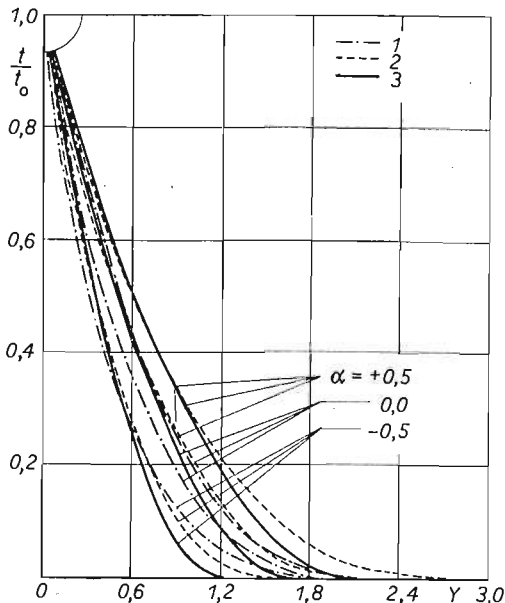
OKREŚLENIE NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W ŚCIANCE PŁASKIEJ PRZY
ZMIENNYM WSPÓLCZYNNIKU PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

KAZIMIERZ RUP, JAN TALER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Obecnie większość zagadnień przewodnictwa cieplnego analizuje się przy pomocy metod przybliżonych. Zastosowana w pracy metoda bilansu cieplnego [1], jest obok metod wariacyjnych [2, 3, 4, 5] jedną z najbardziej uniwersalnych analitycznych metod przybliżonych rozwiązywania, zarówno liniowych, jak i nieliniowych równań różniczkowych przewodzenia ciepła. Rozwiązanie problemu wymienionego w tytule przeprowadzono w dwóch etapach: najpierw określono pole temperatury w ścianie przy założeniu stałego współczynnika przewodnictwa cieplnego przy pomocy metody bilansu cieplnego, a następnie wykorzystując metodę linearyzacji optymalnej [6] uwzględniono zależność współczynnika przewodnictwa cieplnego od temperatury. Rozwiązania tego problemu można otrzymać stosując metodę bilansu cieplnego i wykorzystując transformację [1]

$$(1.1) \quad \vartheta(t) = \int_0^t c q dt,$$



Rys. 1. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej w I fazie wnikania ciepła: 1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie Goodmana, 3 — rozwiązanie otrzymane w pracy

gdzie c — ciepło właściwe, ρ — gęstość, t — temperatura, lub transformację Kirchhoffa

$$(1.2) \quad \vartheta(t) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t \lambda(t) dt,$$

gdzie λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Sposób określania nieustalonego pola temperatury zastosowany w niniejszej pracy jest nieco dokładniejszy od metody bilansu cieplnego z wykorzystaniem transformacji (1.1) [1], co przedstawiono na rys. 1. Ponadto sposób ten można zastosować w przypadku konwekcyjnej wymiany ciepła na powierzchni ciała, tj. dla warunków granicznych III rodzaju, przy współczynniku przewodnictwa cieplnego zależnym od temperatury. Wykorzystanie metody bilansu cieplnego w tym przypadku jest niemożliwe ze względu na nieodpowiedniość transformacji (1.1) i (1.2), co przedstawiono w pracy [7].

Oznaczenia

$a = \frac{\lambda}{c\rho}$	współczynnik wyrównania temperatury,
a_0, a_1, a_2	stałe,
b_0, b_1, b_2	stałe,
c	ciepło właściwe,
$Fo = \frac{\alpha\tau}{L^2}$	liczba Fouriera,
L	grubość płyty,
t	temperatura,
t_0	temperatura powierzchni,
t_p	temperatura początkowa,
u	temperatura powierzchni izolowanej,
x	współrzędna,
α	stała,
δ	głębokość wnikania ciepła,
λ	współczynnik przewodnictwa cieplnego,
ρ	gęstość
τ	czas.

2. Charakterystyka metody bilansu cieplnego i metody linearyzacji optymalnej

Metoda bilansu cieplnego wykorzystuje pojęcie głębokości wnikania ciepła $\delta(\tau)$ (głębokości penetracji), którą można określić jako największą odległość na jaką w danym czasie wnika ciepło tzn. w odległości $x \geq \delta(\tau)$ od powierzchni ciała temperaturę można w przybliżeniu przyjąć równą temperaturze początkowej i ciepło nie jest przekazywane na odległość większą niż $\delta(\tau)$. Pojęcie głębokości wnikania ciepła zostało pierwszy raz wprowadzone przez BIOTA [5], a także szeroko wykorzystywane w metodach wariacyjnych innych autorów np. VUJANOVICA [2] oraz LEBONA-LAMBERMONTA [4]. W metodzie bilansu cieplnego rozpatrywane są dwie fazy wnikania ciepła. W pierwszej fazie wnikania ciepła głębokość penetracji jest mniejsza od grubości ciała (płyty). W drugiej fazie «front» ciepła osiąga przeciwną ścianę ciała, której temperatura ulega wówczas zmianie.

Punktem wyjściowym prowadzącym do całki bilansu cieplnego jest równanie przewodnictwa cieplnego:

$$(2.1) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

gdzie τ — czas, $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — współczynnik wyrównania temperatury, x — współrzędna.

Następnie całkując równanie (2.1) w granicach od 0 do $\delta(\tau)$ otrzymuje się

$$(2.2) \quad c\rho \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial t}{\partial \tau} dx = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\delta(\tau)} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Uwzględniając reguły różniczkowania całki po parametrze (reguła Leibniza) przekształcona zostanie lewa strona równania (2.1), która przyjmuje postać

$$(2.3) \quad c\rho \left\{ \frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} t(x, \tau) dx - t[\delta(\tau), \tau] \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} \right\} = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\delta(\tau)} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Ponieważ w pierwszej fazie wnikania ciepła

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\delta(\tau)} = 0$$

(co wynika z definicji głębokości wnikania ciepła),
oraz

$$t[\delta(\tau), \tau] = t_p$$

(również z definicji głębokości wnikania ciepła),
to równanie bilansu ciepła ma postać

$$(2.4) \quad \frac{d}{d\tau} [\theta_I - c\rho t_p \delta(\tau)] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

gdzie

$$\theta_I = c\rho \int_0^{\delta(\tau)} t_1 dx, \quad \text{dla } 0 \leq \delta(t) \leq L,$$

t_p — temperatura początkowa ciała.

W drugiej fazie wnikania ciepła głębokość penetracji jest równa grubości ścianki tj. $\delta(\tau) = L$ i wówczas równanie bilansu po uwzględnieniu faktu, że $t(x, \tau)|_{x=L} = u(\tau)$ wynika z równania (2.3) i ma postać

$$(2.5) \quad \frac{d\theta_{II}}{d\tau} = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=L} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

gdzie

$$\theta_{II} = c\rho \int_0^L t dx,$$

$u(\tau)$ — temperatura przeciwległej ścianki.

Następnie scharakteryzowana zostanie metoda optymalizacji linearnej, zastosowana do równań przewodnictwa cieplnego przez VUJANOVICA [6].

W przypadku gdy współczynnik przewodnictwa cieplnego zmienia się z temperaturą pole temperatury opisuje równanie

$$(2.6) \quad c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right].$$

W metodzie linearyzacji optymalnej rozważa się równanie liniowe, które «optymalnie» linearyzuje równanie (2.6):

$$(2.7) \quad c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \psi \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

gdzie ψ jest parametrem nastawialnym, dobieranym w ten sposób, aby równanie (2.7) aproksymowało równanie (2.6) w sposób optymalny.

Wartość ψ_{opt} równa się

$$(2.8) \quad \psi_{opt} = \frac{B+C}{A},$$

gdzie

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right]^2 dx d\tau, \\ B &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{x_0}^{x_1} \lambda'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \left[\frac{\partial t}{\partial x} \right]^2 dx d\tau, \\ C &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(t) \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right]^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.10) \quad \lambda'(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}.$$

Przedziały całkowania zależą od rozważanego problemu. Dokładny opis metody można znaleźć w pracy [6].

3. Określenie pola temperatury

Przedmiotem niniejszej pracy jest określenie pola temperatury w ścianie płaskiej przy następujących warunkach brzegowych:

$$(3.1) \quad t(x, \tau)|_{x=0} = t_0, \quad \tau_0 > 0$$

$$(3.2) \quad \lambda \frac{t(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0,$$

gdzie λ — współczynnik przewodności cieplnej ścianki w temperaturze t , L — grubość ścianki oraz warunku początkowym

$$(3.3) \quad t_p = 0.$$

Współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału ścianki określony jest związkiem

$$(3.4) \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{t}{t_0} \right),$$

gdzie α — stała, t — temperatura w rozpatrywanym punkcie ścianki.

Najpierw przy pomocy metody bilansu cieplnego określono pole temperatury przy założeniu $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$, a następnie wykorzystując metodę linearyzacji optymalnej uwzględniono zmienność współczynnika przewodności cieplnej od temperatury.

a) *Analiza pola temperatury przy $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$.* Pole temperatury aproksymowane zostanie wielomianem drugiego stopnia:

$$(3.5) \quad t_1(x, \tau) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Stałe a_0 , a_1 i a_2 wyznaczone zostaną z (3.1) oraz z warunków:

$$(3.6) \quad t_1(x, \tau)|_{x=\delta} = 0,$$

$$(3.7) \quad \lambda_0 \frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = 0.$$

Związki (3.6) i (3.7) wynikają z definicji głębokości wnikania ciepła.

Ostatecznie po wstawieniu a_0 , a_1 i a_2 do (3.5) otrzymuje się wyrażenie określające temperaturę

$$(3.8) \quad t_1(x, \tau) = t_0 \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq \delta,$$

$$(3.9) \quad t_1(x, \tau) = 0, \quad \delta \leq x \leq L.$$

Równanie różniczkowe dla określenia $\delta(\tau)$ otrzymuje się podstawiając (3.8) do (2.4)

$$(3.10) \quad \delta \frac{d\delta}{d\tau} = 6a.$$

Po scałkowaniu równania (3.10) przy warunku początkowym $\delta(\tau)|_{\tau=0} = 0$ otrzymuje się

$$(3.11) \quad \delta = 3,464 \sqrt{\tau a}.$$

W drugiej fazie wnikania ciepła pole temperatury również aproksymowane jest wielomianem II stopnia

$$(3.12) \quad t_{II}(x, \tau) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Stałe b_0 , b_1 i b_2 otrzymuje się z warunków (3.1) i (3.2) oraz z warunku

$$t(x, \tau)|_{x=L} = u(\tau).$$

Po wstawieniu wyznaczonych b_0 , b_1 i b_2 do (3.12) otrzymuje się

$$(3.13) \quad t_{II}(x, \tau) = (t_0 - u) \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 + u, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1.$$

Temperaturę $u(\tau)$ wyznacza się z równania różniczkowego otrzymanego przez podstawienie (3.13) do (2.5):

$$(3.14) \quad \frac{du}{d\tau} = -\frac{3a}{L^2} [u(\tau) - t_0],$$

z którego po scałkowaniu przy warunku początkowym $u(\tau)|_{\tau=\tau_1} = 0$ otrzymuje się następującą zależność na $u(\tau)$:

$$(3.15) \quad u(\tau) = t_0 [1 - e^{-3(\tau - \tau_1)}], \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1.$$

Czas τ_1 wyznacza się z związku (3.11) po podstawieniu $\delta = L$.

Liczba Fouriera odpowiadająca τ_1 wynosi $\text{Fo}_1 = \frac{1}{12}$.

b) *Analiza pola temperatury przy $\lambda = \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{t}{t_0}\right)$.* Podstawiając $t_1(x, \tau)$ do zależności (2.9) i całkując odpowiednio w granicach: $x_0 = 0$, $x_1 = \delta(\tau)$ i $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau|_{x=\delta}$, otrzymuje się

$$(3.16) \quad \begin{aligned} A &= \frac{4}{(12a)^{3/2}} \Phi(\tau), \\ B &= \frac{8\lambda_0\alpha}{3(12a)^{3/2}} \Phi(\tau), \\ C &= \left[\frac{4\lambda_0}{(12a)^{3/2}} + \frac{4\lambda_0\alpha}{3(12a)^{3/2}} \right] \Phi(\tau), \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{t_0^2}{\tau^{3/2}} d\tau.$$

Po podstawieniu zależności (3.16) do (2.8) mamy:

$$(3.17) \quad \psi_{\text{opt}} = \lambda_0(1 + \alpha).$$

Podstawiając ψ_{opt} zamiast λ_0 do zależności (3.11), zależność określająca pole temperatury w I fazie wnikania ciepła (3.8) ma postać

$$(3.18) \quad \begin{aligned} t_{\text{I}} &= t_0 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{12a(1+\alpha)\tau}} \right)^2, & 0 \leq x \leq \delta, \\ t_{\text{I}} &= 0, & \delta \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Przeprowadzając analogiczne rozważania dla drugiej fazy wnikania ciepła otrzymuje się następujące zależności:

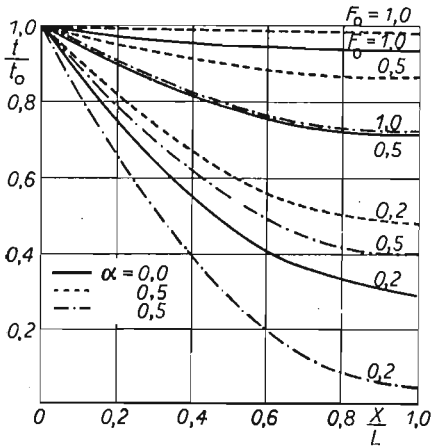
$$(3.19) \quad \psi_{\text{opt}} = \lambda_0(1 + \alpha)$$

oraz

$$(3.20) \quad t_{\text{II}}(x, \tau) = (t_0 - u) \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 + u, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1,$$

gdzie

$$(3.21) \quad u = t_0 [1 - e^{-3(1+\alpha)(\text{Fo} - \text{Fo}_1)}], \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1.$$



Rys. 2. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej w II fazie wnikania ciepła dla różnych liczb Fouriera

Na rys. 1 i 2 przedstawione zostały zmiany temperatury odpowiednio w I i II fazie wnikania ciepła przy współczynniku przewodnictwa cieplnego zależnym od temperatury.

Na rys. 1 porównano otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym i zależnością GOODMANA [1]

$$(3.22) \quad \frac{t}{t_0} = \left[1 - \frac{Y}{\sqrt{6(1+\alpha)}} \right]^3,$$

gdzie

$$Y = \frac{x}{2} \frac{1}{\sqrt{a\tau}}$$

Zależność (3.22) otrzymano wykorzystując transformację (1.1) i aproksymując pole temperatury wielomianem 3 stopnia

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(1 - \frac{x}{\delta(\tau)} \right)^3,$$

gdzie

$$\vartheta_0 = \int_0^{t_0} c\rho dt$$

i stosując dalej do przetransformowanego równania różniczkowego (2.1)

$$(3.24) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]$$

metodę bilansu cieplnego identyczną jak w przypadku równania (2.1).

4. Wnioski

Zastosowanie metody bilansu cieplnego i następnie metody linearyzacji optymalnej pozwala na łatwe, przybliżone rozwiązanie nieliniowego równania przewodnictwa cieplnego. Zaletą metody jest stosunkowo duża łatwość rozwiązywania nieliniowych zagadnień

przewodnictwa cieplnego w porównaniu z metodami wariacyjnymi. Dokładność aproksymacji rozwiązania ściślego wzrasta wraz ze wzrostem α a więc przeciwnie niż w rozwiązaniu T. R. Goodmana [1].

Literatura cytowana w tekście

1. T. R. GOODMAN, *Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer*, Vol. 1, 1964.
2. B. VUJANOVIĆ, *A Variational Principle for Non-Conservative Dynamical Systems*, ZAMM, 55 (1975).
3. B. KRAJEWSKI, *On a direct variational method for nonlinear heat transfer*, Inter. J. Heat and Mass Transfer, 4, 18 (1975).
4. G. LEBON, J. CASAS-VAZQUEZ, *Lagrangian formulation of unsteady non-linear heat transfer problems*, J. Engin. Math., 1, 8 (1974).
5. M. A. BIOT, *New methods in heat flow analysis with application to flight structures*, J. Aeronaut. Sci., 24 (1957).
6. B. VUJANOVIĆ, *Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem*, Inter. J. Heat and Mass Transfer, 6, 16 (1973).
7. E. M. KOOPMAN, R. N. SPARROW, *Heat transfer in reactor components having temperature — dependent thermal conductivity*, Nuclear Sci. and Engin., 3, 42 (1970).

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Применяя по-очередно интегральный метод теплового баланса и метод оптимальной линейризации, получено приближенное распределение температуры в плоской стенке в двух фазах проникания тепла, при коэффициенте теплопроводности, линейно зависящим от температуры. Полученные результаты удовлетворительно аппроксимируют точные решения.

Summary

DETERMINATION OF TRANSIENT TEMPERATURE FIELDS IN PLANE WALLS OF VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY

Applying successively the heat balance integral method and the optimal linearization method, the transient temperature distribution is determined in a plane wall with linear dependence of thermal conductivity on temperature, in two phases of heat penetration. The results obtained approximate fairly well the exact solutions.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ
I ENERGETYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1976 r.