

O STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ PRZY PULSUJĄCYCH SIŁACH
PODŁUŻNYCH I POPRZECZNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWEGO TŁUMIENIA
MATERIAŁOWEGO

FERDYNAND TWARDOSZ I JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

W pracy niniejszej zajmiemy się zagadnieniem stateczności dynamicznej cienkościennej powłoki w kształcie stożka ściętego, swobodnie podpartej na obu brzegach. Powłoka obciążona jest siłami podłużnymi $N(t)$ i wszechstronnym równomiernym ciśnieniem $p(t)$ zmieniającymi się okresowo w czasie. Uwzględniono przy tym wpływ nieliniowego tłumienia na rezonans parametryczny. Rozważania prowadzone niżej będą oparte na wynikach pracy [3] w której zagadnienie to zostało dość obszernie omówione.

1. Równanie różniczkowe ruchu

Problem stateczności dynamicznej powłoki stożkowej przy uwzględnieniu tłumienia wg hipotezy Dawidenkowa sprowadza się do analizy rozwiązań następującego równania różniczkowego [3]:

$$(1.1) \quad \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 f(t)_{mn} = \varepsilon [2\mu_{mn} \Omega_{mn}^2 \cos \Theta t f(t)_{mn} - \vec{J}(t)],$$

w którym

$$(1.2) \quad \vec{J}(f) = \frac{4(1+\nu_1)[(1+\nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h m_1^2 (e^{2(1+\nu_1)\mu} - 1)} \int_0^{\mu} \int_0^{2\pi} \varepsilon \vec{\Phi}_3(z, \varphi_1, t) e^{(2+\nu_1)z} \sin m_1 z \cos n_1 \varphi_1 d\varphi_1 dz$$

oznacza funkcję tłumienia, a parametr ε może przybierać dostatecznie małe dodatnie wartości.

W równaniu (1.1) przyjęto następujące oznaczenia:

$$(1.3) \quad \Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{p_0}{p_{krmn}} \right) \text{ — częstota drgań swobodnych powłoki obciążonej stałymi siłami podłużnymi } N_0 < N_{krmn} \text{ i równomiernym stałym ciśnieniem zewnętrznym } p_0 < p_{krmn},$$

$$(1.4) \quad 2\mu_{mn} = \frac{P_t}{p_{krmn} - p_0} \text{ — współczynnik pulsacji,}$$

$$(1.5) \quad \varkappa = \frac{N(t)}{p(t)} = \frac{N_0}{p_0} \text{ — stosunek obciążeń zewnętrznych,}$$

$$(1.6) \quad \left. \begin{aligned} N(t) &= N_0 + N_t \cos \Theta t \\ \rho(t) &= p_0 + p_t \cos \Theta t \end{aligned} \right\} \text{okresowo zmienne obciążenie zewnętrzne,}$$

$$(1.7) \quad \omega_{mn}^2 = \frac{D(1 - e^{2(\nu_1 - 1)\mu})[m_1^4 + 4(\nu_1 - 1)^2 m_1^2 - m_1^2 K_1 + (1 - \nu_1)(K_2 + K_3)(1 + \nu_1)[(1 + \nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \varrho h(1 - \nu_1)[(1 - \nu_1)^2 + m_1^2](e^{2(1 + \nu_1)\mu} - 1)} + \\ + \frac{E \text{ctg}^2 \gamma (1 + \nu_1)[(1 + \nu_1)^2 + m_1^2](e^{2\nu_1 \mu} - 1)[B_1(m_1 \nu_1^2 + m_1^3) + B_2(m_1^2 + \nu_1 m_1^2 + \nu_1^3 + \nu_1^2)]}{s_1^2 \varrho m_1 \nu_1 (\nu_1^2 + m_1^2)(e^{2(1 + \nu_1)\mu} - 1)} - \\ - \frac{4E \text{ctg}^2 \gamma (1 + \nu_1)[(1 + \nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^2 \varrho m_1 (e^{2(1 + \nu_1)\mu} - 1)} \left[- \frac{(n_1 \Phi_1 + \Phi_2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_2 - n_1 \Phi_1}{(\nu_1 - n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_1 (n_1 + 2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 + 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_1 (n_1 - 2)}{(\nu_1 - n_1 + 1)^2 + m_1^2} \right] - \text{częstość drgań własnych}$$

powłoki nieobciążonej siłami zewnętrznymi,

$$(1.8) \quad p_{krmn} = \frac{h(1 - 4\nu_1^2)[(1 + 2\nu_1)^2 + 4m_1^2][(1 - 2\nu_1)^2 + 4m_1^2]}{4s_1 \text{tg} \gamma (e^{2\nu_1 + 1}\mu - 1)(m_1^2 + 2n_1^2 - 3\nu_1 - 3\nu_1^2 - 0,5)(1 - 2\nu_1)[(1 - 2\nu_1)^2 + 4m_1^2] + \dots} \times \\ \times \left\{ \frac{D(1 - e^{2(\nu_1 - 1)\mu})[m_1^4 + 4(\nu_1 - 1)^2 m_1^2 - m_1^2 K_1 + (1 - \nu_1)K_2 + K_3]}{s_1^2 h(1 - \nu_1)[m_1^2 + (1 - \nu_1)^2]} + \right. \\ \left. + \frac{E \text{ctg}^2 \gamma (e^{2\nu_1 \mu} - 1)[B_1(m_1^2 \nu_1^2 + m_1^3) + B_2(m_1^2 + \nu_1 m_1^2 + \nu_1^3 + \nu_1^2)]}{m_1 \nu_1 (m_1^2 + \nu_1^2)} - \right. \\ \left. - \frac{4E \text{ctg}^2 \gamma}{m_1} \left[- \frac{(\Phi_1 n_1 + \Phi_2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_2 - n_1 \Phi_1}{(\nu_1 - n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_1 (n_1 + 2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 + 1)^2 + m_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Phi_1 (n_1 - 2)}{(\nu_1 - n_1 + 1)^2 + m_1^2} \right] \right\} - \text{obciążenie krytyczne przy równoczesnym działaniu}$$

sił podłużnych i wszechstronnego obciążenia zewnętrznego,

przy czym

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= 0,25 \{2m_1(1 + \nu_1)B_1 + [(1 + \nu_1)^2 - m_1^2 - n_1^2]B_2\}, \\ \Phi_2 &= 0,5 \{2m_1(1 - 2\nu_1)B_1 + [(1 + 4\nu_1 - \nu_1^2) - n_1^2 + m_1^2]B_2\}, \\ B_1 &= \frac{(m_1^2 + \nu_1 - \nu_1^2)\alpha_{mn} - 4\nu_1(1 - 2\nu_1)m_1^2 \beta_{mn}}{\alpha_{mn}^2 + 16m_1^2 \nu_1^2 \beta_{mn}^2}, \\ B_2 &= \frac{m_1 [(1 - 2\nu_1)\alpha_{mn} + 4\nu_1(m_1^2 + \nu_1 - \nu_1^2)\beta_{mn}]}{\alpha_{mn}^2 + 16m_1^2 \nu_1^2 \beta_{mn}^2}, \\ \alpha_{mn} &= (m_1^2 + n_1^2)^2 - 2(1 + \nu_1^2)n_1^2 + 2(1 - 3\nu_1^2)m_1^2 + (\nu_1^2 - 1)^2, \\ \beta_{mn} &= m_1^2 + n_1^2 + 1 - \nu_1^2, \\ \nu_1 &= \frac{1 - \nu}{2}, \quad n_1 = \frac{n}{\sin \gamma}, \quad m_1 = \frac{\pi m}{4}, \quad u = \ln \frac{s_2}{s_1}, \end{aligned}$$

n — liczba fal po obwodzie,

m — liczba półfal w kierunku tworzącej.

Ponieważ siły tłumienia nie są wielkie w stosunku do sił sprężystych, a amplituda harmonicznego wymuszenia jest mała (zagadnienie geometrycznie liniowe), w związku z tym możemy rozważaną powłokę traktować jako słabonieliniowy układ niezachowawczy i dla wyznaczenia drgań zastosować metodę asymptotycznych rozwinięć względem potęg małego parametru [1], [2].

2. Określenie głównego obszaru rezonansowego

Rozpatrzmy drgania w otoczeniu podstawowego rezonansu, który w przypadku parametrycznego pobudzenia zachodzi dla częstości Θ zawartych w pewnym otoczeniu wartości

$$\Theta = 2\omega_0,$$

Θ — częstość okresowego wymuszenia, ω_0 — częstość drgań własnych.

Zajmiemy się wyznaczeniem podstawowego obszaru rezonansowego. Granice tego obszaru w pierwszym przybliżeniu określono z warunku [3]:

$$(2.1) \quad 1 + \frac{\varepsilon}{\pi\Omega^2 a} \int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \cos \psi d\psi - \\ - \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{\pi^2 a^2 \Omega^4} \left[\int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \sin \psi d\psi \right]^2} < \left(\frac{\Theta}{2\Omega} \right)^2 < 1 + \\ + \frac{\varepsilon}{\pi\Omega^2 a} \int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \cos \psi d\psi + \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{\pi^2 a^2 \Omega^4} \left[\int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \sin \psi d\psi \right]^2}.$$

Dla konkretnego określenia obszaru rezonansowego należy obliczyć funkcję tłumienia $\bar{J}(a \cos \psi)$. W tym celu musimy przyjąć wartości współczynników i, l (wzór 3.4 w [3]). Wielkość te zależą od rodzaju materiału z którego wykonana jest powłoka. Na przykład dla stali $i = l = 3$. Wstawiając te wartości do (1.2) otrzymamy po scałkowaniu

$$(2.2) \quad \bar{J}(a \cos \psi) = \frac{4(1+\nu_1)[(1+\nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h m_1^2 (e^{2(1+\nu_1)\mu} - 1)} \left\{ -\frac{3}{16} \left[\mp \frac{Ah^3}{s_1^4} \left(\frac{(1-\nu^2)^2}{E^2 h^2} D_1 - \frac{3h^2}{20} D_2 \right) \right] - \right. \\ - \frac{3}{4} \left[\mp \frac{Ah^3 n}{s_1^4} \left(-2 \left(\frac{1-\nu^2}{Eh} \right)^2 D_3 + \frac{h^3}{16} D_4 \right) \right] + \frac{3}{4} \left[\mp \frac{\text{ctg} \gamma h}{s_1^3} A \times \right. \\ \times \left. \left(\left(\frac{1-\nu^2}{Eh} \right)^3 D_5 + \frac{(1-\nu^2)h^2}{4E} D_6 \right) \right] - \frac{3}{4} \left[\mp \frac{n_1^4 h^3}{s_1^4} B \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2+2\nu}{Eh} \right)^2 D_7 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{5} h^8 D_8 \right) \right] \left. \right\} a^3 = \bar{J}(\psi) a^3,$$

gdzie

$$A = \frac{E\eta[(1 \pm \cos \psi)^3 - 2^2]}{3(1-\nu^2)^3}, \quad B = \frac{Ek[(1 \pm \cos \psi)^3 - 2^2]}{3(1+\nu)^3 \cdot 2^3}.$$

k, η oznaczają tutaj parametry pętli histerezy odpowiednio przy ścinaniu i rozciąganiu.

Współczynniki D_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) występujące w powyższej funkcji są zależne od stałych materiału, wymiarów powłoki i od liczb m i n . Ze względu na bardzo złożoną i rozbudowaną postać, współczynników tych nie podajemy.

Po podstawieniu wyrażenia (2.2) do (2.1) uzyskamy

$$(2.3) \quad 1 + \frac{a^2 \varepsilon}{\pi \Omega^2} \int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \cos \psi d\psi - \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{a^4}{\pi^2 \Omega^4} \left(\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \sin \psi d\psi \right)^2} < \left(\frac{\Theta}{2\Omega} \right)^2 < 1 + \\ + \frac{a^2 \varepsilon}{\pi \Omega^2} \int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \cos \psi d\psi + \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{a^4}{\pi^2 \Omega^4} \left(\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \sin \psi d\psi \right)^2}.$$

Na podstawie (2.3) można sporządzić wykres obszaru rezonansowego dla różnych amplitud a w trójwymiarowym układzie współrzędnych $\frac{\Theta}{2\Omega}$, μ , a .

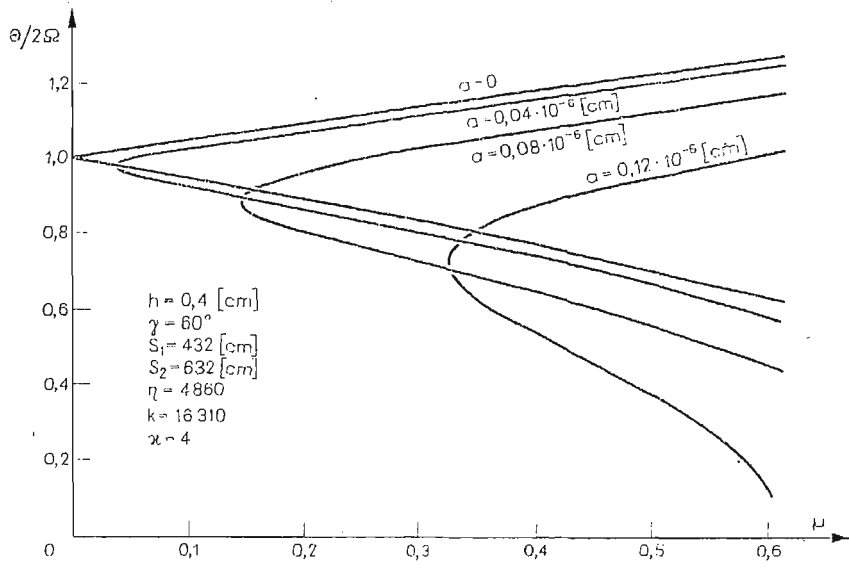
3. Przykład liczbowy i wnioski

Jak wynika z rozwiązania, analizę zagadnienia sprowadzono do wyznaczenia granic pierwszego obszaru niestateczności, tzn. obszaru odpowiadającemu najniższej częstotliwości drgań własnych i najmniejszej sile krytycznej powłoki. Uwzględnienie tłumienia materiałowego znacznie wpływa na zmniejszenie obszarów niestateczności wyższych rzędów, co wobec dużego nakładu pracy przy wyznaczaniu współczynników tłumienia w pełni uzasadnia przyjęte tutaj założenia. Dla zilustrowania otrzymanych wyników i wyciągnięcia wniosków przytoczymy szereg przykładów liczbowych. Zakładając konkretne wymiary powłoki, współczynnik \varkappa (1.5) oraz stałe materiałowe, obliczymy w pierw statyczną siłę krytyczną p_{krmn} (1.8) i częstotść drgań własnych układu nieobciążonego ω_{mn} (1.7). Przyjmując p_0 i p_l wyznaczmy współczynnik pulsacji μ_{mn} (1.4) i średnią częstotść drgań swobodnych Ω_{mn} (1.3) układu obciążonego stałymi siłami podłużnymi i poprzecznymi N_0 i p_0 .

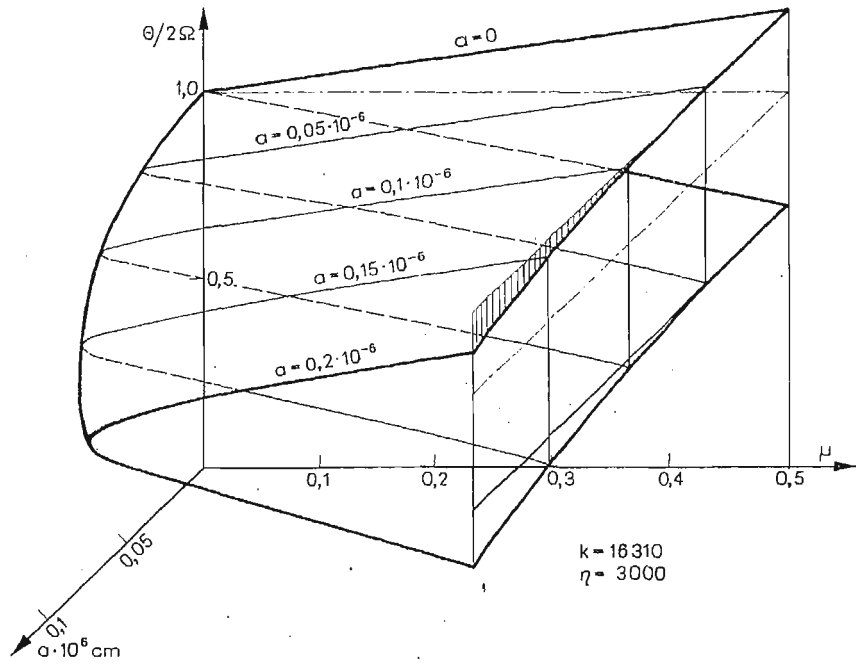
Z kolei obliczamy funkcje: $\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \sin \psi d\psi$, $\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \cos \psi d\psi$, wchodzące w skład zależności (2.3), wykorzystując wzór (2.2). Po scałkowaniu otrzymano wyrażenia algebraiczne, posiadające jednak bardzo złożoną i rozbudowaną postać, dlatego też przy ich obliczaniu posłużono się maszyną cyfrową. Do ostatecznego ustalenia granicy dolnej i górnej głównego obszaru rezonansowego wykorzystano zależność (2.3).

Celem podanych przykładów liczbowych jest zbadanie wpływu podstawowych parametrów geometrycznych i materiałowych powłoki na kształt i przebieg granic obszaru niestateczności. Zrealizowanie tego problemu umożliwiają przedstawione wykresy (rys. 1 do 7). Jako wspólne dla wszystkich analizowanych przypadków przyjęto następujące dane: $E = 2 \cdot 10^6$ (kG/cm²), $\nu = 0,3$, $\varrho = 0,000008$ (kGs²/cm⁴), $\varkappa = N_0/p_0 = 4$, natomiast pozostałe parametry zaznaczono na wykresach.

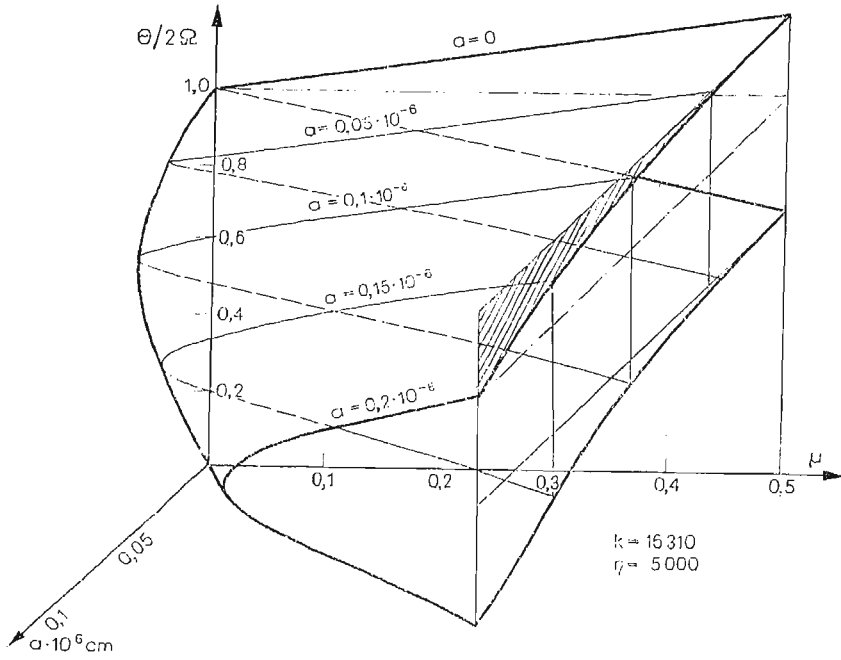
Na rys. 1 przedstawiono krzywe obrazujące obszary rezonansowe we współrzędnych $\frac{\Theta}{2\Omega}$, μ , dla różnych amplitud a . Tutaj oczywiście Θ oznacza częstotść drgań obciążenia



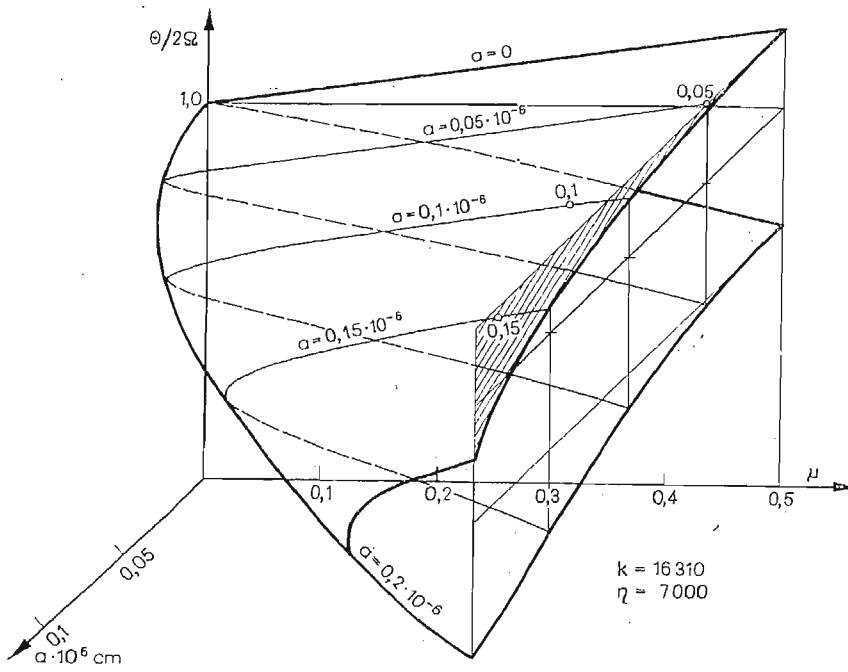
Rys. 1



Rys. 2



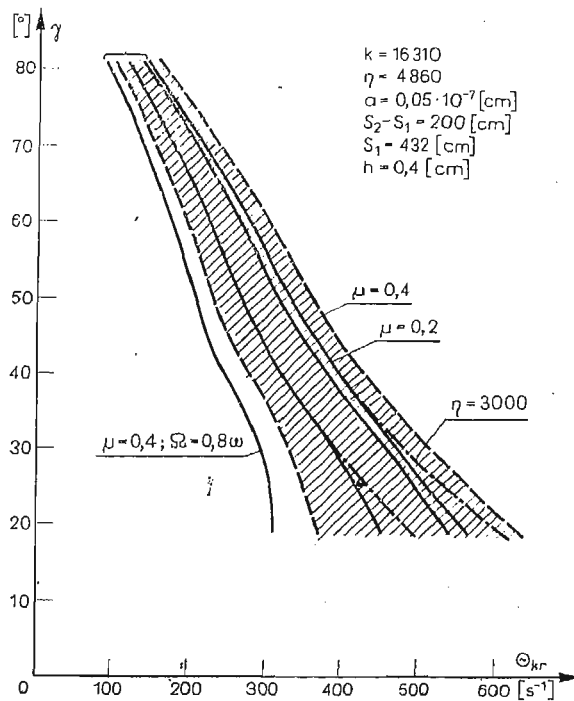
Rys. 3



Rys. 4

wymuszającego, Ω — częstość drgań powłoki pod obciążeniem. Dla analizowanej powłoki uzyskano siłę krytyczną pod obciążeniem statycznym $p_{kr} = 0,0384$ (kG/cm^2) (przy $m = 1$ i $n = 19$) oraz częstość drgań własnych $\omega = 142,2(\text{s}^{-1})$. Przyjęto $\Omega = 0,9 \omega$. Z wykresu widać, że w miarę wzrostu amplitudy obszar rezonansowy zmniejsza się, wraz z przesuwaniami się w kierunku większych wartości współczynnika pulsacji μ i mniejszych wartości $\frac{\Theta}{2\Omega}$. Po przekroczeniu pewnej amplitudy granicznej nie nastąpi dynamiczna utrata stateczności dla tej powłoki.

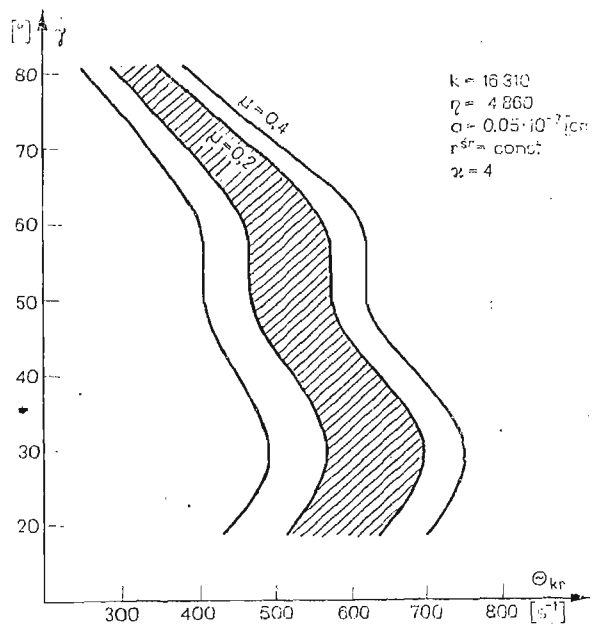
Na rys. 2, 3, 4 sporządzono wykresy w układzie trójwymiarowym $\frac{\Theta}{2\Omega}$, μ , a . Celem tych wykresów było zbadanie wpływu parametrów tłumienia pętli histerezy k i η , odpowiednio przy ścinaniu i rozciąganiu. Stwierdzono, że współczynnik k nie wpływa w sposób istotny na zmianę kształtu powierzchni ograniczającej obszar rezonansowy. Rys. 2, 3, 4



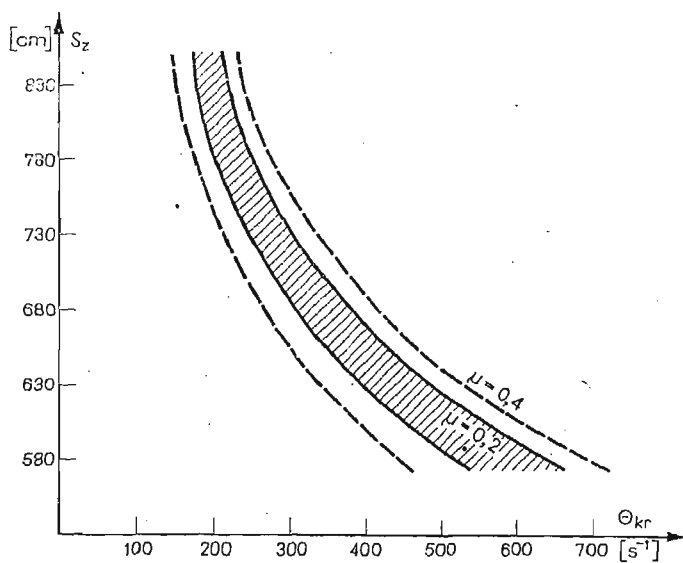
Rys. 5

przedstawiają kolejno powierzchnie obszarów rezonansowych przy wzrastającej wartości współczynnika η , przy innych parametrach stałych. Wzrost η wywołuje zmniejszenie się obszaru dynamicznej niestateczności poprzez jego „skrócenie” w kierunku malejących amplitud i przeciągnięcie ku dołowi, co wyraźnie widać na wykresach.

Kolejnym etapem analizy było zbadanie wpływu zmiany kąta wierzchołkowego 2γ na przebieg granic obszarów dynamicznej niestateczności. W tym celu sporządzono wykresy 5 i 6, gdzie na osi pionowej odniesiono kąt γ , a wzdłuż poziomej — średnią częstość



Rys. 6



Rys. 7

krytyczną siły wymuszającej Θ_{kr} , uzyskaną po przekształceniu zależności (2.3). Analizę przeprowadzono tutaj w dwóch wariantach. W pierwszym zmieniano kąt γ przy stałych pozostałych parametrach (rys. 5), a w drugim zachowano stały średni promień powłoki, $r_{sr} = 0,5(s_1 + s_2)\sin\gamma = const$ (rys. 6) i długość tworzącej $l = s_2 - s_1 = const$. Z wykre-

sów widać, że w miarę wzrostu kąta γ szerokość obszarów rezonansowych maleje. Przy zachowaniu stałego promienia średniego istnieje pewien optymalny kąt wierzchołkowy, przy którym częstość krytyczna jest największa, co wynika z rys. 6. Zwiększenie współczynnika pulsacji μ powoduje rozszerzenie obszaru niestateczności, tak jak i zwiększenie amplitudy siły wymuszającej p_t . W kolejności zbadano wpływ zmiany długości tworzącej (poprzez zmianę s_2) na granice obszarów niestateczności, przy innych parametrach stałych. Analizę tę podaje rys. 7, z którego wynika, że wraz ze wzrostem długości tworzącej nieliniowo maleje częstość krytyczna Θ_{kr} przy nieznacznym zmniejszeniu szerokości obszaru.

Przeprowadzona analiza numeryczna daje możliwości właściwej oceny doboru parametrów geometrycznych i materiałowych przy projektowaniu powłok stożkowych obciążonych dynamicznie wszechstronnym ciśnieniem równomiernym i siłą podłużną. Dokonując porównania z analizą stateczności dynamicznej powłoki stożkowej przy analogicznych założeniach, lecz bez uwzględnienia tłumienia można zauważyć, że tłumienie wpływa wyraźnie na zmniejszenie się obszarów dynamicznej niestateczności np. przy wzroście kąta wierzchołkowego (rys. 5), czyli odwrotnie niż to miało miejsce bez tłumienia (por. [4]). Nasuwa się tutaj również uwaga, że w przypadku uwzględnienia tłumienia materiałowego rezonans zachodzi dla małych wartości amplitud. Przy większych wartościach amplitud tłumienie materiałowe nie odgrywa zasadniczej roli.

Literatura cytowana w tekście

1. А. А. Березовский, А. Й. Митропольский, *Асимптотические методы в теории параметрических колебаний эластичных гибких пластин*, Избранные проблемы прикладной механики, Изд. АН СССР, Москва, 1974.
2. М. М. Боголюбов, А. Й. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Изд. 3, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1963.
3. F. TWARDOSZ, *Zagadnienie stateczności powłoki stożkowej. Wyprowadzenie podstawowych równań*, Rozprawy Inżynierskie, oddana do druku.
4. F. TWARDOSZ, J. ZIELNICA, *Analiza stateczności dynamicznej powłoki stożkowej obciążonej siłami podłużnymi i wszechstronnym ciśnieniem*, Archiwum Budowy Maszyn, w druku.

Резюме

ОБ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛАХ С УЧТЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

В работе представлено анализ динамической устойчивости тонкостенной оболочки в виде усеченного конуса, свободно опертого на краях. Оболочка нагружена продольной силой $N(t)$ и всесторонним давлением $p(t)$ изменяющимся периодически во времени. На основе гипотезы Давиденкова учтено влияние нелинейного демпфирования на параметрический резонанс. Определены резонансные области и исследовано влияние основных физических и геометрических параметров на динамическую неустойчивость.

S u m m a r y

DYNAMICAL STABILITY OF A CONICAL SHELL LOADED BY TRANSVERSAL AND LONGITUDINAL FORCES WITH THE NONLINEAR MATERIAL'S DAMPING

The paper deals with the dynamical stability analysis of a thin-walled truncated conical shell, free supported at the edges. The shell is loaded by the longitudinal forces $N(t)$, and the external uniformly distributed hydrostatic pressure $p(t)$, changing periodically with time. Supporting on the Davidenkov's hypothesis the influence of the material damping to the parametric resonance was taken into account. The main resonance areas were derivated, and the influence of the basic physical and geometrical parameters to the dynamical instability was investigated.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1977 r.
