

## OPTIMALIZACJA POŁOŻENIA PODPÓR BELKI SZTYWNO-PLASTYCZNEJ OBCIĄŻONEJ IMPULSEM PRĘDKOŚCI

JAAN LELLEP (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Optymalizacji położenia podpory dodatkowej dla belek obciążonych statycznie poświęcone są prace (1), (2). W (1) rozważane są belki sprężyste i plastyczne, natomiast w (2) belki sztywno-plastyczne.

W niniejszej pracy będziemy rozważać układ podpór dodatkowych dla belki sztywno-plastycznej obciążonej dynamicznie (impulsem prędkości początkowej). Przedmiotem pracy będzie optymalizacja położenia podpór pośrednich z uwagi na minimum największych przemieszczeń końcowych. Rozważane jest również zagadnienie dualne: znaleźć najmniejszą objętość belki przy zachowaniu warunków, że największe przemieszczenia końcowe nie przekraczają danej wartości. W tym celu w prostokątnym układzie współrzędnych  $Oxy$  rozważamy belkę o długości  $l$ . Niech w jednym końcu (przy  $x = 0$ ) belka będzie utwierdzona, a w punktach  $x = \varphi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) i  $x = l$  swobodnie podparta.

Przy uzyskiwaniu rozwiązań stosowana jest zasada ekstremalna Tamuza (6). Rozważać będziemy belkę wykonaną z materiału sztywno-plastycznego. Zakładamy, że w chwili czasu  $t = 0$  każdy punkt belki z wyjątkiem punktów podporowych ma prędkość poprzeczną  $v_0 = \text{const}$ . Uważamy, że przemieszczenia i odkształcenia są małe w porównaniu ze stałą wysokością  $h$  belki. Przy tych założeniach ugięcia belek swobodnie podpartych i utwierdzonych badane były w pracach (3), (4).

### 2. Sformułowanie problemu

W pracy wygodniej jest korzystać z bezwymiarowych wielkości:

$$(2.1) \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad s_k = \frac{\varphi_k}{l}, \quad m = \frac{4U}{\sigma_0 b h^2},$$
$$\tau = \frac{\sigma_0 b h^2 t}{4\mu v_0 l^2}, \quad w = \frac{\sigma_0 b h^2 W}{4\mu v_0^2 l^2},$$

gdzie  $M$  oznacza moment zginający,  $W$  — przemieszczenie w kierunku osi  $Oy$ . Wielkość  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności przy jednoosiowym stanie naprężenia,  $\mu$  masa na jednostkę długości, natomiast  $b$  — szerokość belki. Uwzględniając (2.1) sformułujemy zagadnienie

w następującej postaci. Należy wyznaczyć taki układ  $s_1, \dots, s_n$ , który minimalizuje 1) średnie przemieszczenie końcowe, 2) objętość belki  $V = lbh$  przy ograniczeniu, że przemieszczenia końcowe nie przekraczają danej wartości  $W_*$ , 3) największe przemieszczenie końcowe. Mamy więc trzy typy kryteriów jakości:

$$(2.2) \quad J_1 = \int_0^1 w_f(\xi) d\xi,$$

$$(2.3) \quad J_2 = V \text{ przy ograniczeniu } w_f(\xi) \leq W_*,$$

$$(2.4) \quad J_3 = \max_{0 \leq \xi \leq 1} w_f(\xi),$$

gdzie  $w_f(\xi)$  oznacza przemieszczenie końcowe.

Dla określania przemieszczeń stosujemy zasadę Tamuża (6). Zasada ta stwierdza, że w każdej chwili czasu  $\tau$  przyspieszenia rzeczywiste, wybrane z klasy przyspieszeń kinematycznie dopuszczalnych są punktami stacjonarności pewnego funkcjonału, który w danym przypadku ma postać:

$$(2.5) \quad J = \int_0^1 \frac{1}{2} [\ddot{w}(\xi, \tau)]^2 d\xi - \sum_{j=1}^n m(\xi_j, \tau) [\ddot{w}'(\xi, \tau)]_{\xi=\xi_j}.$$

W (2.5) i w dalszym ciągu pracy

$$(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot); \quad (\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\cdot); \quad [ ]_{\xi=\xi_j} = [ ]_{\xi=\xi_j+0} - [ ]_{\xi=\xi_j-0}.$$

W pracy będziemy stosować wskaźniki  $i, j, k$ .

Umówmy się, że jeśli nie pokazano jakie wartości one przyjmują, to  $i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, n-1; k = 0, \dots, n-1$ .

W omawianym zagadnieniu warunki kinematyczne są następujące:

1. warunek początkowy (wygodniej jest oznaczać  $s_0 = 0, s_{n+1} = 1$ )

$$(2.6) \quad \dot{w}(\xi, 0) = 1 \quad \text{jeśli} \quad \xi \neq s_i, \quad \xi \neq 1,$$

2. warunki brzegowe

$$(2.7) \quad \dot{w}(s_i, \tau) = \dot{w}(1, \tau) = \ddot{w}(s_i, \tau) = \ddot{w}(1, \tau) = 0.$$

### 3. Określanie przemieszczeń końcowych

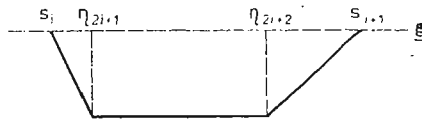
**3.1. Faza początkowa.** Jak wiadomo (3), (4), przy dynamicznym odkształcaniu belek sztywno-plastycznych prędkość przemieszczenia jest odcinkowo-liniową funkcją  $\xi$ . Na rysunku 1 pokazano rozkład prędkości dla części belki w przedziale  $s_i \leq \xi \leq s_{i+1}$ . Punkty  $\eta_{2i+2}(\tau), \eta_{2i+1}(\tau)$  odpowiadają niestacjonarnym przegubom plastycznym. W pun-

ktach tych bezwymiarowy moment zginający  $m = 1$ . Na podstawie rysunku 1 możemy zapisać:

$$(3.1) \quad \dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\xi - s_i}{\eta_{2i+1} - s_i} & \text{dla } s_i \leq \xi \leq \eta_{2i+1}, \\ 1 & \text{dla } \eta_{2i+1} \leq \xi \leq \eta_{2i+2}, \\ \frac{\xi - s_{i+1}}{\eta_{2i+2} - s_{i+1}} & \text{dla } \eta_{2i+2} \leq \xi \leq s_{i+1}. \end{cases}$$

Wzór (3.1) zapewnia spełnienie warunku początkowego (2.6), jeśli

$$(3.2) \quad \eta_{2i+1}(0) = s_i, \quad \eta_{2i+2}(0) = s_{i+1}.$$



Rys. 1

Z (3.1) otrzymujemy rozkład przyspieszeń

$$(3.3) \quad \ddot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\dot{\eta}_{2i+1}(\tau)(s_i - \xi)}{(\eta_{2i+1} - s_i)^2} & \text{dla } s_i \leq \xi < \eta_{2i+1}, \\ 0 & \text{dla } \eta_{2i+1} < \xi < \eta_{2i+2}, \\ \frac{\dot{\eta}_{2i+2}(\tau)(s_{i+1} - \xi)}{(\eta_{2i+2} - s_{i+1})^2} & \text{dla } \eta_{2i+2} < \xi \leq s_{i+1}. \end{cases}$$

Ponieważ w punktach  $\xi = s_i$  muszą istnieć stacjonarne, a w punktach  $\xi = \eta_{2i+1}(\tau)$ ,  $\xi = \eta_{2i+2}(\tau)$  — niestacjonarne przeguby plastyczne, mamy

$$(3.4) \quad m(s_i, \tau) = -1, \quad m(\eta_{2i+1}, \tau) = m(\eta_{2i+2}, \tau) = 1, \quad m(s_{i+1}, \tau) = 0.$$

Podstawiając (3.3) do (2.5) i uwzględniając (3.4) otrzymujemy funkcjonal  $J$  w postaci

$$(3.5) \quad J = \frac{1}{6} \sum_{l=0}^n \left\{ \frac{\dot{\eta}_{2l+1}}{\eta_{2l+1} - s_l} \left[ \dot{\eta}_{2l+1} - \frac{12}{\eta_{2l+1} - s_l} \right] + \frac{\dot{\eta}_{2l+2}}{\eta_{2l+2} - s_{l+1}} \left[ \frac{12}{\eta_{2l+2} - s_{l+1}} - \dot{\eta}_{2l+2} \right] \right\} - \frac{\dot{\eta}_{2n+2}}{(\eta_{2n+2} - s_{n+1})^2}.$$

Przy poszukiwaniu wartości stacjonarnej dla (3.5) możemy zauważyć, że  $J = J(\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_{2n+2})$ . Rzeczywiście, z (3.1) i (3.3) wynika, że

$$\ddot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \dot{\eta}_{2i+1} \frac{\dot{w}^2}{(s_i - \xi)} & \text{dla } s_i \leq \xi < \eta_{2i+1}, \\ \dot{\eta}_{2i+2} \frac{\dot{w}^2}{(s_{i+1} - \xi)} & \text{dla } \eta_{2i+2} < \xi \leq s_{i+1}. \end{cases}$$

Mnożniki typu  $\dot{w}^2/(s_i - \xi)$ , występujące w ostatnim wzorze wykazują, że odpowiednie pole przyspieszeń jest kinematycznie dopuszczalne. Mnożniki te nie podlegają wariacji w (2.5). Poszukiwanie wartości stacjonarnej funkcjonau (3.5) prowadzi więc do układu równań różniczkowych  $\frac{\partial J}{\partial \dot{\eta}_n} = 0$  ( $n = 1, \dots, 2n+2$ ). Rozwiązując ten układ i spełniając warunki brzegowe (3.2) otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \eta_{2k+1}(\tau) &= s_k + \sqrt{12\tau}, & \eta_{2k+2}(\tau) &= s_{k+1} - \sqrt{12\tau}. \\ \eta_{2n+1}(\tau) &= s_n + \sqrt{12\tau}, & \eta_{2n+2}(\tau) &= 1 - \sqrt{6\tau}. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy część belki między podporami  $s_k$  i  $s_{k+1}$ . W przedziale tym faza początkowa ruchu kończy się w chwili  $\tau_k$ , którą wyznacza się z równania  $\eta_{2k+1}(\tau_k) = \eta_{2k+2}(\tau_k)$ . Z układu (3.6) otrzymujemy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tau_k &= \frac{1}{48}(s_{k+1} - s_k)^2, & \alpha_k &= \frac{1}{2}(s_k + s_{k+1})^2, \\ \tau_n &= \frac{(1 - s_n)^2}{6(3 + 2\sqrt{2})}, & \alpha_n &= \frac{s_n + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_k = \eta_{2k+1}(\tau_k)$ .

Dla wyznaczenia przemieszczeń mamy związek (5):

$$(3.8) \quad w(\xi, \tau) = \tau_*(\xi) + \int_{\tau_*(\xi)}^{\tau} \dot{w}(\xi, \tau) d\tau.$$

We wzorze (3.8)  $\tau_*(\xi)$  oznacza bezwymiarowy czas w którym w przekroju  $x = \xi l$  pojawia się przegub plastyczny. Funkcja ta ma postać

$$(3.9) \quad \tau_*(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{12}(\xi - s_k)^2 & \text{dla } s_k \leq \xi \leq \alpha_k, \\ \frac{1}{12}(\xi - s_{k+1})^2 & \text{dla } \alpha_k \leq \xi \leq s_{k+1}, \\ \frac{1}{12}(\xi - s_n)^2 & \text{dla } s_n \leq \xi \leq \alpha_n, \\ \frac{1}{6}(\xi - 1)^2 & \text{dla } \alpha_n \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Wykonując całkowanie w (3.8) i uwzględniając (3.1), (3.6), (3.7) i (3.9) można wyznaczyć przemieszczenia w dowolnej chwili początkowej fazy ruchu. Przemieszczenia końcowe tej fazy są

$$(3.10) \quad \begin{aligned} w(\xi, \tau_k) &= \frac{1}{12}(s_{k+1} - \xi)(\xi - s_k) \quad \text{dla } s_k \leq \xi \leq s_{k+1}, \\ w(\xi, \tau_n) &= \begin{cases} \frac{1}{12}(\xi - s_n) \left[ s_n - \xi + \frac{4(1 - s_n)}{2 + \sqrt{2}} \right] & \text{dla } s_n \leq \xi \leq \alpha_n, \\ \frac{1}{6}(1 - \xi) \left[ \xi - 1 + \frac{2(1 - s_n)}{1 + \sqrt{2}} \right] & \text{dla } \alpha_n \leq \xi \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Należy podkreślić, że czas w którym kończy się faza pierwsza może być różny dla różnych części.

3.2. Faza końcowa. W tej fazie ruch belki opisany jest prędkościami

$$(3.11) \quad \dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \dot{w}_i(\tau) \frac{\xi - s_i}{\alpha_i - s_i} & \text{dla } s_i \leq \xi \leq \alpha_i, \\ \dot{w}_i(\tau) \frac{\xi - s_{i+1}}{\alpha_i - s_{i+1}} & \text{dla } \alpha_i \leq \xi \leq s_{i+1}, \end{cases}$$

gdzie  $\dot{w}_i(\tau)$  oznaczają pewne poszukiwane funkcje czasu  $\tau$ . Zależność (3.11) pozwala określić rozkład przyspieszeń. Funkcjonał (2.5) ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{6} [\ddot{w}_k(\tau)]^2 (s_{k+1} - s_k) + \frac{8\dot{w}_k(\tau)}{s_{k+1} - s_k} \right\} + [\ddot{w}_n(\tau)]^2 \frac{(1 - s_n)}{3(3 + 2\sqrt{2})} + \dot{w}_n(\tau) \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 - s_n}.$$

Otrzymujemy stąd układ równań różniczkowych na poszukiwane  $w_k(\tau)$ :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \ddot{w}_k(\tau) (s_{k+1} - s_k)^2 + 24 &= 0, \\ \ddot{w}_n(\tau) (1 - s_n)^2 + 3(3 + 2\sqrt{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe dla układu (3.12) są następujące:

$$(3.13) \quad w_k(\tau_k) = \tau_k, \quad \dot{w}_k(\tau_k) = 1, \quad K = 0, \dots, n.$$

Zagadnienie (3.12), (3.13) ma następujące rozwiązanie:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} w_k(\tau) &= \frac{1}{2} (3\tau - \tau_k) - \frac{12(\tau^2 - \tau_k^2)}{(s_{k+1} - s_k)^2}, \\ w_n(\tau) &= \frac{1}{2} (3\tau - \tau_n) - \frac{3(3 + 2\sqrt{2})}{2(1 - s_n)^2} (\tau^2 - \tau_n^2). \end{aligned}$$

Czas trwania ruchu  $\tau = \theta_i$  w przedziale  $(s_i, s_{i+1})$  należy wyznaczyć z warunku  $\dot{w}_i(\theta_i) = 0$ .

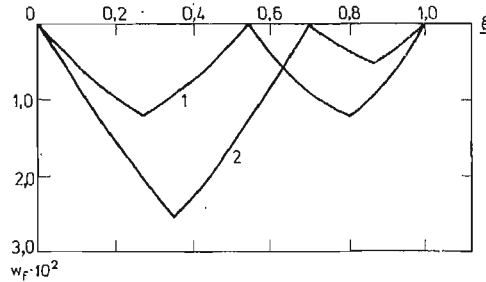
Z (3.14) wynika, że

$$(3.15) \quad \theta_i = 3\tau_i.$$

Po scałkowaniu równania (3.11) z uwzględnieniem (3.7), (3.10), (3.14), (3.15) otrzymujemy przemieszczenia końcowe

$$(3.16) \quad w_f(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{12} (\xi - s_k)^2 + \frac{1}{8} (s_{k+1} - s_k) (\xi - s_k) & \text{dla } s_k \leq \xi \leq \alpha_k, \\ -\frac{1}{12} (s_{k+1} - \xi)^2 + \frac{1}{8} (s_{k+1} - s_k) (s_{k+1} - \xi) & \text{dla } \alpha_k \leq \xi \leq s_{k+1}, \\ -\frac{1}{12} (s_n - \xi)^2 + \frac{(1 - s_n)(\xi - s_n)}{2(2 + \sqrt{2})} & \text{dla } s_n \leq \xi \leq \alpha_n, \\ -\frac{1}{6} (1 - \xi)^2 + \frac{(1 - s_n)(1 - \xi)}{2(1 + \sqrt{2})} & \text{dla } \alpha_n \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Przemieszczenie końcowe dla przypadku jednej podpory dodatkowej pokazano na rys. 2. Krzywa 1 odpowiada położeniu podpory  $s = 0,54$ , druga  $s = 0,7$ .



Rys. 2

#### 4. Optymalizacja położenia podpór pośrednich

4.1. Minimalizacja średniego przemieszczenia końcowego. Rozważmy kryterium (2.2), które przy uwzględnieniu (3.16) ma postać

$$(4.1) \quad J_1 = \frac{7}{288} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (s_{j+1} - s_j)^3 + \frac{8(1-s_n)^3}{3+2\sqrt{2}} \right].$$

Warunkami koniecznymi na ekstremum funkcji (4.1) są równości

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (s_j - s_{j-1})^2 - (s_{j+1} - s_j)^2 &= 0, \\ (s_n - s_{n-1})^2 - \frac{8(1-s_n)^2}{3+2\sqrt{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Układ (4.2) prowadzi do wyniku

$$(4.3) \quad s_i = \frac{2\sqrt{2} \cdot i}{1 + (2n+1)\sqrt{2}}.$$

W przypadku  $n = 1$  mamy  $s_1 = 0,54$ .

Ekonomię tego projektu wyrażamy ilorazem

$$e_1 = \frac{\int_0^1 w_f(\xi) d\xi}{\int_0^1 w_*(\xi) d\xi}$$

gdzie  $w_*(\tau)$  oznacza przemieszczenie końcowe dla belki na dwóch podporach (w tym przypadku w (4.1) można przyjąć  $s_i = 0$ ). Wartość  $e_1$  wynosi

$$e_1 = \frac{3+2\sqrt{2}}{[1+(2n+1)\sqrt{2}]^2}.$$

Z praktycznego punktu widzenia powyższy wskaźnik ekonomii wynikający z porównania belek o różnej liczbie podpór jest o tyle zniekształcony, że nie uwzględnia kosztu budowy dodatkowych podpór. Uwzględnienie tego typu kosztów wykracza poza ramy niniejszej pracy. Można jednak porównywać belkę optymalną z belką o tej samej liczbie podpór ustawionych w różnych odległościach. W tym przypadku koszt budowy podpór jest niejako wyeliminowany, a odpowiedni wskaźnik ekonomii wynosi

$$E_1 = \frac{8(3+2\sqrt{2})(n+1)^3}{[8+n(3+2\sqrt{2})][1+(2n+1)\sqrt{2}]^2}$$

Wielkości  $e_1$  i  $E_1$  odpowiadające kilku wartościom  $n$  podano w tabelicy 1. Tabela ta zawiera również współczynniki  $s$  i  $s'$ , które w następujący sposób określają współrzędne podpór porównywanych projektów

$$s_{k+1} = s(k+1), \quad s'_{i+1} = s'(i+1).$$

Z tabelicy 1 wynika, że wielkość  $E_1$  przyjmuje wartości bliskie jedności. Oznacza to, że średnie przemieszczenie końcowe belki stosunkowo mało zależy od zmiany położenia podpór.

Tabela 1

$n$	1	2	3	4	5	6
$e_1$	0,2121	0,0895	0,0491	0,0309	0,0213	0,0155
$E_1$	0,9814	0,9832	0,9856	0,9877	0,9892	0,9905
$e_2$	0,4605	0,2991	0,2215	0,1759	0,1458	0,1245
$E_2$	0,9210	0,8974	0,8860	0,8793	0,8748	0,8715
$s$	0,5000	0,3334	0,2500	0,2000	0,1667	0,1429
$s'$	0,5395	0,3504	0,2595	0,2060	0,1708	0,1459

**4.2. Minimalizacja objętości belki przy ograniczeniu na przemieszczenia.** Wyznaczamy wartość minimalną wysokości belki przy warunku, że przemieszczenia końcowe nie przekraczają danej wartości  $W_*$  (kryterium (2.3)). Wariacji poddawać będziemy tylko wysokość przy stałej szerokości.

W tym celu we wzorach (3.7), (3.14) i (3.15) zgodnie z (2.1) zastąpimy  $w_i \rightarrow W_i h^2$ ,  $\tau_i \rightarrow t_i h^2$ ,  $\theta_i \rightarrow 3t_i h^2$ . Mamy zagadnienie następujące: znaleźć minimum funkcjonału  $J_2 = h$  przy warunkach

$$(4.4) \quad \frac{1}{24h^2} \cdot (s_{k+1} - s_k)^2 \leq w_*,$$

$$\frac{1}{3h^2} \cdot \frac{(1-s_n)}{3+2\sqrt{2}} \leq w_*.$$

Dla rozwiązania tego zagadnienia wprowadzamy funkcjonał

$$(4.5) \quad J_* = h + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left[ \frac{1}{24} (s_{j+1} - s_j)^2 - w_* h^2 \right] + \lambda_n \left[ \frac{(1-s_n)^2}{3(3+2\sqrt{2})} - w_* h^2 \right],$$

gdzie  $\lambda_j \cdot \geq 0$  oznaczają niewiadome mnożniki Lagrange'a, takie, że

$$(4.6) \quad \lambda_j \left[ \frac{1}{24} (s_{j+1} - s_j)^2 - w_* h^2 \right] = 0.$$

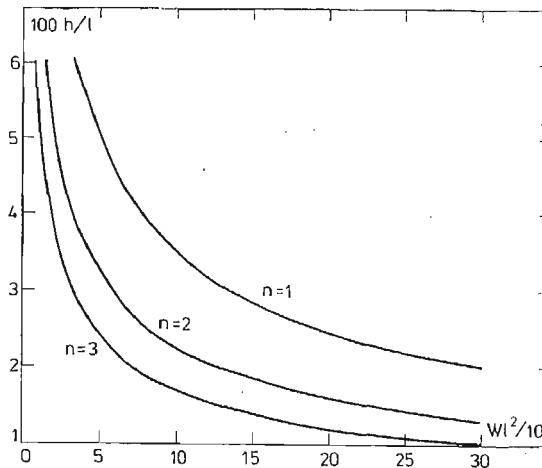
Minimalizacja funkcji (4.5) prowadzi do układu

$$(4.7) \quad \begin{cases} \lambda_{j-1}(s_j - s_{j-1}) - \lambda_j(s_{j+1} - s_j) = 0, \\ \lambda_{-1n}(s_n - s_{n-1}) - \lambda_n \frac{8(1 - s_n)}{3 + 2\sqrt{2}} = 0, \end{cases}$$

$$(4.8) \quad 1 - 2h \sum_{j=0}^n \lambda_j w_* = 0.$$

Z układu (4.7) i (4.8) wynika, że we wszystkich związkach (4.4) zachodzi znak równości. Rzeczywiście, jeśli na przykład pierwsza nierówność (4.4) ma postać

$$\frac{1}{24} s_1^2 < w_* h^2,$$



Rys. 3

to zgodnie z (4.6)  $\lambda_0 = 0$  i z (4.7) wynika, że albo  $s_j = 0$  albo  $\lambda_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Przypadek pierwszy jest nieuzasadniony z punktu widzenia fizycznego natomiast drugi powoduje niespełnienie równania (4.8). Mamy więc w (4.4) znaki równości. Teraz (4.4) jest równoważne (4.2) i (4.3). Przy tym optymalna wysokość belki wynosi

$$h = \{ \sqrt[3]{3W_*} [1 + (2h+1)\sqrt{2}] \}^{-1}.$$

Zależność wysokości belki od  $W_*$  dla  $n = 1, 2, 3$  pokazano na rys. 3.

Ekonomię kształtu określamy wzorami  $e_2 = h/h_*$  i  $E_2 = h/h'$ , gdzie  $h$  jest wysokością belki jednoprzęsłowej, a  $h'$  — wysokością belki o  $n+1$  równych przęsłach. Zarówno



$h_*$  jak i  $h'$  są takie, że maksymalne przemieszczenia w obu belkach wynosi  $W_*$ . Mamy wówczas

$$e_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + (2h+1)\sqrt{2}}, \quad E_2 = (h+1)e_2.$$

**4.3. Minimalizacja maksymalnych przemieszczeń końcowych.** Uwzględnienie (3.13)—(3.16) pozwala przekształcić kryterium (2.4) do postaci

$$(4.9) \quad J_3 = \max_k \left\{ \frac{1}{24} (s_{k+1} - s_k)^2, \frac{(1 - s_n)^2}{3(3 + 2\sqrt{2})} \right\}.$$

Można oczekiwać, że funkcjonał (4.9) osiąga minimum, jeśli maksymalne przemieszczenia w przedziałach  $(s_k, s_{k+1})$  są sobie równe. Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} (s_{j+1} - s_j)^2 &= \frac{1}{24} (s_j - s_{j-1})^2, \\ \frac{1}{24} (s_n - s_{n-1})^2 &= \frac{(1 - s_n)^2}{3(3 + 2\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Ostatni układ jest równoważny (4.2), zatem rozwiązanie optymalne (4.3) odpowiada też kryterium (4.9).

### 5. Zakończenie

W pracy rozwiązano zagadnienia wyznaczenia optymalnego położenia układu dodatkowych podpór belek sztywno-plastycznych obciążonych impulsem prędkości z uwagi na minimum a) średnich, b) maksymalnych przemieszczeń końcowych, c) objętości belki przy ograniczeniu przemieszczeń końcowych. Wykazano, że we wszystkich przypadkach podpory dodatkowe mają te same optymalne położenia.

*Autor pragnie podziękować Prof. A. Sawczukowi i mgr H. Stolarskiemu za okazaną pomoc i rady przy opracowywaniu pracy.*

### Literatura cytowana w tekście

1. Z. MRÓZ, G. I. N. ROZVANY, *Optimal design of structures with variable support conditions*, J. Optimiz. Theory and Appl., **15**, 1 (1975), 85—101.
2. W. PRAGER, G. I. N. ROZVANY, *Plastic design of beams: optimal locations of supports and steps in yield moment*, Int. J. Mech. Sci., **17**, 10 (1975), 627—631.
3. P. S. SYMENDS, *Large plastic deformations of beams under blast type loading*, Proc. 2d U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. Ann Arbor, 1954, 505—515.
4. И. Л. ДИКОВИЧ, *Динамика упруго-пластических балок*, Ленинград, 1960.
5. Я. ЛЕЛЛЕП, *О больших прогибах жестко-пластических стержней при динамическом нагружении*, Уч. зап. Таптуского ун-та, **277** (1971), 258 - 269.
6. В. П. ТАМУЖ, *Об одном уникальном принципе в динамике жесткопластического тела*, Прикл. мат. и мех., **26** (1962), 715 - 722.

## Р е з ю м е

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР ПРИ  
ИМПУЛЬСНО НАГРУЖЕННОЙ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКЕ

Рассматривается изгиб жестко-пластической балки подверженной действию мгновенного начального импульса. Балка находится на  $n+2$  опорах, из которых две закрепляют концы балки. Решена задача определения расположения дополнительных опор, при котором остаточные прогибы принимают минимальные значения. Рассмотрена и обратная задача нахождения минимальной толщины балки при ограничении на остаточные прогибы.

## S u m m a r y

OPTIMAL LOCATION OF ADDITIONAL SUPPORTS IN THE CASE OF A RIGID-PLASTIC BEAM  
LOADED IMPULSIVELY

An impulsively loaded rigid-plastic beam resting on  $n+2$  supports is considered. Two supports fix the ends of the beam. Three optimization criteria are formulated. Optimal location of the additional supports is found under condition that permanent deflection of the beam attains the minimal value. The minimum volume problem is studied in the case of constrained deflections. It is found that the additional supports have the same optimal locations in the all considered cases.

IPPT  
PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1978 r.*

---