MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 16 (1978)

MODELE MATEMATYCZNE PROCESÓW DYNAMICZNYCH I STATECZNOŚĆ RUCHU

ROMAN GUTOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Badanie własności dynamicznych ciał rzeczywistych można przeprowadzać doświadczalnie, lub teoretycznie. Badania doświadczalne przeprowadza się na istniejącym ciele rzeczywistym, lub na jego modelu, zachowując spełnione kryteria podobieństwa dynamicznego. Badania teoretyczne wymagają zbudowania odpowiedniego modelu matematycznego.

Skonstruowanie modelu matematycznego procesów zachodzących w ciele rzeczywistym, wymaga uprzedniego zbudowania jego modelu fizycznego. Model fizyczny nie jest odbiciem rzeczywistości, lecz aktualnie posiadanej o niej wiedzy i zawiera koncepcję opisu fizycznego ciał rzeczywistych, z uwzględnieniem strony ilościowej, przedstawionej podstawowymi prawami fizyki, wyrażonymi odpowiednimi formułami. Model fizyczny ciała rzeczywistego powinien uwzględniać przede wszystkim te jego cechy, które mają decydujący wpływ na zasady organizacji i funkcjonowania ciała rzeczywistego, lub zachodzącego w nim procesu. Ograniczając się do ciał stałych można stwierdzić, że w chwili obecnej najbardziej rozpowszechnione i skuteczne w praktyce technicznej są modele fizyczne fenomenologiczne, nazywane modelami ciągłymi i dyskretnymi.

W przypadku modeli fizycznych ciągłych, podstawową rolę odgrywa pojęcie elementu, których ilość jest w modelu ciągłym z założenia nieskończenie wielka. Pojęcie modelu fizycznego ciągłego nie jest jednoznaczne, zależy ono bowiem w istotny sposób od cech przypisywanych samemu elementowi, jak i od charakteru oddziaływania między elementami. Często stosowany schemat przypisuje elementom cechy ciała sztywnego, oddziaływującego z innymi elementami w sposób opisany za pomocą modeli reologicznych, których zachowanie się przedstawiają tak zwane konstytutywne prawa stanu. Powstaje tu od razu możliwość generowania bogatej rodziny modeli fizycznych ciągłych, typu sprężystego Lamégo, lub Cosserat, lepkosprężystych itd. Dalsze wzbogacenie modeli fizycznych można uzyskać odstępując od koncepcji elementu jako ciała sztywnego i dopuszczając procesy nawet dynamiczne zachodzące wewnątrz elementu. Taka sytuacja ma na przykład miejsce w przypadku oddziaływania na ciało stałe obciążeń szybkozmiennych, o częstościach porównywalnych z częstościami drgań atomów w sieci krystalicznej ciała.

W przypadku, gdy jako reprezentację modelu fizycznego przyjmujemy skończoną ilość skończonych elementów, traktowanych jako punkty materialne, lub ciała sztywne, wtedy mamy do czynienia z modelem fizycznym dyskretnym, którego ostateczna postać zależy od charakteru więzów, to znaczy oddziaływań między elementami i otoczeniem.

Dla każdego modelu fizycznego można zbudować szereg modeli matematycznych, w zależności od przyjętego wyboru współrzędnych stanu. Pozostając w ramach mechaniki newtonowskiej, najczęściej stosowanymi modelami matematycznymi są dla modeli ciągłych równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, bądź równania całkowe, bądź różniczkowo całkowe, otrzymane ze skojarzenia równań otrzymanych metodą bilansu i równania konstytutywnego stanu, zaś dla modeli dyskretnych równania różniczkowe zwyczajne otrzymywane za pomocą metod mechaniki analitycznej.

Pomijając szereg szczegółowych idei związanych z ogólną teorią i praktyką modelowania fizycznego i matematycznego procesów mechanicznych w ciałach stałych, należy stwierdzić, że badania teoretyczne uzyskanego modelu matematycznego może się odbywać bądź metodami ilościowymi w sposób analityczny, lub numeryczny, bądź metodami jakościowymi. W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na jednej z ważnych, lecz często niedocenianych cech jakościowych modelu matematycznego, to znaczy stateczności, która dla modeli matematycznych, w których występuje czas jako parametr wyróżniony, nosi nazwę stateczności ruchu. Dla procesów dynamicznych w ciałach stałych, model matematyczny powinien zapewniać uzyskanie informacji o zachowaniu się ciała w przestrzeni z biegiem czasu. Stateczność rozwiązań jest jedną z podstawowych cech modelu matematycznego, opisującego proces fizyczny, podobnie jak istnienie i jednoznaczność rozwiązania, gdyż decyduje ona o realizowalności procesu rzeczywistego, opisywanego rozważanym modelem matematycznym. Trzeba stwierdzić, że dla stateczności ruchu wprowadzono wiele różnych pojęć i definicji, a ponadto badania prowadzi się za pomocą niejednolitego i różnorodnego aparatu matematycznego. Stan ten często nie ułatwia interpretacji otrzymanych rezultatów, gdyż ze względu na różnice co do metody i sposobu przedstawienia, przeprowadzenie ich porównania okazuje się w wielu przypadkach trudne. Spowodowało to powstanie sytuacji, w której pojęcie stateczności ruchu przestało być jednoznaczne i pod pojęciem tym kryją się różne, często przeciwstawne własności rozwiązań modelu matematycznego. W niniejszych rozważaniach przedstawione zostaną główne istniejące pojęcia stateczności i kierunki ich rozwoju, zarówno dla modeli dyskretnych jak i ciągłych, z uwzględnieniem szeregu ważnych i istotnych różnic między nimi.

2. Podstawowe pojęcia teorii stateczności ruchu. Rodzaje stateczności ruchu układów dyskretnych

Rozważmy układ materialny, będący bądź w stanie równowagi, bądź w stanie pewnego ruchu. Rozwiązanie otrzymane na podstawie modelu matematycznego, opisującego rozważany układ materialny, zapewniające uzyskanie informacji o zachowaniu się układu w przestrzeni z biegiem czasu, będziemy w dalszym ciągu nazywali procesem.

Ogólnie rzecz biorąc, na podstawie intuicji, statecznością procesu będziemy nazywali własność zachowywania przez model matematyczny danego procesu, przy działaniu małych zaburzeń, lub inaczej niepodatność na małe zaburzenia, których nie uwzględnia się przy wyprowadzaniu równań ruchu układu. Spodziewamy się wtedy, że układ materialny będzie miał zdolność do zachowywania wykonywanego ruchu, lub położenia równowagi przy oddziaływaniu małych zaburzeń. Jeżeli rozważany proces ulega unicestwieniu nawet pod wpływem dowolnie małych zaburzeń, wtedy nazywamy go niestatecznym. Proces niestateczny jest nieobserwowalny, to znaczy nie dają się zrealizować w rzeczywistości, czyli inaczej mówiąc nie występuje w przyrodzie.

Przy badaniu teoretycznym dowolnego rzeczywistego zjawiska, pomijamy drugorzędne czynniki i budujemy model fizyczny i matematyczny, będący naszym przybliżonym wyobrażeniem o tym zjawisku. Opierając się o ten model, konstruujemy nowe modele tego zjawiska, lub nawet modele innych zjawisk. Powstaje pytanie, czy utworzone przez nas nowe procesy można zrealizować w rzeczywistości.

Otóż jeśli są one stateczne, to możliwość taka, przynajmniej teoretycznie istnieje. Jeśli zaś ulegają one likwidacji pod wpływem małych zaburzeń odzwierciedlających warunki rzeczywiste, to są one niestateczne i nierealizowalne w rzeczywistości.

Z tego względu, warunkiem koniecznym realizacji idealnych procesów jest, aby odpowiadający im model matematyczny czynił zadość tak zwanej zasadzie stateczności, obejmującej istnienie, jednoznaczność i stateczność jego rozwiązań pod wpływem małych zaburzeń.

Należy rozróżniać stateczność względem dowolnie małych zaburzeń, decydującą o możliwości zrealizowania procesu w rzeczywistości i stateczność względem dowolnych zaburzeń, związaną z oszacowaniem odchylenia procesu, od pewnego procesu idealnego, niezaburzonego. Jednakże badanie zachowania się procesu idealnego przy większych zaburzeniach ma znaczenie tylko wtedy, gdy jest on stateczny względem dowolnie małych zaburzeń, to znaczy, gdy jest on obserwowalny w przyrodzie. Zarówno jedna jak i druga stateczność, mają podstawowe znaczenie przy projektowaniu nowych obiektów, gdyż pozwalają one na prognozowanie, czyli przewidywanie zachowania się obiektu podczas eksploatacji.

Z powyższych rozważań wynika, że pojęciu stateczności został nadany wyraźnie sens matematyczny, dotyczący własności modelu matematycznego, a nie fizyczny, dotyczący zjawiska rzeczywistego. W tym rozumieniu pojęcie stateczności nie stosuje się do zjawisk rzeczywistych. Stwierdzenie, że rzeczywiste zjawisko fizyczne jest stateczne lub nie, jest w powyższym znaczeniu pozbawione sensu. W większości istniejących sformułowań badanie stateczności wymaga bowiem:

1) Porównywania jednocześnie występującego zbioru procesów zaburzonych z procesem idealnym, niezaburzonym.
2) Ustalenia sposobu mierzenia odległości między jednocześnie występującymi procesami, zarówno w stanie początkowym jak i dowolnym.
3) Określenia warunków, którym muszą czynić zadość te odległości.

Realizacja tych wymagań nie jest możliwa w przypadku zjawiska rzeczywistego, które odbywa się w sposób jednorazowy.

Chcąc sprecyzować lepiej pojęcie stateczności, trzeba brać pod uwagę specyficzne cechy zjawiska, które ma opisywać model matematyczny. Może to mieć istotny wpływ na ostateczne ścisłe zdefiniowanie pojęcia stateczności. Pojęcie stateczności nie jest bowiem pojęciem właściwym dla fizyki jakiegoś zjawiska, lecz podlega zdefiniowaniu, w zależności od tego, jakich cech żądamy od modelu matematycznego opisującego zjawisko.

Podamy teraz najważniejsze definicje stateczności ruchu zaburzonego, które zostały zdefiniowane dla potrzeb badania różnych własności modeli matematycznych układów dyskretnych.

2.1. Stateczność w sensie Lapunowa. Rozważmy równanie ruchu zaburzonego w postaci

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

gdzie x = col $[x_1, \ldots, x_n]$, f = col $[f_1, \ldots f_n]$. Zakładamy, że funkcja f spełnia dowolne założenia, zapewniające istnienie i jednoznaczność równania (1) w pewnym przedziale (a, ∞).

Definicja. Rozwiązanie $\xi = \xi(t)$ równania (1) jest stateczne w sensie Lapunowa przy $t \to \infty$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $t_0 \in (a, \infty)$ istnieje takie $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$, że
1) Wszystkie rozwiązania $x = x(t)$ równania (1) włącznie z $\xi(t)$ spełniające warunek

$$||x(t_0) - \xi(t_0)|| \leqslant \eta, \tag{2}$$

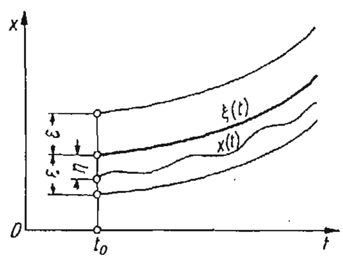
są określone w $[t_0, \infty]$, lub jak niekiedy mówimy, są określone w przyszłości
2) Dla rozwiązań tych zachodzi nierówność

$$||x(t) - \xi(t)|| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad t \in [t_0, \infty), \tag{3}$$

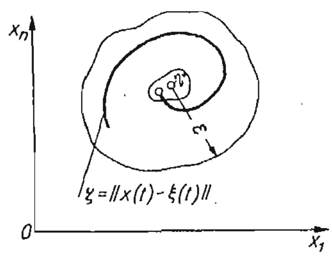
Jeśli ponadto jest

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t) - \xi(t)|| = 0 \tag{4}$$

wtedy rozwiązanie $\xi(t)$ jest asymptotycznie stateczne.



Rys. 1



Rys. 2

Inaczej mówiąc, rozwiązanie $\xi(t)$ jest stateczne, jeśli rozwiązanie $x(t)$ dostatecznie bliskie niego dla $t = t_0$, leży całkowicie w dowolnie wąskim ε — otoczeniu, zbudowanym wokół rozwiązania $\xi(t)$.

Gdy $f(t, 0) = \mathbf{0}$ wtedy równanie (1) ma rozwiązanie zerowe $\xi = \mathbf{0}$, zwane położeniem równowagi. Definicję stateczności tego rozwiązania zerowego otrzymujemy, kładąc w (2), (3), (4), $\xi(t_0) = \mathbf{0}$ i $\xi(t) = \mathbf{0}$.

Jeśli η można dobrać niezależnie od t_0, to znaczy jest $\eta = \eta(\varepsilon)$, to stateczność nazywamy jednostajną.

Należy zaznaczyć, że ze stateczności rozwiązania niezerowego $\xi(t)$ równania (1) nie wynika jego ograniczoność i na odwót.

Przedstawiona definicja stateczności w sensie Lapunowa, obejmuje przypadek klasyczny, podstawowy, stateczności względem zaburzeń tylko wartości początkowych. Można rozważać również stateczność przy małych zaburzeniach samej postaci równania (1), to znaczy przy małych zmianach funkcji $f(t, x)$, występującej po prawej stronie równania

(1). Wtedy mamy do czynienia z tak zwaną statecznością przy stale działających zaburzeniach, które podlega osobnemu zdefiniowaniu (definicję tę w zakresie niniejszych rozważań pomijamy).

Warto zwrócić jeszcze uwagę na niektóre specyficzne cechy zdefiniowanej stateczności w sensie Lapunowa dla układów liniowych. Rozważmy równanie różniczkowe liniowe ruchu zaburzonego w postaci

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}(t)z + \boldsymbol{f}(t), \qquad z(t_0) = z_0, \tag{5}$$

gdzie $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Zakładamy, że macierze $\mathbf{A}(t)$ i $\boldsymbol{f}(t)$ są ciągłe w $[t_0, \infty)$. Wraz z równaniem (5) rozważmy równanie liniowe jednorodne w postaci

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(t)x, \qquad x(t_0) = x_0 = z_0, \tag{6}$$

Układ (5) nazywamy statecznym (lub niestatecznym) w sensie Lapunowa, jeśli wszystkie jego rozwiązania $z = z(t)$, są stateczne (lub niestateczne) w sensie Lapunowa przy $t \to \infty$. Pojęcie stateczności odnosimy tu do układu liniowego (5), gdyż jak można wykazać, wszystkie rozwiązania układu liniowego są bądź jednocześnie stateczne, bądź niestateczne. Taka terminologia nie ma uzasadnienia dla równania nieliniowego (1), gdyż niektóre jego rozwiązania mogą być stateczne, a inne nie. Zatem liniowy układ jest stateczny, gdy przynajmniej jedno rozwiązanie tego układu stateczne i niestateczny, gdy niestateczne jest jakiekolwiek jego rozwiązanie. Ponadto można wykazać, że niejednorodny układ liniowy (5) jest stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stateczny odpowiedni jednorodny układ liniowy (6). Z tego względu, wystarczy badać stateczność tylko układów liniowych jednorodnych.

Inna ważna własność charakterystyczna układów liniowych polega na tym, że liniowy układ jednorodny (6) jest stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy każde rozwiązanie $x(t)$ tego układu jest ograniczone dla $t \in [t_0, \infty)$. Własności tej nie ma już układ liniowy niejednorodny (5) oraz oczywiście układ nieliniowy.

Można również wykazać, że układ jednorodny (6) jest asymptotycznie stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego rozwiązania zmierzają do zera przy $t \to \infty$. Własność ta nie ma miejsca dla równań nieliniowych, dla których wszystkie rozwiązania mogą dążyć do zera, podczas gdy rozwiązanie zerowe tego równania jest niestateczne.

2.2. Stateczność w sensie Lagrange'a. Rozważmy ponownie równanie ruchu zaburzonego w postaci (1). Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \mathbf{C})$, gdzie macierz $\mathbf{C}$ możemy wyznaczyć z warunku początkowego, to znaczy $\boldsymbol{x}(t_0, \mathbf{C}) = \boldsymbol{x}_0$ skąd $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

Podstawiając tę wartość do rozwiązania ogólnego, mamy

$$x = x(t; t_0, x_0). \tag{7}$$

Wartości t_0, x_0 są tu parametrami, zaś rozwiązanie ogólne, przedstawione wzorem (7), nazywamy rozwiązaniem w postaci Cauchy'ego.

Definicja. Rozwiązania $x(t; t_0, x_0)$ równania (1) są stateczne w sensie Lagrange'a, lub układ (1) jest stateczny w sensie Lagrange'a, gdy mają miejsce następujące własności

1) Każde rozwiązanie $x(t; t_0, x_0)$ można nieograniczenie przedłużyć w prawo, to znaczy ma ono sens w $[t_0, \infty)$, czyli jest ono określone w przyszłości
2) Norma każdego rozwiązania $x(t; t_0, x_0)$ jest ograniczona w $[t_0, \infty)$

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leqslant M(t_0, x_0) = \text{const} < \infty, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{8}$$

Z definicji tej jest widoczne, że stateczność w sensie Lapunowa i w sensie Lagrange'a różnią się w istotny sposób. Istotnie stateczność w sensie Lapunowa dla równań nieliniowych jest zindywidualizowana, to znaczy jedne rozwiązania mogą być stateczne w sensie Lapunowa, a inne nie. Natomiast stateczność w sensie Lagrange'a, dotyczy własności obejmującej wszystkie rozwiązania równania nieliniowego, a więc dotyczy układu, a nie indywidualnych rozwiązań. Następnie rozwiązania stateczne w sensie Lapunowa dla równania (1) nie muszą być ograniczone, co stanowi drugą podstawową różnicę, między statecznością w sensie Lapunowa i Lagrange'a. Widać więc, że układ stateczny w sensie Lapunowa może być niestateczny w sensie Lagrange'a i na odwrót. Pojęcia obu tych stateczności są równoważne tylko wtedy, gdy układ (1) ma rozwiązania $\xi(t)$ ograniczone, które są globalnie asymptotycznie stateczne w sensie Lapunowa, to znaczy względem dowolnych zaburzeń wartości początkowych. Wtedy układ (1) jest też stateczny w sensie Lagrange'a. Również wszystkie układy liniowe jednorodne, stateczne w sensie Lapunowa, są stateczne w sensie Lagrange'a i na odwrót.

2.3. Stateczność orbitalna. Rozważmy równanie różniczkowe nieliniowe autonomiczne

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Zakładamy, że funkcja f spełnia warunki, zapewniające istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (9) w rozważanym obszarze współrzędnych stanu x.

Niech $x = x(t)$ będzie rozwiązaniem równania (9). Zbiór punktów L w n wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_x^n, tworzących rozwiązanie równania (9), będziemy nazywali trajektorią rozwiązania.

Odległość punktu $z \in E_x^n$ od zbioru L zawartego w tej przestrzeni określamy następująco

$$\varrho(z, L) = \inf_{x \in L} \|z - x\|. \tag{10}$$

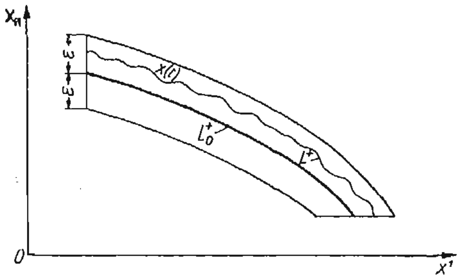
Niekiedy dogodnie jest dla rozwiązania $x = x(t)$ rozważać zbiór punktów L^+ w E_x^n, odpowiadających wartościom parametrów $t_0 \leqslant t < \infty$. Zbiór ten nazywamy półtrajektorią dodatnią (analogicznie określamy półtrajektorię ujemną L^-).

Definicja. Rozwiązanie $\xi = \xi(t)$ równania (9) nazywamy orbitalnie statecznym przy $t \to \infty$, jeśli dodatnie półtrajektorie L^+ wszystkich rozwiązań, które w chwili t_0 są dostatecznie bliskie rozwiązania $\xi(t)$ są przez cały czas $t \in [t_0, \infty)$ zawarte w dowolnie małym ε — otczeniu dodatniej półtrajektorii L_0^+ rozwiązania $\xi(t)$.

Inaczej mówiąc, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ takie, że jeśli $\|x(t_0 - \xi(t_0)\| \leqslant \eta$ to $\varrho(x(t), L_0^+) \leqslant \varepsilon$ dla $t \geqslant t_0$.

Jeśli ponadto $\varrho(x(t), L_0^+) \to 0$ przy $t \to \infty$ to rozwiązanie $\xi(t)$ nazywamy asymptotycznie orbitalnie statecznym.

Gdy na przykład L_0^+ jest zamkniętą asymptotycznie orbitalnie stateczną trajektorią, to trajektorie L^+ dostatecznie bliskie niej w chwili $t = t_0$, nawijają się na nią przy $t \to \infty$. Jeśli rozwiązanie $\xi(t)$ jest stateczne w sensie Lapunowa, to wynika stąd również stateczność orbitalna tego rozwiązania, lecz nie na odwrót.



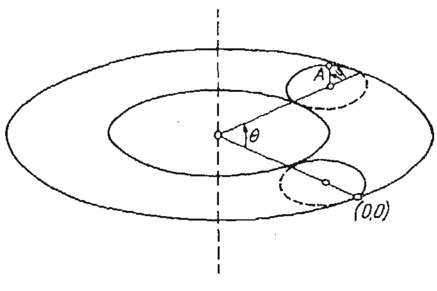
Rys. 3

2.4. Pojęcie o stateczności w sensie Poissona. Rozważmy ruchu punktu na powierzchni torusa. Niech ruch ten opisują równania różniczkowe

(11) $$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Trajektorie punktu A na torusie otrzymujemy z równania różniczkowego

(12) $$\frac{d\varphi}{d\theta} = \alpha \quad \text{skąd} \quad \varphi = \alpha\theta + C.$$



Rys. 4

Każdą z trajektorii na torusie, otrzymujemy z trajektorii podstawowej $\varphi = \alpha\theta$, przez dodanie stałej C, wystarczy więc zbadać strukturę trajektorii podstawowej. Rozważmy dwa przypadki

1) $\alpha = \dfrac{m}{k}$ jest liczbą wymierną. Wtedy trajektoria $\varphi = \dfrac{m}{k}\theta$ jest linią zamkniętą na powierzchni torusa i po wykonaniu skończonej ilości zwitek przechodzi przez punkt $\theta = 2k\pi$, $\varphi = 2m\pi$ pokrywający punktem $(0, 0)$
2) α jest liczbą niewymierną. Aby zbadać strukturę trajektorii w tym przypadku, korzystamy z następującego rezultatu.

Rozważmy liczby w postaci $(n\alpha)$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, zaś $(n\alpha)$ częścią ułamkową liczby $n\alpha$, to znaczy $0 < (n\alpha) < 1$. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, mamy ciąg liczb $(\alpha), (2\alpha), (3\alpha), \ldots$, które możemy przedstawić jako punkty w przedziale $[0,1]$. Jeśli $\alpha > 0$

jest liczbą niewymierną, to liczby $(n\alpha)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, tworzą zbiór wszędzie gęsty w przedziale $[0,1]$.

Trajektoria $\varphi = \alpha\theta$ wychodząca z punktu $(0, 0)$ wykonuje kilka zwitek i przecina równik $\varphi = 0$ w punkcie $\left(\theta = \frac{2\pi}{\alpha}, \varphi = 2\pi\right)$ różnym od wyjściowego, następnie po wykonaniu kilku zwitek, przecina równik $\varphi = 0$ w nowym punkcie $\left(\frac{4\pi}{\alpha}, 4\pi\right)$ i tak dalej. Wobec tego trajektoria przecina wielokrotnie równik w punktach $\left(\frac{2k\pi}{\alpha}, 2k\pi\right)$. Pomijając wartości będące wielokrotnościami 2π, mamy następujące współrzędne punktów przecięcia trajektorii $\varphi = \alpha\theta$ z równikiem $\left(2\pi\left(\frac{k}{\alpha}\right), 0\right)$, gdzie $\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ jest częścią ułamkową liczby $\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Na podstawie przedstawionego wyżej rezultatu liczby $\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ tworzą zbiór wszędzie gęsty w przedziale $[0,2\pi]$, a więc punkty $\left(2\pi\left(\frac{k}{\alpha}\right), 0\right)$ tworzą zbiór wszędzie gęsty na równiku $\varphi = 0$. Rozważania te można bez zmian powtórzyć dla dowolnego równoleżnika $\varphi = c$, zatem trajektoria $\varphi = \alpha\theta$ jest wszędzie gęsta na powierzchni torusa.

Rozważmy jakikolwiek konkretny ruch po trajektorii $\varphi = \alpha\theta$ na przykład

$$\varphi = \alpha t, \quad \theta = t \tag{13}$$

Ponieważ ruch ten odbywa się po trajektorii $\varphi = \alpha\theta$ wszędzie gęstej na powierzchni torusa i prędkość ruchu jest stała $v = \sqrt{1+\alpha^2} = \text{const} > 0$, więc dla każdego otoczenia punktu $(0,0)$ istnieje $t > t_0$ takie, że punkt reprezentujący $A(\theta = t, \varphi = \alpha t)$ należy do tego otoczenia. Mówiąc potocznie rozważany ruch ma tę własność, że punkt reprezentujący O powraca nieskończenie wiele razy w każde otoczenie punktu $(0, 0)$, mimo że może w międzyczasie znacznie oddalić się od tego punktu. Własność ta nazywa się statecznością ruchu w sensie Poissona i jest to rodzaj stateczności odmiennej od stateczności w sensie Lapunowa, Lagrange'a i stateczności orbitalnej. Stateczność w sensie Poissona, znajduje zastosowanie między innymi przy badaniu własności ruchów okresowych i prawie okresowych.

2.5. Stateczność techniczna. Rozważmy równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{14}$$

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z) + F(t, z), \quad z(t_0) = z_0 = x_0 \tag{15}$$

Zakładamy, że funkcje f i F spełniają warunki, zapewniające istnienie i jednoznaczność rozwiązań rozważanych równań w skończonym obszarze

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad ||x|| \leqslant H, \quad ||z|| \leqslant H$$

Ponadto niech $f(t, 0) = 0$, $F(t_0 z_0) = 0$. Funkcja $F(t, z)$ może być praktycznie nieznana, lecz zakładamy, że znane jest oszacowanie tej funkcji oraz wartości początkowych z_0

$$||z_0|| \leqslant z_0^*, \quad ||F(t, z)|| \leqslant \Gamma(t) \quad \text{dla} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{16}$$

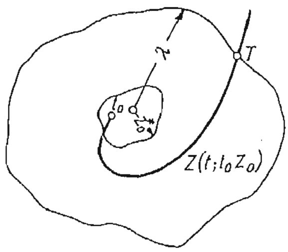
W szczególnym przypadku może być $\Gamma(t) = \gamma = \text{const}$.

Definicja: Niech $z = z(t; t_0, z_0)$ przedstawia wszystkie ruchy opisane równaniem (15), spełniające warunek początkowy $z(t_0) = z_0$ i ograniczenia (16).
Jeśli

(17) $$\|z(t; t_0, z_0)\| \leqslant A(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

(w szczególnym przypadku może być $A(t) = \lambda = \text{const}$), to proces $x(t; t_0, x_0)$, czyli rozwiązanie równania (14) nazywamy statecznym technicznie, względem wartości ograniczeń z_0^*, $\Gamma(t)$, $A(t)$.

Proces $x(t; t_0, x_0)$ nazywamy niestatecznym technicznie względem tych ograniczeń, jeśli dla $t_0 \leqslant t \leqslant T$, chociażby jedno z rozwiązań $z(t; t_0, z_0)$ nie spełnia nierówności (17), co najmniej w jednej chwili z przedziału $t_0 \leqslant t \leqslant T$.



Rys. 5

Istotną sprawą w tak rozumianym pojęciu stateczności jest to, że wartości z_0^* i $A(t)$ (lub $\lambda = \text{const.}$) obiera się jeden raz dla danego zagadnienia, niezależnie od siebie oraz, że żądane własności mają mieć miejsce w skończonym przedziale czasu $t_0 \leqslant t \leqslant T$, gdzie wartość T obieramy również jeden raz dla danego zagadnienia.

Porównując rozważaną stateczność techniczną na przykład ze statecznością w sensie Lapunowa stwierdzamy, że w tej ostatniej dla każdego obszaru Ω_A musiał istnieć obszar $\Omega_{z_0}^*$ taki, aby startujące z niego rozwiązanie pozostawało stale ($T = \infty$) w obszarze Ω_A. W stosunku do stateczności w sensie Lapunowa, stateczność techniczna ma złagodzone warunki, bardziej przystosowane do potrzeb praktyki.

2.6. Ogólne uwagi o niektórych innych rodzajach stateczności. W powyższych rozważaniach przedstawionych zostało kilka pojęć stateczności ruchu, przy czym pojęcia te są odmienne, zatem przy badaniu stateczności ruchu trzeba wyraźnie sprecyzować, jaka stateczność podlega badaniu. Oprócz wymienionych wyżej rodzajów stateczności ruchu, istnieją liczne ich modyfikacje oraz inne jeszcze pojęcia stateczności ruchu, odmienne od rozważanych wyżej. Dokonanie systematycznego i wyczerpującego przeglądu istniejących obecnie pojęć stateczności, przekroczyłoby ramy niniejszych rozważań.

Omówimy tylko ogólnie jeszcze jedno pojęcie, które często nosi nazwę wrażliwości własności rozwiązań, na zmiany strukturalno-modelowe. Aby objaśnić to pojęcie, posłużymy się przykładem trzech równań różniczkowych w postaci

(18) $$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha^2 \sin x = 0,$$

(19) $$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha^2 x = 0,$$

(20) $$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0,$$

Równania (19) i (20) można uważać za modele zastępcze, uproszczone, powstałe w wyniku zaburzenia modelu wyjściowego (18), czyli zaburzenia struktury układu. Również równania (18) i (19) można uważać za modele zastępcze wzbogacone, powstałe w wyniku zaburzenia modelu wyjściowego (20). Zaburzeniom tego typu towarzyszy modyfikacja równania różniczkowego, czyli modelu matematycznego opisującego dane zjawisko.

Z fizycznego punktu widzenia modyfikacje takie są uzasadnione, jeśli zmiany równania różniczkowego, polegające na dołączaniu lub odłączaniu małych składników równania różniczkowego, pociągają za sobą małe zmiany rozwiązania. Przypuszczamy zwykle, że tak jest, opierając się na intuicji fizycznej, jednakże przypuszczenie takie nie zawsze jest prawdziwe, zwłaszcza dla procesów długotrwałych, gdyż małe zmiany równania różniczkowego, mogą w istotny sposób wpływać na zachowanie się rozwiązania. Jeśli na przykład oscylacyjność rozwiązań jest nadrzędną cechą jakościową, którą chcemy zachować modyfikując model matematyczny, to równania (18), (19) i (20) możemy uznać za równoważne na przykład dla małych $\beta > 0$. Gdy cechą nadrzędną jest okresowość rozwiązania, to model (20) czyni temu zadość, natomiast modele (18) i (19) już nie.

Powstaje więc zagadnienie wyodrębnienia klas równoważnych równań różniczkowych, w sensie zachowania pewnej własności, lub pewnego zespołu własności W. Jest to zagadnienie wrażliwości strukturalno modelowej, nazywanej również statecznością w sensie Bellmana, polegające na tym, aby przy zastąpieniu jednego modelu matematycznego innym, wyróżniane własności układu nie zmieniały się w istotny sposób i znajdowały się w zasięgu naszej kontroli. Wrażliwość może dotyczyć nie tylko zespołu W własności jakościowych, lecz również zmian ilościowych pewnych wielkości jak na przykład zmiany wartości rozwiązania, całkowitej energii układu, funkcji celu w procesach optymalnych itp.

Jednym z wariantów zagadnienia wrażliwości nabierających ostatnio coraz większego znaczenia praktycznego, jest zagadnienie wrażliwości ilościowej rozwiązania na zmianę parametrów, które przedstawimy poglądowo w sposób następujący. Niech model matematyczny pewnego zjawiska fizycznego będzie opisywany równaniem różniczkowym w postaci

(21) $$\Phi = \ddot{x} - f(t, x, \dot{x}, c) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \; \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0.$$

Rozwiązanie równania (21) będziemy uważali za znane. Zagadnieniem, które chcemy zbadać, jest wrażliwość rozwiązania $x(t, c)$ na zmianę parametru c, to znaczy zmiana tego rozwiązania, gdy parametr c zmieni się o wartość Δc. W tym celu wprowadzamy funkcję wrażliwości w postaci

(22) $$u(t, c) = \lim_{\Delta c \to 0} \frac{x(t, c+\Delta c) - x(t, c)}{\Delta c} = \frac{\partial u}{\partial c}.$$

Na podstawie związku (22) mamy przybliżoną zależność

(23) $$x(t, c+\Delta c) - x(t, c) \cong u(t, c)\Delta c.$$

Jeśli więc wyznaczymy, lub oszacujemy funkcję $u(t, c)$, wtedy na mocy (23) możemy wyznaczyć w przybliżeniu, lub oszacować zmianę funkcji $x(t, c)$ wynikłą wskutek zmiany parametru c o wartość Δc. Można również sformułować zadanie odwrotne, wyznaczenia takiej zmiany Δc parametru c, aby odchylenie rozwiązania $x(t, c)$ powstałe pod wpływem tej zmiany, nie przekroczyło z góry żądanej wartości.

Równanie różniczkowe dla funkcji $u(t, c)$ otrzymujemy, różniczkując równanie (21) względem parametru c

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{x}}\frac{\partial \ddot{x}}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

Stąd mamy

$$\ddot{u} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{u} - \frac{\partial f}{\partial x}u = \frac{\partial f}{\partial c}. \tag{24}$$

Ponieważ rozwiązanie $x(t, c)$ uważamy za znane, więc znane są również funkcje

$$\alpha(t, c) = -\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \quad \beta(t, c) = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \gamma(t, c) = \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Równanie (24) przybiera więc postać

$$\ddot{u} + \alpha(t, c)\dot{u} + \beta(t, c)u = \gamma(t, c). \tag{25}$$

Zwróćmy uwagę na to, że dla równania nieliniowego (21) równanie różniczkowe wrażliwości (25) okazuje się liniowym równaniem różniczkowym o zmiennych współczynnikach. Ważnym praktycznie przypadkiem rozważanego zagadnienia, jest wrażliwość równania różniczkowego o stałych współczynnikach, na zmiany współczynników równania. Niech równanie (21) ma na przykład postać

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t). \tag{26}$$

Chcemy zbadać wrażliwość rozwiązań tego równania, na zmianę współczynnika na przykład b, który w rozważanym teraz przypadku odgrywa rolę parametru c. Różniczkując równanie (26) względem parametru b, otrzymujemy na mocy (22) (dla $b = c$)

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = -x. \tag{27}$$

Równanie różniczkowe wrażliwości ma więc taką samą postać jak równanie (26), lecz po prawej stronie występuje ten składnik równania (ze znakiem minus), który w równaniu wyjściowym (26) występował wraz ze współczynnikiem b.

Rezultaty badania wrażliwości na zmiany współczynników równań liniowych są ostatnio z powodzeniem stosowane przy pewnym rodzaju syntezy układów mechanicznych i elektrycznych, zwanym zagadnieniem modyfikacji układu.

Spośród omówionych rodzajów stateczności układów dyskretnych, dla większości potrzeb występujących w zastosowaniach technicznych, najlepiej przystosowana jest stateczność techniczna. Pojęcie stateczności w sensie Lapunowa, zawiera niejednokrotnie zbyt ostre wymagania w stosunku do potrzeb techniki w chwili obecnej, mimo tego stateczność ta jest w technice szeroko stosowana, ze względu na najlepiej opracowane metody jej badania. Pojęcie stateczności w sensie Lagrange'a jest bez modyfikacji, z punktu widzenia potrzeb technicznych zbyt szerokie, ze względu na dowolność stałej, ograniczającej rozwiązanie modelu matematycznego. Niedogodności powstające przy stosowaniu różnych pojęć stateczności w technice, zostały w znacznej mierze usunięte, przez wprowadzenie pojęcia stateczności technicznej, odpowiadającej najbliżej potrzebom techniki.

Należy zaznaczyć, że metody badania różnego rodzaju stateczności, wywodzą się w dużym zakresie z metod opracowanych dla badania stateczności w sensie Lapunowa. Tak więc stosowanie metod badania stateczności za pomocą tak zwanych funkcjonałów Lapunowa, nie oznacza zawsze, że badana jest stateczność w sensie Lapunowa. Z tego względu zaznajomienie się z metodami badania stateczności różnego rodzaju, celowe jest rozpoczynać od metod, opracowanych dla stateczności w sensie Lapunowa.

3. Podstawowe różnice między statecznością modeli matematycznych układów dyskretnych i ciągłych

Norma stosowana w definicjach o stateczności (na przykład w sensie Lapunowa) modeli matematycznych uładów dyskretnych, jest miarą odległości między rozwiązaniami, między innymi rozwiązań $x(t)$ od rozwiązania idealnego, niezaburzonego $\xi = 0$. Istotną sprawą jest fakt, że normy w przestrzeniach o skończonej ilości wymiarów są topologicznie równoważne. Inaczej mówiąc, jeśli dla równania różniczkowego zwyczajnego, opisującego układ o skończonej ilości stopni swobody, stwierdzimy stateczność rozwiązania na przykład $\xi = 0$ względem pewnej normy, to jest ono stateczne również względem dowolnej innej normy. Natomiast własność ta nie ma na ogół miejsca, w przypadku nieskończonej ilości współrzędnych stanu, co odgrywa zasadniczą rolę w sformułowaniu i badaniu stateczności rozwiązań równań o pochodnych cząstkowych, opisujących dynamikę ośrodków ciągłych. Proces opisujący zachowanie się ośrodka ciągłego, może być stateczny względem jednej normy, zaś względem innej niestateczny.

Drugą ważną okolicznością, którą trzeba brać pod uwagę przy badaniu stateczności jest fakt, że w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych opisujących układy dyskretne, wartości początkowe są liczbami, zaś istnienie i jednoznaczność rozwiązania są zależne tylko od regularności prawej strony $f(t, x)$ równania różniczkowego (1). W przypadku równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, opisujących ruch układów ciągłych, wartości początkowe są na ogół funkcjami. Istnienie i jednoznaczność oraz ograniczoność rozwiązań zależą wtedy nie tylko od regularności samego równania, lecz również od regularności funkcji przedstawiających wartości początkowe.

Rozważmy bliżej to zagadnienie na przykładzie równania liniowego typu hiperbolicznego drugiego rzędu, opisującego drgania poprzeczne struny lub podłużne pręta.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{28}$$

Niech warunki brzegowe mają postać

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{29}$$

Zakładamy, że warunki początkowe mają postać

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{30}$$

Stosując formalnie metodę rozdzielenia zmiennych, możemy rozwiązanie zagadnienia przedstawić w postaci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at\right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{31}$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe (29). Warunki początkowe przedstawiamy w postaci

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi}{l} x,$$

gdzie

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi, \qquad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi.$$

Na mocy (31) otrzymujemy

(32) $$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n.$$

Formalnie zbudowany szereg (31) przedstawia rozwiązanie zagadnienia (28)-(30), jeśli szereg ten jest jednostajnie zbieżny wraz z szeregami, które otrzymujemy przez dwukrotne różniczkowanie (31) względem x i t.

Ciągłość funkcji $u(x,t)$ wynika z jednostajnej zbieżności szeregu (31), którego ogólny wyraz jest funkcją ciągłą. Biorąc pod uwagę nierówność

$$|u_n(x,t)| \leqslant |A_n| + |B_n|$$

widzimy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|)$$

jest majorantą szeregu (31), której zbieżność zapewnia jednostajną zbieżność szeregu (31), to znaczy ciągłość $u(x,t)$. Analogicznie zbieżność jednostajna a więc i ciągłość pochodnych $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ wynika ze zbieżności majorant

$$\frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|).$$

Wobec tego dowód zbieżności szeregu przedstawiającego funkcję (31) i szeregów przedstawiających jej pochodne do rzędu drugiego włącznie, sprowadza się do dowodu zbieżności szeregów

(33) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, \qquad k = 0, 1, 2,$$

(34) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, \qquad k = -1, 0, 1,$$

Można udowodnić, że warunkiem wystarczającym zbieżności szeregów (33) jest, aby funkcja $\varphi(x)$ miała ciągłe pochodne do drugiego rzędu włącznie i trzecią pochodną odcinkami ciągłą oraz aby $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Dla zbieżności szeregów (34) wystarczy, aby funkcja $\psi(x)$ miała ciągłą pierwszą pochodną i drugą pochodną odcinkami ciągłą oraz aby $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Gdy wartości początkowe $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ nie spełniają wskazanych wyżej warunków, na przykład są one tylko ciągłe, wtedy $u(x, t)$ nie jest na ogół rozwiązaniem zagadnienia (28)—(30) w sensie klasycznym. W tym przypadku wprowadza się pojęcie rozwiązania uogólnionego w sensie Sobolewa, które dla pewnych chwil $t = t^*$ może przybrać charakter dystrybucji.

Z powyższych rozważań jest widoczne, że rozwiązanie równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, zależy od regularności wartości początkowych, co nie miało miejsca dla równań różniczkowych zwyczajnych. Ma to istotne znaczenie dla poprawnego sformułowania zagadnienia granicznego, zapewniającego ciągłą zależność rozwiązania od wartości początkowych oraz dla sformułowania stateczności rozwiązań w sensie Lapunowa w przypadku układów ciągłych, gdyż zagadnienia te bada się przy zaburzeniu wartości początkowych. Stąd jest widoczne, że bezpośrednie i bezkrytyczne przenoszenie pojęć, definicji i metod dla stateczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, na stateczność rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych, może doprowadzić do zasadniczych nieporozumień i niejasności.

Jednym z najważniejszych zagadnień, jest jak wynika to z dotychczasowych rozważań, ustalenie odległości między rozwiązaniami zaburzonymi i rozwiązaniami niezaburzonymi. Warunki nałożone na tę odległość, powinny zapewniać między innymi takie ograniczenie stanu w chwili początkowej, aby proces niezaburzony był stateczny, w sensie przyjętej odległości. Trzeba przy tym liczyć się z faktem, że dowolne zaburzenie nawet bardzo regularnego stanu początkowego, może po zaburzeniu doprowadzić do takich wartości, które generują rozwiązania uogólnione. Sprawa przyjęcia właściwej odległości, ma więc dla badania stateczności procesów ciągłych podstawowe znaczenie.

Rozważmy to zagadnienie bliżej, na przykładzie równania struny (28) z warunkami (29) i (30). Wprowadzamy odległość między procesami zaburzonymi $u(x, t)$ i procesem niezaburzonym $u = 0$ w postaci

$$\varrho = \sup_{x\in[0,l]} |u| + \sup_{x\in[0,l]} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|. \tag{35}$$

Ograniczenie ϱ w chwili $t = 0$, jest więc równoważne ograniczeniu wartości początkowych w tym sensie, że jeśli $\varrho|_{t=0}$ jest małe, to również małe jest wychylenie i prędkość punktów struny w chwili $t = 0$ i na odwrót. Tego rodzaju ograniczenie wartości początkowych, przyjmuje się dla badania stateczności w sensie Lapunowa rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i dla tych równań, ograniczenie to pociąga za sobą np. dla oscylacyjnego rozwiązania równania liniowego o stałych współczynnikach, ograniczenie wychyleń i prędkości w dowolnej chwili t. Takiej własności spodziewamy się na ogół, badając stateczność ruchu.

Pokażemy, że dla procesów ciągłych, ograniczenie wychyleń i prędkości początkowych, to znaczy odległości ϱ w chwili $t = 0$, nie pociąga za sobą na ogół ograniczoności wychyleń i prędkości w dowolnej chwili t. Przykład ten wskazuje wyraźnie, że przenoszenie pojęć i przyzwyczajeń ze stateczności równań różniczkowych zwyczajnych, może doprowadzić do niepowodzenia, w przypadku badania stateczności procesów ciągłych.

Na mocy (31) i (35) mamy

$$\varrho = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}at + B_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}a\left(-A_n\sin\frac{n\pi}{l}at + B_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\right|.$$

Dla $t = 0$ mamy

$$\varrho|_{t=0} = \left|\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}aB_n\right|. \tag{36}$$

Niech funkcje początkowe $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą takie, że

$$A_n = \frac{\varepsilon}{n^{3/2}}, \qquad \frac{n\pi}{l}aB_n = \frac{\varepsilon}{n^{3/2}}. \tag{37}$$

Wtedy szeregi w wyrażeniu (36) są zbieżne, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$. Stąd jest widoczne, że $\varrho|_{t=0}$ jest wielkością ograniczoną i zmierza do zera przy $\varepsilon \to 0$.

Jednakże ϱ nie jest wielkością ograniczoną, gdyż dla wartości $t = t^*$ dla których

$$\sin\frac{n\pi}{l}at^* = 1, \qquad \cos\frac{n\pi}{l}at^* = 0$$

mamy

$$\varrho|_{t=t^*} = \left|\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}aA_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l}{\pi a}\frac{\varepsilon}{n^{5/2}} + \frac{\pi a}{l}\frac{\varepsilon}{n^{1/2}}\right] = \infty. \tag{38}$$

Ten nieoczekiwany na pozór rezultat można wyjaśnić zarówno z matematycznego jak i fizycznego punktu widzenia.

Z matematycznego punktu widzenia, w równaniu (28), oprócz pochodnej względem t, występuje pochodna względem zmiennej przestrzennej x, co nie ma miejsca w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych. Natomiast odległość (35) nie nakłada żadnych ograniczeń, na pochodne względem zmiennej przestrzennej x. Wobec tego szeregi przedstawiające te pochodne, mogą okazać się rozbieżne przy pewnych wartościach t, jak to ma miejsce w przypadku rozwiązań uogólnionych.

Z fizycznego punktu widzenia ograniczenie wielkości u i $\frac{\partial u}{\partial t}$ dla $t = 0$, to znaczy ograniczenie początkowych wychyleń i prędkości punktów struny, zagwarantowanie ograniczeniem odległości w postaci (35), nie ogranicza jej początkowej energii potencjalnej, zależnej od pochodnej $\frac{\partial u}{\partial x}$. Energia potencjalna przekształca się podczas drgań struny w energię kinetyczną i może spowodować nieograniczony wzrost ϱ dla pewnych wartości $t = t^*$. Oczywiście nie dotyczy to struny rzeczywistej, lecz jest konsekwencją przyjętego modelu matematycznego mającego powyższe własności, które trzeba brać pod uwagę przy formułowaniu i badaniu stateczności.

W rozważanym przypadku energia potencjalna ma postać

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^l T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{39}$$

Na mocy (31) mamy

$$E_p = c\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)^2, \tag{40}$$

gdzie c oznacza stałą niezależną od n. Dla $t = 0$ mamy

$$E_p = c\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2. \tag{41}$$

Dla wartości A_n zgodnych z (37) otrzymujemy

$$E_p = \varepsilon^2 c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \tag{42}$$

Szereg ten jest rozbieżny dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, a więc energia potencjalna struny E_p ma w rozważanym przypadku dla $t = 0$ nieskończenie wielką wartość.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku rozwiązania klasycznego, ograniczenia dla wartości początkowych prowadzące do wzorów (37) nie mogą mieć miejsca i mają postać zapewniającą zbieżność szeregu (41). Zatem w przypadku klasycznym, energia potencjalna jest dla $t = 0$ ograniczona i ograniczoność przemieszczeń i prędkość w chwili początkowej, pociąga za sobą ograniczoność tych wielkości w dowolnej chwili t, względem przyjętej odległości.

4. Sformułowanie zagadnienia stateczności dla procesów ciągłych

Załóżmy, że układ ciągły jest opisywany modelem matematycznym, w którym wyróżniamy parametr t oznaczający czas. Takie założenie obejmuje te praktycznie interesujące przypadki, gdy zmiana stanu układu odbywa się z biegiem czasu. Niech rozważany model matematyczny ma postać równania

$$[F](u(P, t)) = 0, \tag{43}$$

gdzie $[F]$ oznacza dowolny liniowy, lub nieliniowy operator o pochodnych cząstkowych. Niech równanie (43) opisuje pewne zjawisko w obszarze ograniczonym Ω mającym brzeg Γ. Symbol P oznacza zbiór zmiennych przestrzennych.

Do równania (43) dołączamy warunki brzegowe, które przedstawiamy symbolicznie w postaci

$$u(P, t)|_{\Gamma} = 0 \tag{44}$$

oraz warunki początkowe, które przedstawiamy symbolicznie w postaci

$$u(P,0)=\psi(P). \tag{45}$$

Oznaczenia (44) i (45) mają charakter symboliczny dlatego, że mogą one symbolizować większą ilość warunków, w których mogą występować również pochodne.

Zakładamy, że równanie (43) ma przy zerowych wartościach początkowych rozwiązanie zerowe $u(P,t)=0$, które będziemy rozważać jako proces niezaburzony. Będziemy badali stateczność rozwiązania niezaburzonego, względem zaburzeń wartości początkowych, zakładając, że samo równanie (43), jak i warunki brzegowe (44) nie ulegają zmianie.

Odchylenie procesów zaburzonych od niezaburzonego będziemy mierzyli za pomocą odległości $\varrho=\varrho(u,t)$ spełniającej warunki

1) $\varrho(u,t)\geqslant 0$
2) $\varrho(0,t)=0$
3) dla dowolnego procesu $u(P,t)$ funkcja rzeczywista $\varrho(u(P,t),t)$ zmiennej t, jest ciągła względem t.

Należy zaznaczyć, że odległość $\varrho(u,t)$ nie musi spełniać aksjomatów odległości w przestrzeniach metrycznych.

Wraz z odległością $\varrho(u,t)$ wprowadzamy odległość $\varrho_p(u)$ na ogół różną od $\varrho|_{t=t_0}$, spełniającą warunki (1) i (2) dla $t=t_0$. Odległość ta nie zależy jawnie od czasu t i za pomocą tej odległości, będziemy ograniczali stan początkowy. Spośród wszystkich możliwych stanów początkowych odległość ϱ_p wyodrębnia tylko te, dla których pozostaje ona ograniczona.

Stosowanie różnych odległości ϱ_p oznacza, że proces idealny, niezaburzony $u=0$, może być poddany zaburzeniom początkowym różnego rodzaju, to znaczy o różnym stopniu regularności. Dla konkretnego obiektu (struna, belka, płyta itp.) rodzaj zaburzeń wynika z charakteru jego pracy i odległości ϱ i ϱ_p dla procesu opisującego matematycznie ten obiekt, powinny być wybierane na podstawie przesłanek fizycznych. Stosowanie odległości ϱ_p ograniczającej stan początkowy, pozwala na rozpatrywanie zaburzeń wartości początkowych o mniejszym stopniu regularności niż klasyczny, dopuszczającym również rozwiązania uogólnione.

Przy rozważaniu dwóch odległości ϱ i ϱ_p wprowadza się jeszcze jeden warunek dla odległości ϱ a mianowicie

4) odległość $\varrho(u,t)$ jest ciągła względem odległości $\varrho_p(u)$ dla $t=t_0$, to znaczy dla dowolnego $\varepsilon>0$ i $t=t_0$ istnieje takie $\eta(\varepsilon,t_0)>0$, że nierówność $\varrho_p(u)\leqslant\eta(\varepsilon,t_0)$ pociąga za sobą nierówność $\varrho(u,t)|_{t=t_0}\leqslant\varepsilon$. Nie zakładamy natomiast, że jest na odwrót, to znaczy odległość ϱ_p nie musi być ciągła względem odległości ϱ dla $t=t_0$. Weźmy na przykład

$$\varrho=\int_\Omega u^2 d\Omega,\qquad \varrho_p=\int_\Omega\left[u^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]d\Omega. \tag{46}$$

W tym przypadku, dla dowolnego $\varepsilon>0$ można zawsze znaleźć takie $\eta=\eta(\varepsilon)>0$, że jest $\varrho\leqslant\varepsilon$ jeśli tylko $\varrho_p\leqslant\eta(\varepsilon)$, na przykład $\eta(\varepsilon)=\varepsilon$. Natomiast z nierówności $\varrho\leqslant\eta(\varepsilon)$ nie wynika, że $\varrho_p\leqslant\varepsilon$.

Definicja: Niezaburzony proces ciągły $u = 0$ nazywamy statecznym w sensie Lapunowa względem dwóch odległości ϱ i ϱ_p w przedziale $[t_0, \infty)$ jeśli

1) wszystkie procesy $u(P, t)$ są określone w przedziale $[t_0, \infty)$
2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ takie, że dla dowolnego procesu $u(P, t)$ nierówność $\varrho_p \leqslant \eta(\varepsilon, t_0)$ pociąga za sobą nierówność $\varrho \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $t \geqslant t_0$.

Jeśli ponadto $\varrho \to 0$ przy $t \to \infty$, wtedy niezaburzony proces nazywamy asymptotycznie statecznym.

W szczególnym przypadku może być $\varrho_p = \varrho|_{t=t_0}$. Wtedy stan w chwili początkowej i dowolnej charakteryzują się tą samą odległością. Powiadamy wtedy, że stateczność badamy względem jednej odległości.

Definicję stateczności względem dwóch odległości dla procesu ciągłego podał Mowczan i z tego względu stateczność ta bywa nazywana statecznością w sensie Lapunowa-Mowczana.

Badanie stateczności w sensie Lapunowa, zarówno procesów dyskretnych jak i ciągłych można przeprowadzić, opierając się bezpośrednio na definicji, lecz udaje się to rzadko, dla bardzo prostych modeli matematycznych. W bardziej złożonych przypadkach, dogodniejsze jest stosowanie tak zwanej bezpośredniej metody Lapunowa.

Metoda bezpośrednia Lapunowa dla układów dyskretnych jest dobrze znana i opracowana. Z tego względu ograniczymy się do omówienia ogólnych aspektów tej metody dla procesów ciągłych.

Metoda bezpośrednia Lapunowa dla procesów ciągłych polega na wprowadzeniu funkcjonału $V(u, t)$, który dla dowolnej funkcji $u(P, t)$ i danej chwili czasu $t \geqslant t_0$ jest liczbą rzeczywistą. Odległości ϱ i ϱ_p są też funkcjonałami tego rodzaju. Funkcjonał V różni się od ϱ tym, że zmienia się on monotonicznie z biegiem czasu, zaś własność tę może mieć, lecz nie musi, funkcjonał ϱ. Jeśli do funkcjonału $V(u, t)$ podstawimy funkcję $u(P, t)$ przedstawiającą konkretny proces, to V staje się pewną funkcją czasu, którą oznaczamy przez $V = V(t)$. Analogicznie odległość $\varrho(u, t)$ dla pewnego procesu $u(P, t)$ oznaczamy przez $\varrho = \varrho(t)$.

W celu zbudowania podstaw bezpośredniej metody Lapunowa, trzeba wprowadzić pewne określenia dotyczące funkcjonału V, a mianowicie zdefiniować stałość i określoność co do znaku funkcjonału V względem odległości ϱ i ciągłość funkcjonału względem odległości ϱ_p dla $t = t_0$. Pomijając szczegółowe przedstawienie tych określeń, przejdziemy do twierdzenia, będącego podstawą bezpośredniej metody Lapunowa badania stateczności procesów ciągłych względem dwóch odległości.

Twierdzenie Lapunowa-Mowczana (o stateczności)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby proces niezaburzony $u(P, t) = 0$ był stateczny względem dwóch odległości ϱ i ϱ_p dla $t \geqslant t_0$ jest, aby istniał funkcjonał V

1) dodatnio określony względem odległości ϱ
2) ciągły względem odległości ϱ_p dla $t = t_0$
3) nie rosnący względem czasu, wzdłuż dowolnego procesu zaburzonego $u(P, t)$ dla $t \geqslant t_0$.

Jeśli ponadto jest $\lim\limits_{t\to\infty} V = 0$, to proces niezaburzony $u(P, t) = 0$ jest asymptotycznie stateczny.

Zwróćmy uwagę, na niektóre zagadnienia związane z badaniem stateczności procesów ciągłych metodą funkcjonałów Lapunowa. Jak już wiemy, do badania stateczności procesu $u = 0$ dogodnie jest stosować dwie odległości ϱ i ϱ_p. Wybór tych odległości w konkretnej postaci, zależy od różnych, często przeciwstawnych względów. Jeśli badamy stateczność w oparciu o twierdzenie Lapunowa-Mowczana, wtedy trzeba sprawdzić ciągłość funkcjonału V względem odległości początkowej ϱ_p dla $t = t_0$. Najprościej jest to uczynić, oszacowując funkcjonał Lapunowa V, przez odległość początkową ϱ_p dla $t = t_0$. Jednakże jeśli funkcjonał V ma złożoną postać, wtedy oszacowanie takie łatwiej otrzymać, gdy ϱ_p ma postać podobną do V, co nie zawsze jest dla nas odpowiednie, z punktu widzenia ograniczenia stanu początkowego. Jeśli można przeprowadzić badanie stateczności względem jednej odległości ϱ i $\varrho_p = \varrho|_{t=t_0}$ i zastosować funkcjonał V w tej samej postaci co odległość ϱ, wtedy sprawdzenie warunków z twierdzenia o stateczności znacznie się upraszcza, gdyż warunki (1) i (2) tego twierdzenia są wtedy automatycznie spełnione i pozostaje tylko sprawdzenie warunku (3). Z drugiej strony informacja zawarta w nierówności $\varrho \leqslant \varepsilon$ w przypadku gdy ϱ ma złożoną postać, może okazać się mało interesująca i nieczytelna z fizycznego punktu widzenia. Najbardziej interesujący praktycznie jest przypadek, gdy z nierówności $\varrho \leqslant \varepsilon$ można otrzymać nierówność $|u| \leqslant M(t, \varepsilon, P_0, t_0)$. Uzyskanie takiego rezultatu jest ułatwione gdy ϱ ma odpowiednią do tego celu postać, która nie koniecznie jest wtedy równie dogodna dla innych celów, wynikających ze stosowania twierdzenia o stateczności. Należy przy tym podkreślić, że rezultat taki można uzyskać tylko wtedy, gdy proces zależy od jednej zmiennej przestrzennej. Jest to związane z faktem, że ciągła zależność samego rozwiązania od wartości poczatkowych, nawet dla prostego liniowego równania o pochodnych cząstkowych typu hiperbolicznego drugiego rzędu, ma miejsce tylko w przypadku jednej zmiennej przestrzennej. Inaczej mówiąc, w przypadku jednej zmiennej przestrzennej, małe zmiany funkcji początkowych, pociągają za sobą małe zmiany samego rozwiązania, przy określonej regularności wartości początkowych. W przypadku dwóch lub większej ilości zmiennych przestrzennych, małe zmiany funkcji początkowych nawet o dużym stopniu regularności, pociągają za sobą co najwyżej małe zmiany całki z kwadratu rozwiązania, obliczonej w obszarze przestrzennym.

Wszystkie te zagadnienia są w istotny sposób związane z wyborem funkcjonału V i odległości ϱ i ϱ_p, którego dokonujemy dla zbadania stateczności procesu ciągłego niezaburzonego $u = 0$.

Analogicznie do przedstawionych tu rozważań, można sformułować teorię stateczności dla równań typu parabolicznego, opisujących zjawiska przewodnictwa cieplnego i dyfuzji, oraz dla równań typu eliptycznego, opisujących na przykład zjawiska równowagi sprężystej ciał stałych. Można stwierdzić, że najtrudniej poddają się badaniom równania typu hiperbolicznego, opisujące zjawiska dynamiczne w ciałach stałych.

Konstrukcję funkcjonałów Lapunowa dla procesów zachowawczych można na ogół zrealizować obierając całkowitą energię układu jako funkcjonał Lapunowa V. W przypadku procesów tłumionych, staramy się zmodyfikować odpowiednio postać całkowitej energii układu, aby wykazać, że $\dot{V} \leqslant 0$. Funkcjonały Lapunowa w takiej zmodyfikowanej postaci nazywamy całkami energetycznymi. Modyfikacja energii całkowitej układu, prowadząca do pewnego wariantu całki energetycznej, odbywa się często na drodze w znacznej mierze intuicyjnej. Dla liniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych i ich układów, opracowano również bardziej systematyczne metody poszukiwania funkcjonałów Lapunowa, w postaci całkowych form kwadratowych. Istnieją również nieliczne rezultaty, dotyczące zagadnień nieliniowych i poczyniono pierwsze kroki, dotyczące konstrukcji optymalnych funkcjonałów Lapunowa, zapewniających największy obszar parametrów, dla których rozwiązanie jest stateczne.

Dla równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, można wprowadzać również inne pojęcia stateczności, niż sformułowana poprzednio stateczność w sensie Lapunowa-Mowczana, związana z zaburzeniem wartości początkowych. Przede wszystkim można rozważać zaburzenia warunków brzegowych przy niezmiennych wartościach początkowych, lub też rozważać jednocześnie zaburzenia wartości początkowych i warunków brzegowych. Oprócz tych zaburzeń można rozważać dodatkowo zaburzenia samej postaci równania różniczkowego, co prowadzi do pojęcia stateczności przy stale działających zaburzeniach. Sformułowanie pojęć stateczności przy wymienionych zaburzeniach względem odległości w sensie Lapunowa-Mowczana nie nastręcza zasadniczych trudności, dlatego ścisłe ich zdefiniowanie pomijamy.

Spośród stateczności odmiennych od stateczności w sensie Lapunowa-Mowczana warto zwrócić uwagę na stateczność w sensie Lagrange'a. Model matematyczny przedstawiony równaniem o pochodnych cząstkowych liniowym lub nieliniowym jest stateczny w sensie Lagrange'a, gdy każde jego rozwiązanie jest określone dla $P \in \Omega$ i $t \in [t_0, \infty)$ oraz gdy spełniona jest następująca nierówność

$$\varrho(u(P,t)) \leqslant \Phi(c,t), \quad \Phi(c,t) > 0, \quad P \in \Omega, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{47}$$

gdzie stała $c = \text{const} > 0$ zależy tylko od obszaru zmienności warunków granicznych, zaś ϱ oznacza odległość. W szczególnym przypadku może być $\Phi(c,t) = M(c) = \text{const} > 0$. W sformułowaniu (47) funkcja $\Phi(c,t)$ jest dowolna, to znaczy wystarczy wykazać, że jakakolwiek funkcja Φ ograniczająca odległość ϱ istnieje, aby model matematyczny był stateczny w sensie Lagrange'a. Jednakże istnieje wiele problemów fizycznych i technicznych dla których trzeba podać warunki dostateczne przy których odległość ϱ jest ograniczona funkcją, lub stała, na które nałożone są dodatkowe warunki.

Warunki te polegają często na żądaniu efektywnego wyznaczania funkcji lub stałej ograniczającej i przy tym w taki sposób, aby istniała możliwość wpływania na ich wartości — na przykład poprzez dobór wartości początkowych, współczynników równania itp. Można dopuścić również funkcje $\Phi(c,t)$ rosnące, lecz w tym przypadku chcemy mieć informacje o prędkości jej wzrostu i możność wpływania na tę prędkość. W tym ostatnim przypadku, chodzi na przykład o to, aby układ regulacji, który zaczyna działać w chwili, gdy rozwiązanie przekroczy pewien określony poziom wartości, miał czas na sprowadzenie rozwiązania do nowych wartości wyjściowych. Tak sformułowane zagadnienie stateczności w sensie Lagrange'a, dla którego nakłada się dodatkowe ograniczenia i żądania na funkcję $\Phi(t, c)$ wynikające z przesłanek fizycznych, nosi nazwę zmodyfikowanej stateczności w sensie Lagrange'a.

Zagadnienie stateczności technicznej dla procesów ciągłych można sformułować następująco.

Niech będzie dane równanie w postaci

$$[F](u(P,t))+\alpha(P,t) = 0, \quad P \in \Omega, \quad t \in [t_0, T]. \tag{48}$$

Niech warunki brzegowe mają postać

$$u(P,t)+\beta(P,t)|_{\Gamma} = 0, \tag{49}$$

gdzie $\alpha(P,t)$, $\beta(P,t)$ są funkcjami zmiennych P i t. Funkcje $\alpha(P,t)$ i $\beta(P,t)$ przedstawiają stałe działające zaburzenia w obszarze Ω i na jego brzegu Γ.

Zakładamy, że równanie (48) ma dla zerowych wartości początkowych oraz $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ rozwiązanie zerowe $u = 0$, które będziemy rozważali jako proces niezaburzony. Pozostałe rozwiązania $u(P,t)$ są generowane przez różne wartości początkowe, które oznaczamy symbolicznie przez $u(P,t_0)$.

Stan początkowy i aktualny procesu będziemy charakteryzować za pomocą dwóch odległości $\varrho_p(u)$ i $\varrho(u,t)$. Stale działające zaburzenia będziemy charakteryzować za pomocą odległości $\varrho_\alpha(\alpha)$, $\varrho_\beta(\beta)$ określanych na zbiorze funkcji $\alpha(P,t)$, $\beta(P,t)$, $P \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$.

Niezaburzony proces $u = 0$ nazywamy statecznym technicznie przy stale działających zaburzeniach α i β i danych ograniczeniach $\bar{\varrho}$, $\bar{\varrho}_p$, $\bar{\varrho}_\alpha$ $\bar{\varrho}_\beta$ gdy dowolne rozwiązanie równania (48) spełnia nierówność

$$\varrho(u,t) \leqslant \bar{\varrho}, \quad t \in [t_0, T], \tag{50}$$

jeśli tylko

$$\varrho_p(u) \leqslant \bar{\varrho}_p, \quad \varrho_\alpha(\alpha) \leqslant \bar{\varrho}_\alpha, \quad \varrho_\beta(\beta) \leqslant \bar{\varrho}_\beta \tag{51}$$

dla dowolnych zaburzeń $\alpha(P,t)$, $\beta(P,t)$, dla których istnieje rozwiązanie rozważanego równania (48) odpowiadające wartościom początkowym $u(P,t_0)$. Wielkość $\bar{\varrho}_p$ jest stała, zaś $\bar{\varrho}$, $\bar{\varrho}_\alpha$, $\bar{\varrho}_\beta$ są na ogół funkcjami czasu. (w szczególnym przypadku mogą to być również stałe).

Dla modeli matematycznych procesów ciągłych formułuje się również zagadnienie wrażliwości strukturalno modelowej mające to samo znaczenie, jak omówione poprzednio dla równań różniczkowych zwyczajnych. Przypominamy, że chodzi tu o wrażliwość wybranej grupy własności jakościowych, lub cech ilościowych, na małe zaburzenia postaci modelu, czyli małe zmiany samego równania. Zilustrujemy to zagadnienie na przypadku szczególnym wrażliwości ilościowej rozwiązań prawie liniowego rówania struny, na zmiany współczynników części liniowej równania.

Rozważmy równanie poprzecznych drgań struny w postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\beta\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{52}$$

Niech warunki początkowe mają postać

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{53}$$

i niech warunki brzegowe mają postać

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{54}$$

Rozwiązanie równania (52) z warunkami (53) i (54) będziemy uważali za znane. Zagadnieniem, które chcemy zbadać, jest wrażliwość rozwiązań równania (52) na zmianę parametru c równego α lub β lub k. W tym celu wprowadzamy funkcję wrażliwości w postaci

$$\omega(x, t, c) = \lim_{\Delta c \to 0} \frac{u(x, t, c+\Delta c) - u(x, t, c)}{\Delta c} = \frac{\partial u}{\partial c}. \tag{55}$$

Na podstawie (55) mamy przybliżony związek

$$u(x, t, c+\Delta c) - u(x, t, c) \cong \omega(x, t, c)\Delta c. \tag{56}$$

Jeśli więc wyznaczymy lub oszacujemy funkcję $\omega(x, t, c)$, wtedy na podstawie wzoru (56) możemy w przybliżeniu wyznaczyć, lub oszacować zmianę funkcji $u(x, t, c)$ powstałą w wyniku zmiany parametru c o wartość Δc.

Wyprowadzimy równanie różniczkowe dla funkcji $\omega(x, t, c)$. Różniczkując równanie (52) względem $c = \alpha, \beta, k$ otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial \omega}{\partial t} + \alpha\omega = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\omega + \frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_t}\frac{\partial \omega}{\partial t} + H, \tag{57}$$

gdzie

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad H = \begin{cases} -u & \text{dla } c = \alpha \\ -2\dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{dla } c = \beta \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{dla } c = k \end{cases}. \tag{58}$$

Warunki początkowe i brzegowe dla funkcji ω mają postać

$$\begin{cases} \omega(x, 0, c) = \dfrac{\partial}{\partial c} u(x, 0, c) = \dfrac{\partial}{\partial c}\varphi(x) = 0, \\ \dfrac{\partial \omega(x, 0, c)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial c}\left[\dfrac{\partial u(x, 0, c)}{\partial t}\right] = \dfrac{\partial}{\partial c}\psi(x) = 0 \\ \omega(0, t, c) = \dfrac{\partial}{\partial c} u(0, t, c) = 0, \\ \omega(l, t, c) = \dfrac{\partial}{\partial c} u(l, t, c) = 0 \end{cases}. \tag{59}$$

Zagadnienie polega teraz na ścisłym, lub przybliżonym rozwiązaniu równania (57), lub zbadaniu własności jego rozwiązań, to znaczy na przykład ustalenia warunków dostatecznych ich ograniczoności i zmierzania do zera przy $t \to \infty$.

Wprowadzamy oznaczenia

$$2\lambda = \frac{\partial f}{\partial u_t}, \quad \sigma = \frac{\partial f}{\partial u_x}, \quad \nu = \frac{\partial f}{\partial u}. \tag{60}$$

Wtedy równanie wrażliwości możemy napisać w postaci

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+2(\beta-\lambda)\frac{\partial\omega}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\omega}{\partial x}+(\alpha-\nu)\omega = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+H. \tag{61}$$

Ponieważ rozwiązanie $u(x, t, c)$ traktujemy jako znane, więc funkcje (60) są znane. Równanie wrażliwości (61) jest więc równaniem liniowym o zmiennych współczynnikach. W przypadku liniowego równania struny $f = 0$, kładziemy w równaniu (61) $\lambda = \sigma = \nu = 0$ i otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach, wymuszone rozwiązaniem (lub jego pochodnymi), którego wrażliwość badamy.

W przedstawionych wyżej rozważaniach dokonany został przegląd pojęciowy najważniejszych pojęć stateczności ruchu, dla modeli matematycznych dyskretnych i ciągłych, z punktu widzenia potrzeb technicznych. Pominięte zostały mniej istotne warianty pojęć stateczności oraz całkowicie pominięto zagadnienia stateczności procesów losowych, wymagających osobnego opracowania. Dla wszystkich przedstawionych tu rodzajów stateczności istnieją mniej lub bardziej zaawansowane metody ich badania. Metody te są znacznie bardziej zaawansowane dla modeli dyskretnych, niż dla modeli ciągłych. Przedstawienie nawet pobieżnego przeglądu istniejących metod przekracza znacznie ramy niniejszego opracowania. Systematyczne zapoznanie się z metodami badania stateczności ruchu ośrodków dyskretnych i ciągłych, wymaga sięgnięcia do źródłowej literatury.

Literatura cytowna w tekście

1. С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики*, Гос. Изд. Тех. Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1950.
2. А. И. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Гос. Изд. Тех. Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1951.
3. А. А. Мовчан, *О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем*, Прикл. Мат. Мех., **23**, (1959).
4. А. А. Мовчан, *Устойчивость процессов по двум метрикам*, Прикл. Мат. Мех., **24**, (1960).
5. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Новосибирск 1962.
6. R. Tomowicz, *Sensitivity analysis of dynamic systems*, New York 1963, Mac Graw Hill.
7. А. А. Мовчан, *Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел*, Arch. Mech. Stos., 5, **15**, (1963).
8. Т. К. Сиразетдинов, *К теории устойчивости процессов с распределенными параметрами*, Прикл. Мат. Мех., **31**, (1967).
9. R. Gutowski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT 1971.
10. B. P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT 1972.
11. Р. Томович, М. Вукобратович, *Общая теория чувствительности*, Изд. Советское Радио, Москва 1972.
12. А. А. Мартынюк, *Техническая устойчивость в динамике*, Изд. „Техника", Киев 1973.
13. R. Gutowski. *Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений в частных производных описывающих движение механических систем в теории колебаний*, VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Band I, 1 Abhandlungen der AdW, Akademie Verlag, Berlin 1977.

14. R. GUTOWSKI, *Устойчивость колебаний гибкого шланга с учетом протекающей внутри жидкости*, Inst. of Thermomechanics, Proceedings of the XI-th Conference DYNAMICS OF MACHINES, Prague — Liblice, Czechoslovakia 1977.
15. B. RADZISZEWSKI, *O najlepszej funkcji Lapunowa i jej zastosowaniu do badania stateczności ruchu*, Prace IPPT, Warszawa 1977.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 29 marca 1968 r.

Referat wygłoszony na zjeździe z okazji XX lecia PTMTiS w Ustroniu.