

PRZEPŁYW LAMINARNY W KANAŁE O ZMIENNYM PRZEKROJU Z RUCHOMYMI I POROWATYMI ŚCIANKAMI

ANDRZEJ SZANIAWSKI, ANDRZEJ ZACHARA (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Przedmiotem pracy jest laminarny ustalony dwuwymiarowy przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w płaskim lub osiowo-symetrycznym kanale o zmiennym przekroju oraz o przepuszczalnych i rozciągalnych ściankach. Przepuszczalność ścianki opisana jest prawem określającym liniowy związek między prędkością filtracji a różnicą ciśnień po obu stronach ścianki. Rozciągalność ścianki powoduje, że jej prędkość może zmieniać się wzdłuż kanału w zadany sposób. Zmienność przekroju oraz przepuszczalność i rozciągalność ścianek są trzema efektami, których oddziaływanie na przepływ jest badane w niniejszej pracy. Ograniczymy się przy tym do przypadków, gdy przepuszczalność ścianki jest nieduża, zaś prędkość ścianki i szerokość symetrycznego kanału zmieniają się powoli. Ponadto w niniejszej pracy będziemy zakładać, że ciśnienie na zewnątrz kanału jest stałe i pole przepływu jest symetryczne względem osi kanału.

Określony w ten sposób problem nawiązuje do niektórych zagadnień dotyczących przepływów w kanałach o ściankach nieprzepuszczalnych [1—5] i porowatych [6—13], a także pompowania perystaltycznego [14] i teorii smarowania [1—4]. W większości prac na temat przepływów w kanałach o ściankach porowatych autorzy przyjmują jednorodny, z góry zadany, rozkład prędkości poprzecznej na ściance. Jedynie w artykule [12] i [13] prędkość ta została uzależniona od różnicy ciśnień po obu stronach ścianki, co jest zbieżne z założeniem przyjętym w niniejszej pracy.

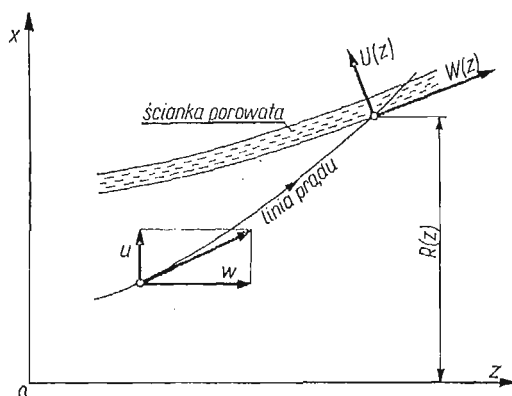
Nowym elementem wprowadzonym przez nas jest założenie rozciągalności ścianek, które ponadto mogą być porowate i które mogą ograniczać kanał o zmiennym przekroju. Takie sformułowanie problemu wynikło przy okazji badań nad zjawiskami hydromechanicznymi towarzyszącymi przedzeniu włókien chemicznych, gdzie wszystkie trzy wymieniane efekty stają się istotne.

Do wyznaczenia przepływu wewnątrz kanału wykorzystane zostanie założenie, że wielkościami niewielkimi, ale danymi są przepuszczalność oraz zmiany prędkości ścianki i szerokości kanału. Na tej zasadzie będziemy przyjmować, że przepływ wewnątrz kanału winien niewiele odbiegać od przepływu określonego lokalnie rozwiązaniem Poiseuille'a, w odniesieniu do którego zastosujemy metodę małych zaburzeń. Należy jednak zauważyć, że w przyjętym tu rozwiązaniu Poiseuille'a występuje nieznanym zmienny gradient ciśnienia, a znajomość rozkładu ciśnienia wzdłuż kanału jest niezbędna do wyznaczenia pozostałych parametrów przepływu. Podstawowym zadaniem będzie więc znalezienie rozkładu ciś-

nienia wzdłuż ścianki, następnie wyznaczmy główne człony dla pola prędkości, po znalezieniu których zajmiemy się również wyznaczeniem w liniowym przybliżeniu członów zaburzających wzdłużną składową prędkości i rozkład ciśnienia.

2. Równania i warunki brzegowe

Wprowadzamy prostokątny lub cylindryczny układ współrzędnych, którego oś z pokrywa się z osią symetrii kanału, a oś x jest do niej prostopadła (rys. 1). Składowe prędkości wzdłuż osi z i x oznaczmy symbolami w i u , a ciśnienie przez p . Połowa szerokości (lub promień) kanału określana jest jako $R(z)$, zaś symbole $W(z)$ i $U(z)$ oznaczają odpowiednio prędkość ścianki i prędkość przepływu filtracyjnego skierowanego prostopadle do ścianki.



Rys. 1. Schemat kanału o zmiennym przekroju, ze ściankami porowatymi i rozciągalnymi

Równania ruchu lepkiej cieczy nieściśliwej, o stałej gęstości ρ i o stałym kinematycznym współczynniku lepkości ν , napiszemy w postaci następującej:

$$(2.1) \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (u x^k) = 0,$$

$$(2.2) \quad w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot x^k \right) \right\},$$

$$(2.3) \quad w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot x^k) \right] \right\},$$

gdzie

$$(2.4) \quad k = \begin{cases} 0 & \text{dla układu prostokątnego,} \\ 1 & \text{dla układu cylindrycznego.} \end{cases}$$

Warunki brzegowe, które wynikają z symetrii przepływu oraz z ciągłości prędkości na ściance mają formę

$$(2.5a-d) \quad \begin{cases} u(0, z) = 0, \quad \frac{\partial w(0, z)}{\partial x} = 0, \\ u(R, z) = \frac{W(z)R'(z) + U(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}}, \\ w(R, z) = \frac{W(z) - U(z)R'(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}}. \end{cases}$$

Prędkość filtracji $U(z)$ przez ściankę kanału jest określona relacją wynikającą z warunku przepuszczalności

$$(2.6) \quad U(z) = K(z)P(z),$$

gdzie $K(z)$ jest współczynnikiem przepuszczalności, a

$$(2.7) \quad P(z) = \frac{1}{\mu} [p(R, z) - p_A],$$

jest wielkością związaną z różnicą ciśnień występującą po obu stronach ścianki ($\mu = \text{const}$ jest dynamicznym współczynnikiem lepkości, a $p_A = \text{const}$ jest zewnętrznym ciśnieniem atmosferycznym). W przypadku przepływu w kanałach nieprzepuszczalnych, za p_A podstawiać będziemy wybrane ciśnienie odniesienia. Zależność (2.6) wynika z liniowego prawa Darcy, w którym pochodną ciśnienia zastąpiono odpowiednim ilorazem różnicowym, przy czym współczynnik K uwzględnia zarówno własności filtracyjne ścianki jak i jej grubość.

Funkcje $R(z)$, $W(z)$ i $K(z)$, które określają geometrię, kinematykę i przepuszczalność ścianki są traktowane jako dane.

3. Linearyzacja i rozwiązanie równań ruchu

Ponieważ połowa szerokości (lub promień) kanału $R(z)$ i prędkość ścianki $W(z)$ winny się zmieniać powoli, a przepuszczalność ścianki winna być nieduża, będziemy poszukiwać rozwiązania naszego problemu w formie małego zaburzenia lokalnego przepływu Poiseuille'a

$$(3.1 \text{ a-c}) \quad w = w_p + \tilde{w}, \quad u = \tilde{u}, \quad p - p_A = \mu[P(z) + \tilde{p}],$$

gdzie

$$(3.2) \quad w_p = W(z) - R^2(z) P'(z) W_0(\xi)$$

jest rozwiązaniem Poiseuille'a o parabolicznym rozkładzie prędkości opisanym bezwymiarową funkcją (rys. 2)

$$(3.2a) \quad W_0 = \frac{1}{2^{k+1}} (1 - \xi^2), \quad \xi = x/R(z),$$

a symbolem (\sim) oznaczono małe zaburzenia przepływu głównego.

Zależność (3.2) jest formalnie identyczna z funkcją opisującą rozkład prędkości w kanale o stałej szerokości $2R$, ze ściankami nieprzepuszczalnymi poruszającymi się ze stałą prędkością W , przy stałym gradiencie ciśnienia $P'(z) = \text{const}$. W niniejszej pracy dopuszczamy zmienność wielkości R , W , P' z odległością z , ale zmienność na tyle słabą, aby $\tilde{w}(x, z)$, $\tilde{u}(x, z)$, $\tilde{p}(x, z)$ i ich pochodne były małe w porównaniu z odpowiednimi wielkościami w_p , p i ich pochodnymi z przepływu głównego. Zwiększenie rzędu małości daje również różniczkowanie względem z . Zajmiemy się jedynie wyznaczeniem najniższego, liniowego przybliżenia ze względu na tak określone małe zaburzenia lokalnego przepływu Poiseuille'a. Trzy czynniki zaburzające przepływ Poiseuille'a podane zostały w poniższym zestawieniu:

$$(3.3a) \quad K(z) \neq 0, \quad \text{przepuszczalność ścianek,}$$

$$(3.3b) \quad R'(z) \neq 0, \quad \text{zmiennosc\ ciekroju kana\u0142u,}$$

$$(3.3c) \quad W'(z) \neq 0, \quad \text{rozci\u0105galno\u015b\u0107 \u015bcianek.}$$

Wielko\u015b\u0107 $P(z)$ jest tymczasem nieznan\u0105.

Wprowadzaj\u0105c za\u0142o\u017con\u0105 post\u0105c rozwini\u0119\u0107 (3.1a - c) do r\u00f3wna\u0144 (2.1—3) i do warunk\u00f3w (2.5a - d), (2.7), oraz pozostawiaj\u0105c jedynie wyrazy najni\u017cszego rz\u0119du ze wzgl\u0119du na ma\u0142e zaburzenia, otrzymujemy nast\u0119puj\u0105cy uproszczony uk\u0142ad r\u00f3wna\u0144:

$$(3.4) \quad \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} x^k) = - \frac{\partial w_p}{\partial z},$$

$$(3.5) \quad \frac{\nu}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} x^k \right) = w_p \frac{\partial w_p}{\partial z} + \tilde{u} \frac{\partial w_p}{\partial x},$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} x^k) \right],$$

z jednym niejednorodnym

$$(3.7) \quad \tilde{u}(R, z) = W(z) \cdot R'(z) + KP,$$

i z czterema jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$(3.8a, b) \quad \tilde{u}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}(0, z)}{\partial x} = 0,$$

$$(3.8c, d) \quad \tilde{w}(R, z) = 0, \quad \tilde{p}(R, z) = 0.$$

Rozwi\u0105zanie r\u00f3wnania ci\u0105g\u0142o\u015bci (3.4) spe\u0142niaj\u0105ce warunek symetrii (3.8a) kt\u00f3re ma post\u0105c nast\u0119puj\u0105c\u0105:

$$(3.9) \quad \tilde{u} = - \frac{1}{2^k} \left\{ \left[W' - \frac{(P'R^2)'}{2^{k+1}} \right] \cdot x - \frac{P''}{2(k+3)} x^3 \right\},$$

mo\u017cna by\u0142o znale\u017c\u0107 niezale\u017anie od pozosta\u0142ych r\u00f3wna\u0144 i warunk\u00f3w.

Ze wzoru (3.9) w kombinacji z warunkiem brzegowym (3.7) uzyskujemy r\u00f3wnanie r\u00f3\u017cniczkowe zwyczajne, kt\u00f3re zawiera $P(z)$ jako funkcj\u0119 niewiadom\u0105

$$(3.10) \quad [P' R^{k+3}]' - (k+3) \cdot (4R)^k \cdot KP = 2^k \cdot (k+3)(W \cdot R^{k+1})'.$$

Za pomoc\u0105 r\u00f3wnania (3.10) mo\u017cna wz\u00f3r (3.9) sprowadzi\u0107 do postaci

$$(3.11) \quad \tilde{u} = \left(RW' - \frac{R^2 R' P'}{2^k} \right) \cdot U_1(\xi) + (WR' + KP) U_2(\xi),$$

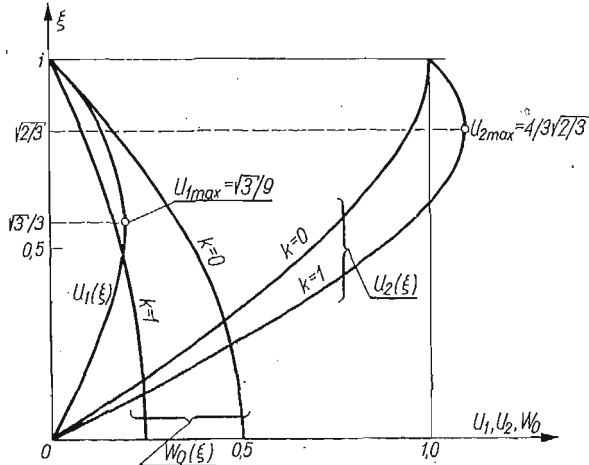
gdzie bezwymiarowe funkcje

$$(3.11a) \quad U_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(1-\xi^2),$$

$$(3.11b) \quad U_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi[(k+3) - (k+1)\xi^2],$$

okre\u015blaj\u0105 wzgl\u0119dny rozk\u0142ad sk\u0142adowej poprzecznej pr\u0119dko\u015bci $u = \tilde{u}$ w poprzek kana\u0142u pod wp\u0142ywem zmiany pr\u0119dko\u015bci ($W' \neq 0, R' = 0, K = 0$), b\u0105d\u017c te\u017c przepuszczalno\u015bci ($K \neq 0, W' = 0, R' = 0$) \u015bcianki (rys. 2). Zmiana przekroju ($R' \neq 0$) nieruchomego ka-

nału ($W = 0$) o nieprzepuszczalnej ścianie ($K = 0$) daje również rozkład opisany przez $U_1(\xi)$. Natomiast przy łącznym wpływie kilku czynników poprzeczne rozkłady prędkości \tilde{u} w różnych przekrojach nie muszą być do siebie podobne.



Rys. 2. Funkcje $W_0(\xi)$, $U_1(\xi)$, $U_2(\xi)$ występujące we wzorach (3.2) i (3.11)

Równanie (3.10) wymaga określenia dwóch warunków brzegowych, które należy dobrać w zależności od konkretnego rozpatrywanego przypadku. Rozwiązując równanie (3.10) uzyskujemy funkcję $P(z)$ opisującą w pierwszym przybliżeniu rozkład ciśnienia w kanale, pozwalający na podstawie wzorów (3.2) i (3.11) wyznaczyć główne składowe rozkładu prędkości $w_p(x, z)$ i $\tilde{u}(x, z)$.

Otrzymane w ten sposób rozkłady ciśnienia i prędkości można traktować jako podstawowe przybliżone rozwiązanie naszego problemu. Rozwiązanie to nie zależy w sposób jawny od liczby Reynoldsa. Będziemy je wykorzystywać do uproszczonego opisu przepływu, w szczególności do wyznaczania linii prądu.

Wydatek Q płynu przez pole $(\pi x)^k$ przekroju poprzecznego jest określony całką

$$(3.12) \quad Q = (2\pi)^k \int_0^x w(\bar{x}, z) \bar{x}^k d\bar{x} = \text{const.}$$

Podstawiając $w \approx w_p$ ze wzoru (3.2) i wykonując całkowanie otrzymujemy równanie linii prądu rozgraniczającej obszar stałego wydatku:

$$(3.13) \quad \frac{Q}{(\pi R)^k R} = W(z) \xi^{k+1} - R^2(z) P'(z) \frac{\xi^k U_2(\xi)}{(k+1)(k+3)}$$

Po znalezieniu głównych członów opisujących w przybliżeniu rozkład wzdłużny ciśnienia $p - p_A \approx \mu P(z)$ oraz pole prędkości $w \approx w_p$, $u \approx \tilde{u}$ przystąpimy do wyznaczenia pozostałych członów zaburzających przepływ typu Poiseuille'a, mianowicie do wyznaczenia \tilde{w} i \tilde{p} .

Podstawiając prędkość w_p (3.2) i \tilde{u} (3.11) do równań (3.5) i (3.6) oraz całkując te rów-

nania z uwzględnieniem warunków brzegowych (3.8b - d) znajdujemy poszukiwane człony zaburzące:

$$(3.14) \quad \tilde{w} = \frac{R}{\nu} \left\{ \left(RW' - \frac{R^2 R' P'}{2^k} \right) \left[W W_1(\xi) - \frac{R^2 P'}{2^{k+1}} W_2(\xi) \right] + \right. \\ \left. + (WR' + KP) \left[W \cdot W_3(\xi) - \frac{R^2 P'}{2^{k+1}} \cdot W(\xi) \right] \right\},$$

gdzie

$$(3.14a) \quad W_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi^2)^2,$$

$$(3.14b) \quad W_2 = \frac{1 - \xi^2}{36(3k+5)} \{ 11(k+3) - \xi^2 [4(4k+3) - (5k+3)\xi^2] \},$$

$$(3.14c) \quad W_3 = \frac{1}{8} (1 - \xi^2) [(k+5) - (k+1)\xi^2],$$

$$(3.14d) \quad W_4 = \frac{1 - \xi^2}{12(k+5)} [2(6k+23) - \xi^2 [(15k-1) - (3k+1)\xi^2]],$$

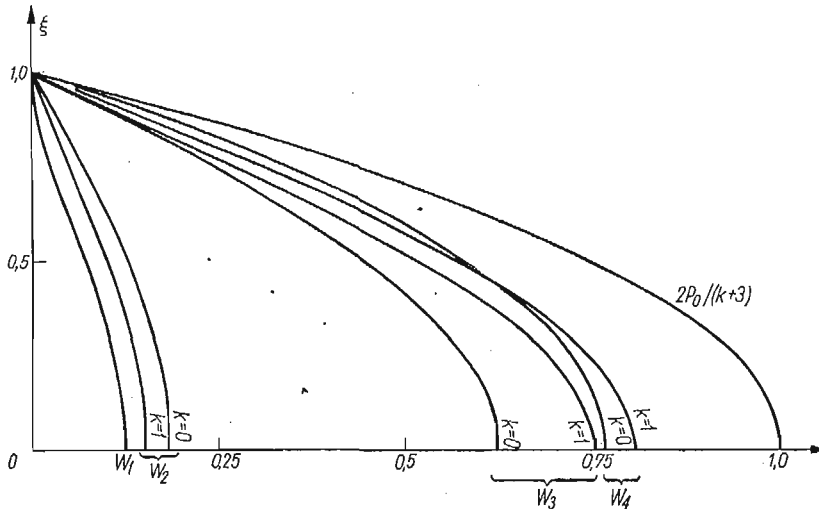
oraz

$$(3.15) \quad \tilde{p} = \frac{1}{R} \left[\left(RW' - \frac{R^2 R' P'}{2^k} \right) + 2^k (WR' + KP) \right] P_0(\xi),$$

gdzie

$$(3.15a) \quad P_0(\xi) = \frac{k+3}{2} (1 - \xi^2).$$

Wykresy funkcji $W_1(\xi)$, $W_2(\xi)$, $W_3(\xi)$, $W_4(\xi)$ oraz $P_0(\xi)$ przedstawione zostały na rys. 3.



Rys. 3. Funkcje $W_1(\xi)$, $W_2(\xi)$, $W_3(\xi)$, $W_4(\xi)$, i $P_0(\xi)$ występujące we wzorach (3.14) i (3.15)

4. Przykłady

Uzyskane wyniki zilustrujemy kilkoma przykładami, w każdym z których uwzględniony będzie wpływ tylko jednego z trzech czynników (3.3) zaburzających przepływ Poiseuille'a. Wszystkie przykłady odnosić się będą do przypadku osiowo-symetrycznego ($k = 1$), o dodatkowej symetrii względem płaszczyzny $z = 0$.

W przykładach tych, dla równania (3.10) przybierającego postać

$$(4.0.1) \quad (P'R^4)' - 16RKP = 8 \cdot (WR^2)',$$

dwa warunki brzegowe dla funkcji $P(z)$ dane będą w punkcie $z = 0$.

Definiujemy bezwymiarową funkcję $\Pi(\zeta)$ jako

$$(4.0.2) \quad \Pi(\zeta) = \frac{P(z)}{\bar{P}}, \quad \zeta = \alpha \frac{z}{R}, \quad \alpha \ll 1,$$

za pomocą ciśnienia odniesienia \bar{P} i małego parametru α , które zostaną określone dalej, oddzielnie dla każdego przykładu. Mały parametr α pojawił się w definicji bezwymiarowej współrzędnej ζ , ze względu na dowolną zmienność parametrów przepływu w kierunku z . Wprowadzając ponadto wielkości odniesienia:

$$(4.0.3a - c) \quad \bar{R} = R(0), \quad \bar{K} = \frac{\bar{R}\alpha^2}{16}, \quad \bar{W} = \frac{\bar{P}\bar{R}\alpha}{8}$$

oraz bezwymiarowe funkcje

$$(4.0.4a - c) \quad \hat{R}(\zeta) = \frac{R}{\bar{R}}, \quad \hat{K}(\zeta) = \frac{K}{\bar{K}}, \quad \hat{W}(\zeta) = \frac{W}{\bar{W}},$$

przekształcamy równanie (4.0.1) do następującej postaci

$$(4.0.5) \quad (\Pi' \hat{R}^4)' - \hat{K} \hat{R} \Pi = (\hat{W} \hat{R}^2)'$$

Linie prądu będziemy opisywać stosując bezwymiarowy wydatek

$$(4.0.6) \quad \hat{Q}(\xi, \zeta) = \frac{Q}{\bar{W} \cdot \pi \bar{R}^2}.$$

Dla każdego z przykładów przedstawimy kolejno składowe prędkości w_p i \tilde{u} , równanie linii prądu $\hat{Q}(\xi, \zeta) = \text{const}$ oraz perturbacje składowej podłużnej prędkości i ciśnienia \tilde{w} i \tilde{p} , obliczane odpowiednio ze wzorów (3.2), (3.11), (3.13), (3.14) i (3.15).

4.1. Przepływ przez nieruchomą, cylindryczną rurę porowatą o stałym współczynniku przepuszczalności. Wprowadzając

$$(4.1.1) \quad \alpha = 4 \cdot \sqrt{\frac{\bar{K}}{\bar{R}}},$$

otrzymujemy $\hat{K} = 1$, a ponieważ z założenia $\hat{R} = 1$ oraz $\hat{W} = 0$, równanie (4.0.5) przyjmuje postać

$$(4.1.2) \quad \Pi'' - \Pi = 0.$$

Równanie to rozwiążemy dla dwóch szczególnych przypadków:

a) W przekroju $z = 0$ ciśnienia po obu stronach ścianki rury są jednakowe $P(0) = 0$, a główny przepływ odbywa się w kierunku osi z pod wpływem gradientu ciśnienia o stałym znaku. Wartość gradientu $P'(0)$ w płaszczyźnie $z = 0$, jest dana.

Definiując ciśnienie odniesienia jako

$$(4.1.3a) \quad \bar{P} = P'(0) \frac{R}{\alpha}$$

przedstawimy warunki brzegowe w postaci

$$(4.1.4a) \quad II(0) = 0, II'(0) = 1,$$

a spełniające je rozwiązanie równania (4.1.2) wyraża się wzorem

$$(4.1.5a) \quad II(\zeta) = \text{sh} \zeta.$$

b) W przekroju $z = 0$ rury porowatej panuje dane ciśnienie różne od zewnętrznego ($P(0) \neq 0$), a rozkład ciśnień jest symetryczny względem tego przekroju ($P'(0) = 0$).

Przyjmując wielkość odniesienia:

$$(4.1.3b) \quad \bar{P} = P(0)$$

i formułując warunki brzegowe,

$$(4.1.4b) \quad II(0) = 1, \quad II'(0) = 0,$$

otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (4.1.2):

$$(4.1.5b) \quad II(\zeta) = \text{ch} \zeta.$$

A oto pozostałe parametry przepływu, łącznie dla obu przypadków, z tym że funkcje ζ podane w górnej frakcji nawiasu klamrowego odnoszą się do przypadku (a), zaś w dolnej do przypadku (b).

$$(4.1.6) \quad \frac{w_p}{W} = -8W_0(\xi) \begin{cases} \text{ch} \zeta \\ \text{sh} \zeta \end{cases},$$

$$(4.1.7) \quad \frac{\tilde{u}}{W} = \frac{1}{2} \alpha U_2(\xi) \begin{cases} \text{sh} \zeta \\ \text{ch} \zeta \end{cases},$$

$$(4.1.8) \quad \hat{Q} = \xi^2(2 - \xi^2) \begin{cases} \text{ch} \zeta \\ \text{sh} \zeta \end{cases} = \text{const},$$

$$(4.1.9) \quad \frac{\tilde{p}}{P} = \frac{\alpha^2}{8} P_0(\xi) \begin{cases} \text{sh} \zeta \\ \text{ch} \zeta \end{cases},$$

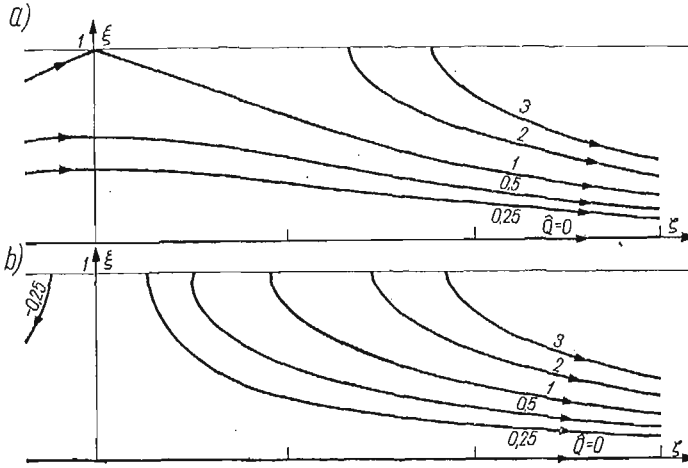
$$(4.1.10) \quad \frac{\tilde{w}}{W} = -\frac{1}{2} \alpha \text{Re} W_4(\xi) \text{sh} 2\zeta,$$

gdzie Re jest charakterystyczną liczbą Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}R}{\nu} = \frac{R^2}{8\nu} \begin{cases} P'(0)R \\ \alpha P(0) \end{cases}.$$

Obraz linii prądu, opisany równaniem (4.1.8), przedstawiony został dla obu przypadków odpowiednio na rys. 4.1a i b. W przypadku (a), panujące po lewej stronie od przekroju $z = 0$ nadciśnienie powoduje wytłaczanie płynu z rury przez ściankę na zewnątrz, natomiast podciśnienie występujące przy $\xi > 0$, wywołuje zasysanie płynu z otoczenia do wnętrza rury.

W przypadku (b), wydatek płynu przez płaszczyznę symetrii $z = 0$, znika. Jeśli $P(0) < 0$, to różnica ciśnień po obu stronach porowatej ścianki jest na całej długości rury ujemna, co powoduje zasysanie płynu z otoczenia do wnętrza rury. Gdy $P(0) > 0$ to obraz przepływu jest podobny, z tą różnicą, że zwroty prędkości zmieniają się na przeciwne.



Rys. 4.1. Przepływ przez nieruchomą porowatą rurę o stałej średnicy, $\hat{K} = 1$, $\hat{R} = 1$, $\hat{W} = 0$

4.2. Przepływ przez kanał zbieżno-rozbieżny o zadanym kształcie, ze ściankami nieprzepuszczalnymi i nieruchomymi. Rozpatrzmy przepływ z danym wydatkiem Q_0 przez kanał o kształcie określonym wzorem

$$(4.2.1) \quad \hat{R} = (1 + \xi^2)^{1/4}.$$

W przypadku tym mały parametr α (4.0.2) charakteryzuje powolność zmian przekroju poprzecznego. Wprowadzając promień krzywizny ϱ_k konturu kanału w punkcie $z = 0$, możemy określić

$$\alpha^2 = 2\bar{R}/\varrho_k.$$

Równanie (4.0.5) przybiera wówczas postać

$$(4.2.2) \quad [II'(1 + \xi^2)]' = 0.$$

Przyjmując za p_A wartość ciśnienia w gardzieli kanału $p_A = p(0)$, oraz wprowadzając ciśnienie odniesienia

$$(4.2.3) \quad \bar{P} = \frac{8Q_0}{\pi\bar{R}^3\alpha},$$

przedstawimy warunki brzegowe w postaci

$$(4.2.4) \quad II(0) = 0, \quad II'(0) = -1.$$

Spełniające je rozwiązanie równania (4.2.2) ma postać

$$(4.2.5) \quad II = -\operatorname{arctg} \xi,$$

a pozostałe parametry przepływu przedstawiają się następująco:

$$(4.2.6) \quad \frac{w_p}{\bar{W}} = 8 \frac{W_0(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

$$(4.2.7) \quad \frac{\tilde{u}}{\bar{W}} = 2U_1(\xi) \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{5/4}},$$

$$(4.2.8) \quad \hat{Q} = \xi^2(2-\xi^2) = \text{const},$$

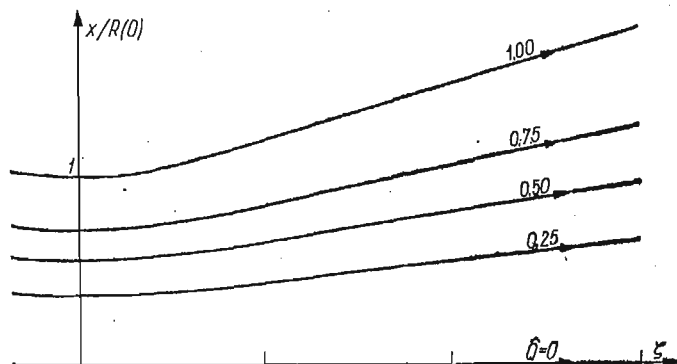
$$(4.2.9) \quad \frac{\tilde{p}}{\bar{P}} = \frac{1}{4} \alpha^2 P_0(\xi) \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}},$$

$$(4.2.10) \quad \frac{\tilde{w}}{\bar{W}} = 4\alpha \text{Re} W_2(\xi) \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}},$$

gdzie Re jest liczbą Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}R}{\nu} = \frac{Q_0}{\pi\nu R}.$$

Rozkład linii prądu, określony przez (4.2.8) przedstawiony został na rys. 4.2. Należy zwrócić uwagę na monotoniczny rozkład ciśnienia (4.2.5), który realizuje się mimo zbieżno-rozbieżnego kształtu kanału. Taki charakter rozkładu ciśnienia możliwy jest w warunkach przyjętego w niniejszej pracy przybliżenia, przy założeniu szczególnego kształtu kanału opisanego wzorem (4.2.1).



Rys. 4.2. Przepływ przez kanał zbieżno-rozbieżny o ścianie nieruchomej i nieprzepuszczalnej $R = (1+\xi^2)^{1/4}$, $\hat{K} = \hat{W} = 0$.

4.3. Przepływ przez cylindryczną rurę nieprzepuszczalną o rozciąganej ścianie. Rozważmy cylindryczną rurę, unieruchomioną w przekroju $z = 0$ i rozciąganą symetrycznie w obu kierunkach. Ograniczymy się do rozpatrywania dodatniej strony osi z przyjmując, że dla $z \geq 0$ prędkość ścianki zmienia się według wzoru

$$(4.3.1) \quad W = \bar{W}(1 - e^{-\xi}).$$

Mały parametr α charakteryzuje tu powolność narastania prędkości. Wprowadzając $\hat{K} = 0$, $\hat{R} = 1$, sprowadzamy równanie (4.0.5) do postaci

$$(4.3.2) \quad \Pi'' = e^{-\xi},$$

przy czym ciśnienie odniesienia, na podstawie wzoru (4.0.3c) wynosi

$$(4.3.3) \quad \bar{P} = \frac{8\bar{W}}{\alpha \cdot R}.$$

Rozwiązanie równania (4.3.2) przy wynikających z symetrii przepływu warunkach brzegowych:

$$(4.3.4) \quad \Pi(0) = 0, \quad \Pi'(0) = 0,$$

wyraża się wzorem

$$(4.3.5) \quad \Pi = e^{-\xi} + \xi - 1,$$

a pozostałe parametry przepływu mają postać

$$(4.3.6) \quad \frac{w_p}{\bar{W}} = (2\xi^2 - 1)(1 - e^{-\xi}),$$

$$(4.3.7) \quad \frac{\tilde{u}}{\bar{W}} = \alpha U_1(\xi)e^{-\xi},$$

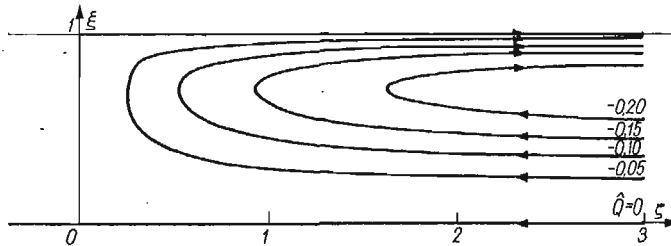
$$(4.3.8) \quad \hat{Q} = -\xi^2(1 - \xi^2)(1 - e^{-\xi}) = \text{const},$$

$$(4.3.9) \quad \frac{\tilde{p}}{\bar{P}} = \frac{\alpha^2}{8} P_0(\xi)e^{-\xi},$$

$$(4.3.10) \quad \frac{\tilde{w}}{\bar{W}} = \alpha \text{Re}[W_1(\xi) - 2W_2(\xi)](1 - e^{-\xi})e^{-\xi},$$

gdzie

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}R}{\nu}.$$



Rys. 4.3. Przepływ przez rurę o nieprzepuszczalnej, rozciąganej ścianie, $\hat{K} = 0$, $\hat{R} = 1$, $\hat{W} = 1 - e^{-\xi}$

Obraz linii prądu wyznaczony na podstawie (4.3.8) przedstawiony został na rys. 4.3. Płyn znajdujący się w okolicy ścianki porusza się w kierunku zgodnym z jej ruchem, a płyn w okolicy osi rury w kierunku przeciwnym, co powoduje przepływ cyrkulacyjny. Obszar cyrkulacji kurczy się w miarę oddalania od płaszczyzny $z = 0$ i w granicy istnieje wyłącznie przepływ równoległy, z linią prądu $\hat{Q} = -0,25$, oddzielającą dodatnie i ujemne kierunki prędkości.

5. Uwagi końcowe

Wskutek poczynionych założeń upraszczających zakres stosowalności podanej metody jest ograniczony do przypadków, w których zdefiniowane w rozdz. 3 zaburzenia \tilde{u} , \tilde{w} , \tilde{p} są małe w stosunku do odpowiednich wielkości z przepływu Poiseuille'a przyjętego jako przepływ główny. Opis przepływu przy pomocy składowych prędkości w_p (3.2) i \tilde{u} (3.11)

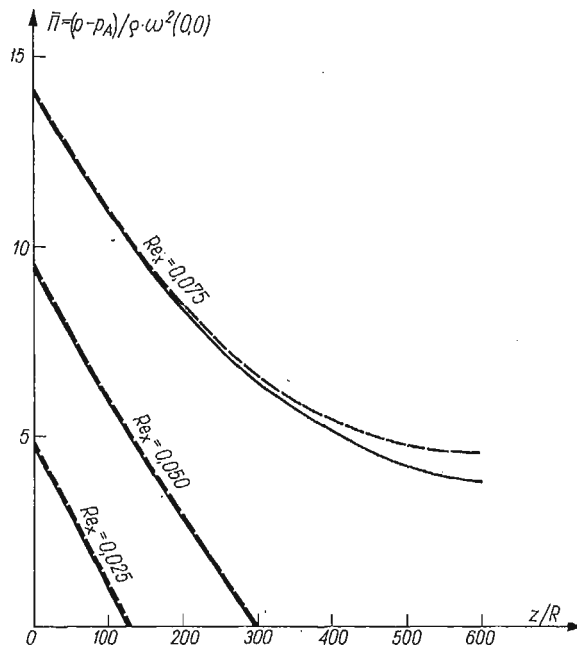
z wykorzystaniem funkcji $P(z)$ wraz z poprawką \tilde{p} (3.15) mieści się w ramach przybliżenia Stokesa, odpowiadającego pominięciu członu bezwładnościowego w równaniu pędu. Uwzględnienie w uproszczony sposób pominiętego członu obejmuje jedynie poprawka \tilde{w} (3.14).

We wzorach (4.1—3.7), (4.1—3.9), (4.1—3.10) przedstawiających \tilde{u} , \tilde{p} , \tilde{w} występuje bezwymiarowy parametr α wyrażający, odpowiedni dla konkretnego przypadku, czynnik zaburzający, którym może być przepuszczalność bądź rozciągłość ścianek oraz zmienność przekroju kanału. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach struktura wzorów jest podobna, zgodnie z którą mamy

$$(5.1a - c) \quad \tilde{u} \sim \alpha, \quad \tilde{p} \sim \alpha^2, \quad \tilde{w} \sim \alpha \cdot \text{Re}.$$

Wynika stąd nie tylko ograniczenie dla parametru α , lecz także dla iloczynu $\alpha \cdot \text{Re}$, gdzie $\text{Re} = \bar{W}R/\nu$ jest charakterystyczną liczbą Reynoldsa przepływu podłużnego, przy czym ze względu na (5.1a) możemy iloczyn ten interpretować jako liczbę Reynoldsa przepływu poprzecznego $\text{Re}_x = \alpha \cdot \text{Re}$. Należy zwrócić uwagę, że małość iloczynu $\alpha \cdot \text{Re}$ nie ogranicza stosowalności modelu do małych liczb Reynoldsa, o ile nie zostanie przekroczony zakres stabilności przepływu laminarnego, nie rozpatrywany w niniejszej pracy. Widzimy też, że zaburzenie ciśnienia \tilde{p} jest małą wyższego rzędu w stosunku do pozostałych zaburzeń i w obecnym przybliżeniu może być pominięte. W przedstawionych w rozdz. 4 przykładach wymienione ograniczenia były na ogół spełnione, poza niektórymi obszarami o charakterze lokalnym.

Określenie zakresu stosowalności przedstawionych wyników nie było celem niniejszej pracy, dlatego nie podajemy tu szczegółowych szacowań, które z konieczności musiałyby



Rys. 5. Porównanie obecnego modelu z modelem [12]. — obecny model, - - - model Galowina i De Santisa [12], $R/K = 1.9 \cdot 10^6$

być zawężone do rozpatrywanych przykładów. Podamy natomiast porównanie naszych wyników, z wynikami modelu Galowina i De Santisa [12], o wyższej dokładności niż obecna metoda, gdyż uwzględniony był w nim człon bezwładnościowy równania pędu. Porównanie dotyczy przepływu przez rurę porowatą o danym stałym współczynniku przepuszczalności $R/K = 1.9 \cdot 10^6$. W przekroju początkowym $z = 0$ dane były dla bezwymiarowego ciśnienia zdefiniowanego w [12] jako $\bar{P} = (p - p_A)/\rho \cdot w_p^2(0, 0)$ dwa warunki brzegowe: wartość ciśnienia $\bar{P}(0) > 0$ oraz gradient ciśnienia $\bar{P}'(0) = -4 \cdot 10^{-2}$. Obliczenia obejmowały trzy przypadki odpowiadające różnym wartościom ciśnienia początkowego, z czym wiązały się różne liczby Reynoldsa $Re_x = \bar{u}(R, 0)R/\nu$. Wyniki tych obliczeń przedstawione zostały na rys. 5, wraz z wynikami uzyskanymi na podstawie obecnego modelu, przy czym wykorzystano tu rozwiązanie (4.1.5a i b), w których dokonano jedynie odpowiedniej transformacji zmiennych.

Można stwierdzić dobrą zgodność między wynikami obu modeli, a drobne rozbieżności występują jedynie przy największej liczbie Reynoldsa $Re_x = 0.075$. W zakresie liczb Reynoldsa rozpatrywanych w powyższym przykładzie nasz model daje większe korzyści, gdyż pozwala na otrzymanie wyników przy pomocy prostych kwadratur, bez całkowania numerycznego, niezbędnego w przypadku modelu [12]. Natomiast w podobnych przypadkach przepływów przez rury porowate, lecz z większymi liczbami Reynoldsa, rozpatrywanych np. w [13], gdy skutek efektów dynamicznych ciśnienie statyczne rośnie w kierunku przepływu, model ten dałby wyniki niepoprawne nawet jakościowo. To samo dotyczy przepływów w kanałach rozbieżnych przy większych liczbach Reynoldsa i wszelkich innych przypadków, gdy nie są spełniane warunki małości α i αRe . W takich przypadkach należy stosować metody o wyższym rzędzie dokładności, jak np. [5], [13] lub jeszcze dokładniejsze.

Literatura cytowana w tekście

1. G. K. BATCHELOR, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge 1970.
2. W. E. LANGLOIS, *Slow Viscous Flow*, Macmillan C., New York 1964.
3. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall 1965.
4. Н. А. СЛЁЗКИН, *Динамика вязкой несжимаемой жидкости*, Москва 1955.
5. M. J. MANTON, *Low Reynolds Number Flow in Slowly Varying. Axisymmetric Tubes*, J. Fl. Mech, 3, 49, (1971).
6. A. BERMAN, *Laminar Flow in Channels with Porous Walls*, J. Appl. Phys. 9, 24 (1953).
7. R. M. TERRIL, *Laminar Flow in a Uniformly Porous Channel*, Aeron. Quart., 3, 15, (1964).
8. R. W. HORNBECK, W. T. ROULEAU, F. OSTERLE, *Laminar Entry Problem in Porous Tubes*, Phys. Fluids, 11, 6 (1963).
9. H. L. WEISSBERG, *Laminar Flow in The Entrance Region of a Porous Pipe*, Phys. Fluids, 5, 2 (1959).
10. J. P. HUANG, H. S. YU., *Pressure Distributions in Porous Ducts of Arbitrary Cross Section*, J. Fluid Eng. (Trans. ASME), 3, 95, I (1973).
11. B. K. GUPTA, E. K. LEVY, *Symmetrical Laminar Channel Flow with Wall Suction*, J. Fluid Eng. (Trans. ASME), 3, 98, I (1976).
12. L. S. GALOWIN, M. J. De SANTIS, *Theoretical Analysis of Laminar Pipe Flow in a Porous Wall Cylinder*, Journal of Dynamics Syst. Measur. and Control (Trans. ASME), 2, 93, G (1971).
13. L. S. GALOWIN, L. S. FLETCHER, M. J. De SANTIS, *Investigation of Laminar Flow in a Porous Pipe with Variable Wall Suction*, AIAA J., 11, 12 (1974).
14. M. Y. JAFFRIN, A. H. SHAPIRO, *Peristaltic Pumping*, An. Rev. Fl. Mech., 3 (1971).

Резюме

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ И С ПОДВИЖНЫМИ И ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Течение в канале предположено в виде мало возмущенного течения Пуазейла, так что уравнения Навье-Стокса можно линеаризовать относительно малых возмущений. Решения для параметров течения получены в аналитическом виде, содержащем неизвестную функцию давления, которая является решением некоторого линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Это уравнение было решено для некоторых простейших случаев граничных условий, причём в каждом из них учитывался только один из трёх возмущающих эффектов, названных в заглавии этой работы. Таким образом можно было найти распределения давления и скоростей для главного течения и его возмущений. Обращается внимание на некоторые ограничения представленной модели, возникающие из её приблизительного характера.

Summary

LAMINAR FLOW IN A CHANNEL OF A VARIABLE CROSS-SECTION WITH MOVABLE AND POROUS WALLS

The problem is considered as a slightly disturbed Poiseuille flow, so the Navier-Stokes equations can be linearized with respect to small perturbations. The solution is obtained in an analytical form, containing an unknown pressure function which can be found from the ordinary linear differential equation derived here. The equation has been solved for some simple axisymmetric flows, each of them being influenced by only one of the three disturbance effects mentioned in the head of this paper. In this way pressure and velocity disturbance for the main flow and its perturbations has been obtained. Some remarks on the limitations of the method presented have also been included.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 listopada 1977 r.
