MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 16 (1978)

O SUMOWANIU PEWNYCH SZEREGÓW DINIEGO I TRYGONOMETRYCZNYCH POJAWIAJĄCYCH SIĘ W ZAGADNIENIACH MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

KRZYSZTOF GRYSA, JANUSZ JANKOWSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

Jednym z podstawowych problemów, pojawiających się przy rozważaniu zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych (a także i innych dziedzin nauki), jest interpretacja fizyczna wyników mających postać wielokrotnych całek lub szeregów. W szczególności przy rozważaniach dotyczących termosprężystości czy termodyfuzji otrzymuje się często rozwiązania w postaci szeregów typu Fouriera-Bessela, Diniego [1], lub trygonometrycznych (por. np. [5, 7, 8] i in.).

Wydaje się, że najogólniejsze, z przedstawionych dotychczas w literaturze, podejście do problemów sumowalności szeregów Fouriera-Bessela i Diniego przedstawiono w pracy [2]. W pracy tej wyznaczono sumy szeregów Fouriera-Bessela

$$\sum_{i=l}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^{s} J_{n+k}(\mu_{ni}x) J_{n+l}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{nj}^2 \pm a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} \tag{1.1}$$

oraz Diniego

$$\sum_{j=l}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^{2+s} J_{n+k}(\lambda_{nj}x) J_{n+l}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 \pm a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} \tag{1.2}$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots; s, k, l = 0, 1$; μ_{ni} — i-te miejsce zerowe funkcji Bessela $J_n(z)$; λ_{nj} — j-te miejsce zerowe funkcji $f_n(\lambda) = \lambda J_n'(\lambda) + HJ_n(\lambda)$; $i, j = 1, 2, \ldots$; H, a — dowolne stałe $(a \neq 0)$; $x, y \in (0, 1)$.

Wzory przedstawione w cytowanej pracy są prawdziwe również dla każdego n rzeczywistego większego od $-0{,}5$ (porównaj tok rozumowania w pracy [2] z odpowiednimi związkami zawartymi w monografiach [1, 6]). Pewne szczególne przypadki tych wzorów można znaleźć w innych pracach. Należy tu wymienić szczególnie dwie publikacje, których uogólnienie stanowi praca [2]. Są to prace WOELKEGO [3] i GRYSY [4]. W pierwszej podano sumy szeregów typu (1.1) dla $n = 0$; w drugiej uogólniono wyniki pierwszej pracy na dowolne n naturalne.

W obecnej pracy wyznaczono wzory sumacyjne dla szeregów Diniego w przypadku, gdy $H > 0$. Ponadto wykorzystano wyniki prac [2] i [4] w celu wyznaczenia sum pewnych szeregów trygonometrycznych. Oba typy szeregów są szczególnie często spotykane w rozwiązaniach równań transportu ciepła lub masy oraz w teorii drgań. Użyteczność wyprowadzonych wzorów zilustrowano w końcowej części pracy przedstawiając w prostych postaciach pewne znane rozwiązania problemów termosprężystości, teorii drgań i innych.

W przedstawionych w dalszych częściach pracy związkach używać będziemy następujących oznaczeń skracających:

$$F_{n1}^{H}(p,z) = \frac{1}{4p^2}\left[K_n(pz) - I_n(pz)\frac{(H+n)K_n(p) - pK_{n+1}(p)}{(H+n)I_n(p)+pI_{n+1}(p)}\right], \tag{1.3}$$

$$F_{n2}^{H}(p,z) = \frac{1}{4p^2}\left[K_{n+1}(pz) + I_{n+1}(pz)\frac{(H+n)K_n(p) - pK_{n+1}(p)}{(H+n)I_n(p)+pI_{n+1}(p)}\right]. \tag{1.4}$$

Tutaj $I_n(z)$ i $K_n(z)$ — zmodyfikowane funkcje Bessela, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju n-tego rzędu [1]; H — parametr występujący w szeregach Diniego. Nietrudno zauważyć, że

$$F_{n1}^{H}(p,1) = \frac{1}{4p^2[(H+n)I_n(p)+pI_{n+1}(p)]}, \tag{1.5}$$

$$F_{n2}^{H}(p,1) = \frac{H+n}{4p^3[(H+n)I_n(p)+pI_{n+1}(p)]}. \tag{1.6}$$

Podstawowym wzorem, z którego otrzymuje się wszystkie następne cytowane w tej pracy wzory sumacyjne dla szeregów Diniego, jest związek

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \tag{1.7}$$
$$= 2a^2\{\eta(x-y)F_{n1}^{H}(a,x)I_n(ay)+\eta(y-x)F_{n1}^{H}(a,y)I_n(ax)\},$$

który uzyskuje się z odpowiedniego podstawowego wzoru z pracy [2] dla przypadku, gdy $H > 0$ i $n \geq 0$. Tutaj $\eta(z)$ — funkcja Heaviside'a.

Znajomość wzorów sumacyjnych dla szeregów Diniego i Fouriera-Bessela (te ostatnie omówiono w pracy [4]) pozwala w łatwy sposób otrzymać wzory sumacyjne dla pewnych szeregów trygonometrycznych. Wykorzystując mianowicie związki [6]:

$$\begin{aligned} &J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \qquad I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sinh z,\\ &Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z},\\ &J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\frac{\sin z}{z} - \cos z\right], \qquad I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cosh z - \frac{\sinh z}{z}\right],\\ &Y_{3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin z + \frac{\cos z}{z}\right], \qquad K_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left(1+\frac{1}{z}\right), \end{aligned} \tag{1.8}$$

związek (1.7) oraz związek (11) z pracy [4], otrzymuje się następujące wzory, będące podstawowymi dla wyznaczania sum odpowiednich szeregów trygonometrycznych:

$$\sum_{j=l}^{\infty}\frac{\lambda_j^2\sin\lambda_j x\sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \eta(x-y)\frac{\sinh ay}{2a}\times \tag{1.9}$$
$$\times\left[e^{-ax} - \frac{2e^{-a}\sinh ax}{A(H,a)e^a - e^a}\right] + \eta(y-x)\frac{\sinh ax}{2a}\left[e^{-ay} - \frac{2e^{-a}\sinh ay}{A(H,a)e^a - e^{-a}}\right],$$

(1.10)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\alpha_k x \sin\alpha_k y}{\alpha_k^2+a^2} = \eta(x-y)\frac{\sinh(ay)\sinh[a(1-x)]}{2a\sinh(a)} + \eta(y-x)\frac{\sinh(ax)\sinh[a(1-y)]}{2a\sinh(a)}$$

gdzie λ_j — dodatnie pierwiastki równania $(0{,}5-H)\mathrm{tg}\lambda = \lambda$ gdy $H \neq 0{,}5$, lub równania $\cos\lambda = 0$ gdy $H = 0{,}5$; (dla $H = 0{,}5$ mamy zatem $\lambda_j = \pi(j-0{,}5)$), $A(H, a) = \dfrac{H+a-0{,}5}{H-a-0{,}5}$, $\alpha_k = \pi k$.

Wszystkie wzory sumacyjne dotyczące szeregów trygonometrycznych, przedstawione w niniejszej pracy, można otrzymać bądź przez wykonanie na związkach (1.9) i (1.10) odpowiednich operacji, omówionych przy wyprowadzaniu wzorów sumacyjnych w pracach [2] i [4], bądź przez położenie $n = 1/2$ w odpowiednich zależnościach dotyczących sumowania szeregów Fouriera-Bessela i Diniego.

2. Sumy szeregów typu (1.2)

Zgodnie z ustaleniami pracy [2] wszystkie szeregi funkcyjne, dla których poniżej wyznaczono sumy, są zbieżne niemal jednostajnie dla $x, y \in (0, 1)$. Sumy szeregów liczbowych wyznaczono, dokonując odpowiednich przejść granicznych, przy czym za kryterium dopuszczalności takich przejść przyjęto ustalenia zawarte w §§ 18.34 i 18.35 monografii [1]. Parametr H we wszystkich związkach jest dodatni. Przejścia graniczne z parametrem a do zera wyznaczają pewne wzory sumacyjne, których jednakże nie wolno różniczkować w celu otrzymania innych związków (por. przejście od wzoru (2.10) do (2.11) w pracy [2]). Wszystkie zależności otrzymane przez różniczkowanie wzorów sumacyjnych uzyskano przy uwzględnieniu warunków podanych w odpowiednim twierdzeniu (por. § 10, rozdz. 5 monografii [9]); różniczkowania dokonuje się osobno dla $x < y$ i $y < x$ $(x, y \in (0, 1))$. Wielkości λ_{nj}, występujące we wszystkich szeregach przedstawionych w drugim i trzecim rozdziale pracy, są pierwiastkami równania

$$\lambda J_n'(\lambda)+HJ_n(\lambda) = 0.$$

Wykonanie zawartego w powyższym równaniu różniczkowania i wstawienie w miejsce λ pierwiastka λ_{nj} $(j = 1, 2, \ldots)$ prowadzi do następującej, wygodnej do dalszych rozważań, tożsamości:

(2.1)
$$\lambda_{nj}J_{n+1}(\lambda_{nj}) = (H+n)J_n(\lambda_{nj}).$$

Dokonując przejścia granicznego z a do zera we wzorze (1.7) otrzymuje się związek

(2.2)
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\eta(x-y)}{4n}\left\{\left(\dfrac{y}{x}\right)^n - x^n y^n \dfrac{H-n}{H+n}\right\} + \dfrac{\eta(y-x)}{4n}\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^n - x^n y^n \dfrac{H-n}{H+n}\right\} & \text{gdy} \quad n > 0, \\ \dfrac{1}{2H}\{\eta(x-y)(1-H\ln x)+\eta(y-x)(1-H\ln y)\} & \text{gdy} \quad n = 0. \end{cases}$$

Przechodząc we wzorze (1.7) — kolejno — najpierw z x do 1, a potem z y do 1, otrzymuje się

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{I_n(ax)}{2[(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)]}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)} = \frac{I_n(a)}{2[(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)]}, \tag{2.4}$$

Różniczkując związek (1.7) względem x dostajemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \tag{2.5}$$

$$= 2a^3\{\eta(x-y)F_{n2}^H(a,x)I_n(ay)-\eta(y-x)F_{n1}^H(a,y)I_{n+1}(ax)\};$$

funkcja $F_{n2}^H(p,z)$ określona jest związkiem (1.4).

Dokonując we wzorze (2.5) przejścia granicznego z y do 1, otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2+a^3)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = -\frac{aI_{n+1}(ax)}{2[(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)]}, \tag{2.6}$$

Przejście we wzorze (2.5) z a do zera daje wynik następujący:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \frac{\eta(x-y)}{2x}\left(\frac{y}{x}\right)^n. \tag{2.7}$$

Mnożąc obustronnie związek (2.5) przez $-a^{-2}$, związek (2.7) przez a^{-2} oraz dodając stronami, otrzymuje się

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \eta(y-x)2aF_{n1}^H(a,y)I_{n+1}(ax)+ \tag{2.8}$$

$$+\eta(x-y)\left\{\frac{1}{2a^2x}\left(\frac{y}{x}\right)^n-2aF_{n2}^H(a,x)I_n(ay)\right\}.$$

Przechodząc w (2.8) z a do zera dostajemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{\lambda_{nj}(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \begin{cases} \dfrac{x\eta(y-x)}{8n(n+1)}\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^n-x^ny^n\dfrac{H-n}{H+n}\right] & \text{gdy} \quad n>0, \\ \dfrac{x\eta(y-x)}{4H}(1-H\ln y) & \text{gdy} \quad n=0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Kładąc w (2.8) $x = 1$ otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{1}{2a^2}\left\{\frac{y^n}{H+n}-\frac{I_n(ay)}{(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)}\right\}, \tag{2.10}$$

zaś kładąc w (2.8) $y = 1$ otrzymuje się związek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{I_{n+1}(ax)}{2a[(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)]}. \tag{2.11}$$

Przejście w (2.5) z x do 1 i wykorzystanie tożsamości (2.1), a następnie przejście z a do zera, daje w wyniku znany związek (por. [1], § 18.12):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(H+n)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = y^n. \tag{2.12}$$

Ten sam rezultat otrzymuje się, przechodząc z a do zera we wzorze (2.3).

Przechodząc w (2.11) z x do 1 lub w (2.10) z y do 1 otrzymuje się

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)} = \frac{I_{n+1}(a)}{2a(H+n)[(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)]}. \tag{2.13}$$

Przejście z a do zera w (2.4) lub z y do 1 we wzorze (2.12) daje sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^2-n^2+H^2} = \frac{1}{2(H+n)}. \tag{2.14}$$

Zróżniczkowanie zależności (2.5) względem y daje w wyniku związek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \tag{2.15}$$

$$= 2a^2\{\eta(x-y)F_{n2}^H(a, x)I_{n+1}(ay)+\eta(y-x)F_{n2}^H(a, y)I_{n+1}(ax)\}.$$

Przechodząc w (2.15) z a do zera otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \frac{\eta(x-y)}{4(n+1)}\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} + \frac{\eta(y-x)}{4(n+1)}\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}. \tag{2.16}$$

Kładąc w (2.16) lub w (2.9) $y = 1$ dostajemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{\lambda_{nj}(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{x^{n+1}}{4(n+1)(H+n)}. \tag{2.17}$$

Dokonując w (2.17) przejścia z x do 1, lub w (2.13) z a do zera, otrzymuje się zależność

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^2(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)} = \frac{1}{4(n+1)(H+n)^2}. \tag{2.18}$$

Mnożąc obustronnie (2.17) przez x^{-n} i całkując w granicach od x do 1 łatwo uzyskuje się związek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x)}{\lambda_{nj}^2(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{[(1-x^2)(H+n)+2]x^n}{8(n+1)(H+n)^2}. \tag{2.19}$$

Wykorzystanie związków (2.14) i (2.18) pozwala wyznaczyć sumę następującego szeregu liczbowego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^2} = \frac{2+H+n}{4(n+1)(H+n)}. \tag{2.20}$$

W celu wyprowadzenia dalszych związków wykorzystamy wzory [1]

$$K_n(ip) = -\frac{\pi}{2} i^{-n}\{Y_n(p)+iJ_n(p)\}, \tag{2.21}$$
$$I_n(ip) = i^n J_n(p), \quad i = \sqrt{-1},$$

gdzie $Y_n(p)$ — funkcja Bessela II rodzaju n-tego rzędu. Wzory (2.21) pozwalają określić następujące związki:

$$F^H_{n1}(ip, z) = -i^{-n} G^H_{n1}(p, z), \qquad F^H_{n2}(ip, z) = i^{-n+1} G^H_{n2}(p, z), \tag{2.22}$$

gdzie

$$G^H_{n1}(p, z) = \frac{\pi}{8p^2}\left\{J_n(pz)\frac{(H+n)Y_n(p)-pY_{n+1}(p)}{(H+n)J_n(p)-pJ_{n+1}(p)} - Y_n(pz)\right\},$$
$$G^H_{n2}(p, z) = \frac{\pi}{8p^2}\left\{J_{n+1}(pz)\frac{(H+n)Y_n(p)-pY_{n+1}(p)}{(H+n)J_n(p)-pJ_{n+1}(p)} - Y_{n+1}(pz)\right\}. \tag{2.23}$$

Korzystając z zależności (2.21) i (2.22) oraz ze związków (1.7), (2.3) - (2.6), (2.8), (2.10), (2.11), (2.13) i (2.15) łatwo jest wyprowadzić następujące wzory:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^2_{nj} J_n(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J^2_n(\lambda_{nj})} = \tag{2.24}$$
$$= 2a^2\{\eta(x-y)G^H_{n1}(a, x)J_n(ay)+\eta(y-x)G^H_{n1}(a, y)J_n(ax)\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^2_{nj} J_n(\lambda_{nj}x)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{J_n(ax)}{2[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]}, \tag{2.25}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^2_{nj}}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)} = \frac{J_n(a)}{2[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]}, \tag{2.26}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^3_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J^2_n(\lambda_{nj})} = \tag{2.27}$$
$$= 2a^3\{\eta(x-y)G^H_{n2}(a, x)J_n(ay)+\eta(y-x)G^H_{n1}(a, y)J_{n+1}(ax)\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^3_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{aJ_{n+1}(ax)}{2[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]}, \tag{2.28}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J^2_n(\lambda_{nj})} = \eta(x-y)\left\{-\frac{1}{2a^2x}\left(\frac{y}{x}\right)^n + \right. \tag{2.29}$$
$$\left. + 2aG^H_{n2}(a, x)J_n(ay)\right\} + \eta(y-x)2aG^H_{n1}(a, y)J_{n+1}(ax),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{1}{2a^2}\left\{\frac{x^n}{H+n} - \frac{J_n(ax)}{(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)}\right\}, \tag{2.30}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda^2_{nj}-a^2)(\lambda^2_{nj}-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{J_{n+1}(ax)}{2a[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]}, \tag{2.31}$$

$$(2.32)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{nj}^2-a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)} = \frac{J_{n+1}(a)}{2a(H+n)[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]},$$

$$(2.33)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2-a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} =$$

$$= 2a^2\{\eta(x-y)G_{n2}^H(a,x)J_{n+1}(ay)+\eta(y-x)G_{n2}^H(a,y)J_{n+1}(ax)\}.$$

Cały szereg interesujących zależności można otrzymać, różniczkując podane wyżej związki względem parametru a. Np. na podstawie wzoru (2.28) uzyskuje się

$$(2.34)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2-a^2)^2(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{xJ_n(ax)}{4[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]}+$$

$$+\frac{(an+aH-a+1)J_{n+1}(a)+(a^2-2nH-2n^2)J_n(a)}{4a[(H+n)J_n(a)-aJ_{n+1}(a)]^2}J_{n+1}(ax).$$

3. Sumy szeregów Diniego, zawierających w mianowniku iloczyny typu $(\lambda_{nj}^2\pm a^2)(\lambda_{nj}^2\pm b^2)$

Wykorzystując wzór (1.7) oraz związki wyprowadzone w drugim rozdziale pracy, a także wykonując odpowiednie przejścia graniczne, można — dla $a\neq b$ — otrzymać następujące zależności:

$$(3.1)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} =$$

$$= \frac{2}{b^2-a^2}\{\eta(x-y)[a^2F_{n1}^H(a,x)I_n(ay)-b^2F_{n1}^H(b,x)I_n(by)]+$$

$$+\eta(y-x)[a^2F_{n1}^H(a,y)I_n(ax)-b^2F_{n1}^H(b,y)I_n(bx)]\},$$

$$(3.2)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} =$$

$$= \eta(x-y)\left\{\frac{1}{4a^2n}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^n-x^ny^n\frac{H-n}{H+n}\right]-2F_{n1}^H(a,x)I_n(ay)\right\}+$$

$$+\eta(y-x)\left\{\frac{1}{4a^2n}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^n-x^ny^n\frac{H-n}{H+n}\right]-2F_{n1}^H(a,y)I_n(ax)\right\},\qquad n>0;$$

dla $n=0$ otrzymuje się prawą stronę związku (3.2) wykorzystując zależności (1.3) i (2.2);

$$(3.3)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} =$$

$$= \frac{2}{b^2-a^2}\{\eta(x-y)[a^3F_{n2}^H(a,x)I_n(ay)-b^3F_{n2}^H(b,x)I_n(by)]-$$

$$-\eta(y-x)[a^3F_{n1}^H(a,y)I_{n+1}(ax)-b^3F_{n1}^H(b,y)I_{n+1}(bx)]\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \frac{\eta(x-y)}{2a^2b^2x}\left(\frac{y}{x}\right)^n + \tag{3.4}$$
$$+\frac{2}{b^2-a^2}\{\eta(x-y)[bF_{n2}^H(b,x)I_n(by)-aF_{n2}^H(a,x)I_n(ay)]+$$
$$+\eta(y-x)[aF_{n1}^H(a,y)I_{n+1}(ax)-bF_{n1}^H(b,y)I_{n+1}(bx)]\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \tag{3.5}$$
$$= -\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left\{\frac{I_n(by)}{(H+n)I_n(b)+bI_{n+1}(b)} - \frac{I_n(ay)}{(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)}\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n(\lambda_{nj})} = \frac{y^n}{2a^2b^2} + \tag{3.6}$$
$$+\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left\{\frac{I_n(by)}{b^2[(H+n)I_n(b)+bI_{n+1}(b)]} - \frac{I_n(ay)}{a^2[(H+n)I_n(a)+aI_{n+1}(a)]}\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \tag{3.7}$$
$$= \frac{2}{b^2-a^2}\{\eta(x-y)[a^2F_{n2}^H(a,x)I_{n+1}(ay)-b^2F_{n2}^H(b,x)I_{n+1}(by)]+$$
$$+\eta(y-x)[a^2F_{n2}^H(a,y)I_{n+1}(ax)-b^2F_{n2}^H(b,y)I_{n+1}(bx)]\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2+b^2)(\lambda_{nj}^2-n^2+H^2)J_n^2(\lambda_{nj})} = \eta(x-y)\left\{\frac{1}{4b^2(n+1)}\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} - \right. \tag{3.8}$$
$$\left. -2F_{n2}^H(b,x)I_{n+1}(by)\right\} + \eta(y-x)\left\{\frac{1}{4b^2(n+1)}\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} - 2F_{n2}^H(b,y)I_{n+1}(bx)\right\}.$$

Sumy szeregów zawierających w mianownikach różnice kwadratów uzyskuje się przez podstawienie w miejsce parametru a czy b wielkości ia ewentualnie ib. Wykorzystanie następnie zależności (2.21)-(2.23) pozwala na wyznaczenie odpowiedniej sumy. Niektóre tego typu sumy (dla dowolnego H rzeczywistego) wyznaczono w pracy [2]; przejście do najczęściej spotykanego w zastosowaniach przypadku $H > 0$ jest nieskomplikowane. Z uwagi na prostotę przejścia od wzorów (3.1)-(3.8) do odpowiednich wzorów sumacyjnych dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\lambda_{nj}^2+a^2)(\lambda_{nj}^2-b^2)$ czy $(\lambda_{nj}^2-a^2)(\lambda_{nj}^2-b^2)$, zależności tych nie będziemy wypisywać.

4. Sumy szeregów typu (1.9)

Wielkości λ_j, występujące we wszystkich szeregach przedstawionych w tej części pracy, są pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\lambda}{0{,}5-H}. \tag{4.1}$$

Gdy $H = 0{,}5$, wówczas $\lambda_j = \frac{\pi}{2}(2j-1)$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Odpowiednie wzory sumacyjne uzyskuje się na drodze analogicznej do przedstawionej w rozdziale 2 pracy. Niektóre z przedstawionych niżej zależności można łatwo otrzymać wykorzystując związki podane w rozdziałach 2 lub 3 pracy oraz wzory (1.8). Wyprowadzone związki są prawdziwe dla $x, y \in (0, 1)$; w niektórych przypadkach zakres ich słuszności można rozszerzyć do przedziału $(-1, 1)$, kładąc po prawej stronie $|x|$ w miejsce x, czy $|y|$ w miejsce y.

I tak — przechodząc z a do zera w (1.9), lub kładąc $n = 0{,}5$ we wzorze (2.2) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_j x \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \eta(x-y)\frac{y}{2}\left[1-x\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]+ \tag{4.2}$$

$$+\eta(y-x)\frac{x}{2}\left[1-y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right].$$

Przechodząc w (1.9) kolejno najpierw z x, a potem z y do 1, dostaje się związki

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{\sinh(ay)}{(H-a-0{,}5)[A(H, a)e^a-e^{-a}]}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)} + \frac{0{,}5}{H-0{,}5+a\operatorname{ctgh} a}, \tag{4.4}$$

Tutaj $A(H, a) = \dfrac{H+a-0{,}5}{H-a-0{,}5}$.

Związki (4.3) i (4.4) można również łatwo uzyskać z zależności (2.3) i (2.4), kładąc w nich $n = 0{,}5$ i wykorzystując (1.8).

Dokonując w (4.2) przejść granicznych z y do 1, a następnie z x do 1, otrzymuje się

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2H+1)\sin\lambda_j x}{(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = x, \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2H+1}{\lambda_j^2+H^2-0{,}25} = 1. \tag{4.6}$$

Kładąc w (4.6) $H = 0{,}5$ otrzymujemy znany wzór ([10], 0.234):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{4.7}$$

Różniczkując (1.9) względem x uzyskuje się związek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos\lambda_j x \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \eta(y-x)\frac{\cosh(ax)}{2}\left[e^{-ay}-\right. \tag{4.8}$$

$$\left.-\frac{2e^{-a}\sinh(ay)}{A(H, a)e^a-e^{-a}}\right]-\eta(x-y)\frac{\sinh(ay)}{2}\left[e^{-ax}+\frac{2e^{-a}\cosh(ax)}{A(H, a)e^a-e^{-a}}\right].$$

Przejście graniczne w (4.8) z a do zera daje w wyniku

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x \sin_j y}{(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \frac{1}{2}\eta(y-x)\left[1-y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]-\frac{1}{2}\eta(x-y)y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}. \tag{4.9}$$

Przechodząc w (4.8) z y do 1 dostajemy zależność

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{a\cosh(ax)}{(H+a-0{,}5)e^a-(H-a-0{,}5)e^{-a}}. \tag{4.10}$$

Gdy $a \to 0$, związek (4.10) przyjmuje postać

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{1}{2H+1}. \tag{4.11}$$

W szczególności gdy $H = 0{,}5$, wzór ten pokrywa się ze związkiem (4), 1.442, podanym w [10].

Mnożąc (4.8) przez $-a^{-2}$, (4.9) przez a^{-2} i dodając stronami, otrzymuje się

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \sin \lambda_j y \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{\eta(x-y)\left[\sinh(ay)\left(e^{-ax}+\frac{2e^{-a}\cosh(ax)}{A(H,a)e^a-e^{-a}}\right)-y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]+\right.$$

$$\left.+\eta(y-x)\left[\cosh(ax)\left(\frac{2e^{-a}\sinh(ay)}{A(H,a)e^a-e^{-a}}-e^{-ay}\right)+1-y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]\right\}.$$

Kładąc w (4.12) $y = 1$, dostajemy związek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos\lambda_j x}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{2H+1}-\right. \tag{4.13}$$

$$\left.-\frac{a\cosh(ax)}{(H+a-0{,}5)e^a-(H-a-0{,}5)e^{-a}}\right\}.$$

Zróżniczkowanie (4.12) względem y daje w wyniku zależność

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos\lambda_j x \cos\lambda_j y}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.14}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{\eta(x-y)\left[a\cosh(ay)\left(e^{-ax}+\frac{2e^{-a}\cosh(ax)}{A(H,a)e^a-e^{-a}}\right)-\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]+\right.$$

$$\left.+\eta(y-x)\left[a\cosh(ax)\left(e^{-ay}+\frac{2e^{-a}\cosh(ay)}{A(H,a)e^a-e^{-a}}\right)-\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]\right\}.$$

Przechodząc w (4.14) z a do zera, otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_j x \cos \lambda_j y}{(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \frac{1}{4(H+0{,}5)}\{\eta(x-y)[(x^2+y^2)(H-0{,}5)+ \tag{4.15}$$

$$+2(1-x)(H+0{,}5)]+\eta(y-x)[(x^2+y^2)(H-0{,}5)+2(1-y)(H+0{,}5)]\}.$$

Kładąc w (4.12) $x = 0$ dostajemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.16}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{\frac{2e^{-a}\sinh(ay)}{A(H,a)e^a-e^{-a}} - e^{-ay}+1-y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right\},$$

wykonując zaś w (4.16) przejście graniczne dla $a \to 0$, uzyskuje się zależność

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_j y}{\lambda_j(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \frac{(1{,}5+H)y-(H+0{,}5)y^2+\frac{1}{3}(H-0{,}5)y^3}{2(2H+1)}. \tag{4.17}$$

Kładąc w (4.17) $y = 1$ oraz $H = 0{,}5$ otrzymuje się znany związek ([10], (4), 0.234)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \tag{4.18}$$

Przechodząc w (4.14) z y do zera mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos\lambda_j x}{(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.19}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{a\left[e^{-ax}+\frac{2e^{-a}\cosh(ax)}{A(H,a)e^a-e^{-a}}\right]-\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right\}.$$

Gdy $a \to 0$, związek (4.19) przechodzi w następujący:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos\lambda_j x}{(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = -\frac{x}{2}+\frac{1}{2H+1}+\frac{x^2}{4}\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}. \tag{4.20}$$

Jeśli położymy $H = 0{,}5$, wzór (4.20) przechodzi w znaną zależność ([10], (6), 1.444):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}(2j-1)x}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}(1-x). \tag{4.21}$$

Można łatwo pokazać, że związek (4.21) obowiązuje również dla $x \in (-2,2)$; w miejsce x po prawej stronie należy wówczas wstawić $|x|$.

Kładąc w miejsce a we wzorach (1.9), (4.3), (4.4), (4.8), (4.10), (4.12)-(4.14), (4.16) i (4.19) wielkość ia ($i = \sqrt{-1}$) łatwo uzyskuje się następujące wzory sumacyjne

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin\lambda_j x \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.22}$$

$$= \eta(x-y)\frac{\sin(ay)}{2a}\,\frac{(H-0{,}5)\sin[a(1-x)]+a\cos[a(1-x)]}{(H-0{,}5)\sin a+a\cos a} +$$

$$+\eta(y-x)\frac{\sin(ax)}{2a}\,\frac{(H-0{,}5)\sin[a(1-y)]+a\cos[a(1-y)]}{(H-0{,}5)\sin a+a\cos a},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin\lambda_j x}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{0{,}5\sin(ax)}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a}, \tag{4.23}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)} = \frac{0{,}5\sin a}{(H-0{,}25)\sin a + a\cos a}, \tag{4.24}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos\lambda_j x \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.25}$$

$$= 0{,}5\eta(y-x)\cos(ax)\frac{(H-0{,}5)\sin[a(1-y)]+a\cos[a(1-y)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a} -$$

$$-0{,}5\eta(x-y)\sin(ay)\frac{(H-0{,}5)\cos[a(1-x)]-a\sin[a(1-x)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos\lambda_j x}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{0{,}5a\cos(ax)}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a}, \tag{4.26}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos\lambda_j x \sin\lambda_j y}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.27}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{\eta(y-x)\left[\cos(ax)\frac{(H-0{,}5)\sin[a(1-y)]+a\cos[a(1-y)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a} - 1 + y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right] -\right.$$

$$\left. -\eta(x-y)\left[\sin(ay)\frac{(H-0{,}5)\cos[a(1-x)]-a\sin[a(1-x)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a} - y\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5}\right]\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos\lambda_j x}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin\lambda_j} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{0{,}5a\cos(ax)}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a} - \frac{1}{2H+1}\right\}, \tag{4.28}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos\lambda_j x \cos\lambda_j y}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \tag{4.29}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{\eta(x-y)\left[\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5} - a\cos(ay)\frac{(H-0{,}5)\cos[a(1-x)]-a\sin[a(1-x)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a}\right] +\right.$$

$$\left. +\eta(y-x)\left[\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5} - a\cos(ax)\frac{(H-0{,}5)\cos[a(1-y)]-a\sin[a(1-y)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a}\right]\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \sin\lambda_j x}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} = \frac{1}{2a^2}\left\{x\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5} - 1 +\right. \tag{4.30}$$

$$\left. + \frac{(H-0{,}5)\sin[a(1-x)]+a\cos[a(1-x)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a}\right\},$$

$$(4.31)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos\lambda_j x}{(\lambda_j^2-a^2)(\lambda_j^2+H^2-0{,}25)\sin^2\lambda_j} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{\frac{H-0{,}5}{H+0{,}5} - a\frac{(H-0{,}5)\cos[a(1-x)]-a\sin[a(1-x)]}{(H-0{,}5)\sin a + a\cos a}\right\}.$$

Wykorzystując tożsamość

$$(4.32)\qquad \frac{1}{\lambda_j^2 \pm a^2} - \frac{1}{\lambda_j^2+b^2} = \frac{b^2 \mp a^2}{(\lambda_j^2\pm a^2)(\lambda_j^2+b^2)},$$

można wyprowadzić cały szereg wzorów sumacyjnych dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\lambda_j^2 \pm a^2)(\lambda_j^2 \pm b^2)$, podobnie jak to zrobiono w rozdziale trzecim pracy dla szeregów Diniego. Wzorów tych — z uwagi na prostotę ich otrzymania na podstawie znajomości zależności (4.2)-(4.31) — nie będziemy wypisywać.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, iż znajomość wzorów sumacyjnych dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\lambda_j^2+a^2)(\lambda_j^2-b^2)$ pozwala łatwo uzyskać odpowiednie zależności dla szeregów, których składniki zawierają w mianownikach wyrażenia $\lambda_j^4+a^4$. Wystarczy w tym celu położyć w wypisanym wyżej iloczynie w miejsce stałych a oraz b wielkość $a\sqrt{i}$. Sumy szeregów, zawierających w mianownikach swoich składników wyrażenia $\lambda_j^4+a^4$ można przedstawić jako kombinacje funkcji trygonometrycznych i wykładniczych od argumentów typu $\pm z\frac{\sqrt{2}}{2}$, gdzie $z = ax$, ay lub a.

5. Sumy szeregów typu (1.10)

Wielkości α_k, występujące we wszystkich szeregach przedstawionych w tej części pracy, są dodatnimi pierwiastkami równania $\sin\alpha = 0$, tzn. $\alpha_k = \pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Odpowiednie wzory sumacyjne uzyskuje się na drodze analogicznej do przedstawionej w rozdziałach 2 i 4 pracy. Również i tutaj — podobnie jak w rozdziale 4 — zakres ważności wielu wzorów można rozszerzyć do przedziału $(-1, 1)$, kładąc po prawej stronie odpowiednich związków $|x|$ czy $|y|$ w miejsce x czy y.

I tak — przejście z a do zera w (1.10) daje zależność

$$(5.1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\alpha_k x \sin\alpha_k y}{\alpha_k^2} = \eta(x-y)\frac{y(1-x)}{2} + \eta(y-x)\frac{x(1-y)}{2}.$$

Zróżniczkowanie (1.10) względem zmiennej x pozwala otrzymać związek

$$(5.2)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos\alpha_k x \sin\alpha_k y}{\alpha_k^2+a^2} = \eta(y-x)\frac{\cosh(ax)\sinh[a(1-y)]}{2\sinh a} -$$

$$-\eta(x-y)\frac{\sinh(ay)\cosh[a(1-x)]}{2\sinh a}.$$

Przechodząc w (5.2) z a do zera uzyskujemy wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha_k x \sin\alpha_k y}{\alpha_k} = \frac{1}{2}[(1-y)\eta(y-x) - y\eta(x-y)]. \tag{5.3}$$

Jeśli położyć w (5.3) $x = 0$, otrzymuje się wzór (1), 1.441 z tablic [10], zaś kładąc $x = 1$ — wzór (4), 1.445.

Kładąc w (5.2) $x = 1/\pi$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k)\sin(kx)}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2}\left\{\eta(x-1)\frac{\cosh(a)\sinh[a(\pi-x)]}{\sinh\pi a} - \right.$$
$$\left. -\eta(1-x)\frac{\sinh(ax)\cosh[a(\pi-1)]}{\sinh\pi a}\right\}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{5.4}$$

Przechodząc w (5.2) do przypadku $x = y$ dostajemy związek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2k\pi x)}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sinh[a\pi(1-2x)]}{\sinh(a\pi)}. \tag{5.5}$$

Dokonując w (5.5) przejścia z a do zera otrzymuje się wielomian Bernoulliego $B_1^*(x)$ [16]. Dalsze wielomiany $B_{2k+1}^*(x)$ można otrzymać, różniczkując (5.5) k-krotnie względem parametru a, a następnie dokonując przejścia granicznego z a do zera.

Mnożąc (5.2) obustronnie przez $-a^{-2}$, (5.3) przez a^{-2} i dodając je stronami, otrzymuje się

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha_k x\sin\alpha_k y}{\alpha_k(\alpha_k^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\left\{\eta(y-x)\left[1-y-\frac{\cosh(ax)\sinh[a(1-y)]}{\sinh a}\right] - \right.$$
$$\left. -\eta(x-y)\left[y-\frac{\sinh(ay)\cosh[a(1-x)]}{\sinh a.}\right]\right\}. \tag{5.6}$$

Przechodząc w (5.6) z a do zera dostaje się w wyniku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha_k x\sin\alpha_k y}{\alpha_k^3} = \frac{y\eta(x-y)}{12}(3x^2+y^2+2-6x) -$$
$$-\frac{(1-y)\eta(y-x)}{12}(y^2+3x^2-2y). \tag{5.7}$$

Kładąc w (5.7) $x = 0$ otrzymuje się wzór (5), 1.443 z tablic [10], kładąc zaś $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi y)}{k^3} = \frac{\pi^3}{12}y(y^2-1). \tag{5.8}$$

Przyjmując w (5.6) $x = 1$, otrzymujemy zależność

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\pi x)}{k(k^2+a^2)} = \frac{\pi}{2a^2}\left[x - \frac{\sinh(\pi a x)}{\sinh(\pi a)}\right]. \tag{5.9}$$

Kładąc w (5.8) $y = \frac{1}{\pi}$, uzyskuje się sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k}{k^3} = \frac{\pi^2-1}{12}. \tag{5.10}$$

Podobnie — wstawiając w (5.9) $x = 1/2$, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)[(2k-1)^2+a^2]} = \frac{\pi}{4a^2}\left(1-\frac{1}{\cosh\left(\frac{a\pi}{2}\right)}\right). \tag{5.11}$$

Szczególnym przypadkiem tego związku jest wzór (4), 0.234 z tablic [10].

Łatwo jest — na podstawie zależności (5.6) — wyprowadzić następujące dwa związki:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k(k^2+a^2)} = \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{\sinh(a)\cosh[a(\pi-1)]}{\sinh(a\pi)}-\frac{1}{\pi}\right], \tag{5.12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k^3} = \frac{1}{3}(\pi^2-3\pi+2). \tag{5.13}$$

Przez zróżniczkowanie zależności (5.6) względem zmiennej y uzyskuje się następujący wzór:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha_k x\cos\alpha_k y}{\alpha_k^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}\left\{\eta(y-x)\left[\frac{a\cosh(ax)\cosh[a(1-y)]}{\sinh a}-1\right]+\right.$$
$$\left.+\eta(x-y)\left[\frac{a\cosh(ay)\cosh[a(1-x)]}{\sinh a}-1\right]\right\}. \tag{5.14}$$

Kładąc w (5.14) $y = 0$ otrzymuje się przejście do wzoru (2), 1.445 z tablic [10], kładąc zaś $y = 1$ — przejście do wzoru (3), 1.445.

Przechodząc w (5.14) z x i y do $1/\pi$, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{\pi a\cosh(a)\cosh[a(\pi-1)]}{\sinh(a\pi)}-1\right]. \tag{5.15}$$

Kładąc w (1.10) $x = y = 1/\pi$ łatwo uzyskuje się związek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\,\frac{\sinh(a)\sinh[a(\pi-1)]}{\sinh(a\pi)}. \tag{5.16}$$

Dodając (5.15) i (5.16) stronami, a następnie przechodząc z a do zera, otrzymuje się wzór (3), 0.233 z tablic [10].

Przechodząc w (5.14) z a do zera znajdujemy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha_k x\cos\alpha_k y}{\alpha_k^2} = \frac{\eta(y-x)}{12}(2+3x^2-6y+3y^2)+$$
$$+\frac{\eta(x-y)}{12}(2+3y^2-6x+3x^2). \tag{5.17}$$

Jeśli w (5.17) położyć $y = 0$, otrzymuje się przejście do wzoru (3), 1.443 z tablic [10], zaś kładąc $y = 1$ — przejście do wzoru (4), 1.443.

Wiele interesujących zależności można otrzymać, różniczkując otrzymane związki względem parametru a. I tak — wykonując tę operację na wzorze (5.9) — dostajemy

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(k\pi x)}{k(k^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}\left\{\frac{x}{a^2}-\frac{\sinh(\pi a x)}{a^2\sinh(\pi a)}+\frac{\pi\cosh(\pi a)\sinh(\pi a x)}{2\sinh^2(\pi a)}-\frac{\pi x\cosh(\pi a x)}{2\sinh(\pi a)}\right\}. \tag{5.18}$$

Podobnie — kładąc w (5.6) $x = 0$ i różniczkując otrzymany wynik względem a — otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{k(k^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^4\sinh(\pi a)}\left\{(1-x)[2\sinh(\pi a)+\pi a\cosh[\pi a(1-y)]]-\frac{\sinh[\pi a(1-x)]}{\sinh(\pi a)}[2\sinh(\pi a)+\pi a\cosh(\pi a)]\right\}, \tag{5.19}$$

wykonując natomiast tę samą operację w odniesieniu do (5.2), uzyskujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\cos\alpha_k x\sin\alpha_k y}{(\alpha_k^2+a^2)^2} = \frac{1}{4a\sinh^2 a}\{\eta(x-y)[\sinh(a)(y\cosh(ay)\times \cosh[a(1-x)]+(1-x)\sinh(ay)\sinh[a(1-x)])-\cosh(a)\sinh(ay)\times \cosh[a(1-x)]]-\eta(y-x)[\sinh(a)(x\sinh(ax)\sinh[a(1-y)]+(1-y)\cosh(ax)\cosh[a(1-y)])-\cosh(ax)\sinh[a(1-y)]\cosh(a)]\}. \tag{5.20}$$

Podobne zróżniczkowanie związku (1.10) daje w wyniku

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_k x\sin\alpha_k y}{(\alpha_k^2+a^2)^2} = \frac{1}{4a^3\sinh^2 a}\{\eta(x-y)[(\sinh(a)+\cosh(a))\times \sinh(ay)\sinh[a(1-x)]-a\sinh(a)(y\cosh(ay)\sinh[a(1-x)]+(1-x)\sinh(ay)\cosh[a(1-x)])]+\eta(y-x)[(\sinh(a)+a\cosh(a))\times \sinh(ax)\sinh[a(1-y)]-a\sinh(a)(x\cosh(ax)\sinh[a(1-y)]+(1-y)\sinh(ax)\cosh[a(1-y)])]\}. \tag{5.21}$$

Przejście w (5.21) z a do zera pozwala znaleźć następującą zależność

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_k x\sin\alpha_k y}{\alpha_k^4} = \eta(x-y)\frac{y(1-x)}{12}[1-y^2-(1-x)^2]+\eta(y-x)\frac{x(1-y)}{12}[1-x^2-(1-y)^2]. \tag{5.22}$$

Kładąc w miejsce a we wzorach (1.10), (5.2), (5.4)-(5.6), (5.9), (5.11), (5.12), (5.14)-(5.16), (5.18)-(5.21) wielkość ia oraz wykorzystując znane związki $\sinh(iz) = i\sin(z)$, $\cosh(iz) = \cos(z)$, łatwo uzyskuje się sumy szeregów, zawierających w mianownikach swoich składników wyrażenia $\alpha_k^2 - a^2$. Z uwagi na prostotę otrzymania tych sum nie będziemy ich osobno wypisywać. Wykorzystując następnie tożsamość (4.32) można wyprowadzić wzory sumacyjne, dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\alpha_k^2 \pm a^2)(\alpha_k^2 \pm b^2)$, podobnie jak to zrobiono w rozdziale trzecim pracy. Odnośnie rozważanych szeregów pozostają również w mocy wszystkie uwagi zawarte w zakończeniu rozdziału czwartego.

6. Przykłady zastosowań wyprowadzonych związków

W tej części pracy wykorzystamy wyprowadzone wyżej wzory sumacyjne w celu sprowadzenia niektórych znanych w literaturze rozwiązań do postaci bardziej zwartej. Dla zagadnień dynamicznych zależności te pozwalają wyznaczyć w niektórych przypadkach rozwiązania ścisłe w postaci zwartej, lub rozwiązania przybliżone.

Rozważmy związek (6.32), podany na s. 58 monografii NOWACKIEGO [7], opisujący pole temperatury T. Wyrażenie to ma postać podwójnego szeregu

$$T(r, z') = \frac{2W}{\lambda\pi hc^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r) \sin \alpha_n \xi' \sin \alpha_n z'}{J_1^2(\beta_m c)(\alpha_n^2 + \beta_m^2)}, \tag{6.1}$$

gdzie $\alpha_n = \frac{\pi n}{h}$, $J_0(\beta_m c) = 0$; W, λ, h i c — stałe.

Stosując związek (1.10), otrzymujemy następującą postać funkcji $T(r, z')$:

$$\begin{aligned} T(r, z') = \frac{W}{\lambda\pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r)}{\beta_m \sinh(h\beta_m) J_1^2(\beta_m c)} [\eta(\xi' - z') \sinh(\beta_m z') \times \\ \times \sinh[\beta_m(h - \xi')] + \eta(z' - \xi') \sinh(\beta_m \xi') \sinh[\beta_m(h - z')]\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Rozważmy teraz związek (6.34) z monografii [7]. Opisuje on potencjał termosprężystego przemieszczenia:

$$\Phi = -\frac{2W\theta_0}{h\lambda\pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r) \sin \alpha_k \xi' \sin \alpha_n z'}{J_1^2(\beta_m c)(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}. \tag{6.3}$$

Wykorzystując związek (5.21), otrzymujemy

$$\Phi = -\frac{W\theta_0}{2\lambda\pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[S_m(\xi', z') + S_m(z', \xi')] J_0(\beta_m r)}{\beta_m^3 \sinh^2(h\beta_m) J_1^2(\beta_m c)}, \tag{6.4}$$

gdzie

$$\begin{aligned} S_m(x, y) = \eta(x - y)[(\sinh(h\beta_m) + h\beta_m \cosh(h\beta_m)) \sinh(\beta_m y) \sinh[\beta_m(h - x)] - \\ - \beta_m \sinh(h\beta_m)\big(y \cosh(\beta_m y) \sinh[\beta_m(h - x)] + (h - x) \sinh(\beta_m y) \cosh[\beta_m(h - x)]\big)]. \end{aligned}$$

Rozważmy związek (13.4) ze s. 139 monografii [7], opisujący pole temperatury:

$$(6.5)\qquad T(r, z') = \frac{W}{\pi h k'} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n \xi')\sin(\alpha_n z') \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha r) d\alpha}{\alpha_n^2 + \mu_5^2 \alpha^2}.$$

gdzie $\alpha_n = \frac{\pi n}{h}$; W, h, k', μ_5 — stałe. Stosując zależność (1.10) dostajemy stąd związek

$$(6.6)\qquad T(r, z') = \frac{W}{2\pi k' \mu^5} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha r)}{\sinh(h\alpha\mu_5)} \{\eta(\xi' - z')\sinh(\alpha\mu_5 z')\sinh[\alpha\mu_5(h-\xi')] +$$
$$+\eta(z' - \xi')\sinh(\alpha\mu_5 \xi')\sinh[\alpha\mu_5(h - z')]\} d\alpha.$$

Jest to przedstawienie całkowe temperatury $T(r, z')$; warto nadmienić, że w monografii [7] wykorzystano znajomość całki występującej we wzorze (6.5) i przedstawiono $T(r, z')$ w postaci szeregu zawierającego funkcję $K_0(z)$.

Przy pomocy zależności podanych w tej pracy można ponadto zapisać w prostszej postaci np. związki (6.47) i (6.48) ze s. 61, (13.25) ze s. 144; można również w stosunkowo prosty sposób wysumować szeregi znajdujące się we wzorach (31.49) na s. 304 cytowanej monografii.

Jako dalsze zastosowanie uzyskanych zależności przedstawimy w prostszej postaci wzór [o] na krzywą ugięcia, podany na s. 148 monografii [11]:

$$(6.7)\qquad y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\eta\pi c}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}}{n^4}.$$

Wykorzystanie związku (5.22) pozwala uzyskać następującą postać funkcji $y(x)$:

$$(6.8)\qquad y = \frac{P}{6EJl}\{\eta(c-x)x(l-c)(2lc - x^2 - c^2) + \eta(x-c)c(l-x)(2lx - x^2 - c^2)\}.$$

Pokażemy teraz zastosowania wzorów, wyprowadzonych w rozdziale czwartym pracy. Rozważmy zagadnienie drgań pręta, którego jeden koniec $x = 0$ jest zamocowany sztywno, a drugi $x = l$ jest swobodny, przy warunkach początkowych $u(x, 0) = kx$, $u_{,t}(x, 0) = 0$ (przecinek oznacza różniczkowanie po argumencie znajdującym się za przecinkiem). Postać tych drgań dana jest wzorem ([12], s. 221, problem 103):

$$(6.9)\qquad u(x, t) = \frac{8kl}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi x}{2l}\right] \cos\left[(2n-1)\frac{\pi a t}{2l}\right].$$

Wykorzystując związek

$$\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}z\right](-1)^{n+1} = \cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}(z-1)\right],$$

oraz wzory (4.2) i (4.5) dla przypadku $H = 0{,}5$, otrzymuje się

$$
u(x,t) = \begin{cases} x\eta(l-x-ls)+(1-s)l\eta(ls-l+x) & \text{gdy} \quad s \in <0,1), \\ -x\eta(ls-x-l)+(1-s)l\eta(l-ls+x) & \text{gdy} \quad s \in <1,2), \\ -x\eta(3l-ls-x)+(s-3)l\eta(sl-3l+x) & \text{gdy} \quad s \in <2,3), \\ x\eta(ls-3l-x)+(s-3)l\eta(3l-ls+x) & \text{gdy} \quad s \in <3,4), \end{cases} \tag{6.10}
$$

gdzie $s = \frac{at}{l} \operatorname{mod}.4^*$, $t \in (0, \infty)$.

W podobny sposób można zapisać szereg będący rozwiązaniem zagadnienia drgań podłużnych wymuszonych pręta o skończonej długości (por. wzory na s. 240 w [12] i np. związki (4.12) dla $H = 0{,}5$ i $a = 0$).

Sumy szeregów Diniego, przedstawione w rozdziałach 2 i 3 pracy, są szczególnie przydatne, gdy rozważa się zagadnienie np. ustalonego przepływu ciepła z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju. Natomiast przy zagadnieniach dynamicznych przedstawione sumy pozwalają łatwo otrzymać prostą postać rozwiązania dla małych czasów, lub rozwiązania przybliżone dla $t \in (0, \infty)$.

Rozważmy np. związek (7), podany na stronie 369 monografii [5], opisujący pole temperatury:

$$
v(r,t) = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_j)J_0(r'\alpha_j)}{J_j^2(a\alpha_j)+J_1^2(a\alpha_j)} e^{-\varkappa\alpha_j^2 t}, \tag{6.11}
$$

gdzie $a, r', \varkappa$ — stałe, zaś α_j — pierwiastki równania $k\alpha J_1(a\alpha) - hJ_0(a\alpha) = 0$. Kładąc $a\alpha_j = \lambda_{0j}$, $\frac{ha}{k} = H$, $\frac{r'}{a} = \varrho$, wykorzystując związek (2.1) oraz przybliżoną równość

$$
e^{-\varkappa\alpha_j^2 t} = \frac{1}{1+\varkappa\alpha_j^2 t} \quad \text{dla} \quad t \ll \frac{1}{\varkappa\alpha_j^2}
$$

możemy dla małych czasów przedstawić związek (6.11) w postaci

$$
v(\varrho, t) = \frac{1}{\pi\varkappa t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{0j}^2 J_0(\varrho\lambda_{0j}) J_0(\varrho'\lambda_{0j})}{\left[\lambda_{0j}^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{\varkappa t}}\right)^2\right][\lambda_{0j}^2+H^2]J_0^2(\lambda_{0j})}. \tag{6.12}
$$

Wykorzystując związek (1.7) dostajemy

$$
v(\varrho, t) = \frac{2a^2}{\pi\varkappa^2 t^2} \left\{ \eta(\varrho-\varrho') F_{01}^H\left(\frac{a}{\sqrt{\varkappa t}}, \varrho\right) I_0\left(\frac{\varrho' a}{\sqrt{\varkappa t}}\right) + \right.
$$
$$
\left. + \eta(\varrho'-\varrho) F_{01}^H\left(\frac{a}{\sqrt{\varkappa t}}, \varrho'\right) I_0\left(\frac{\varrho a}{\sqrt{\varkappa t}}\right) \right\}. \tag{6.13}
$$

Na zakończenie pokażemy, jak można wykorzystać przedstawione w rozdziale 2 związki do przybliżonego obliczania sum szeregów typu (6.11). Dla jasności wywodu posłużymy

---

*) Mówimy, że $a = b \operatorname{mod}. c$, gdy istnieje taka liczba naturalna n, że $b = cn+a$ i $0 \leqslant a < c$.

się związkiem nieco prostszym niż (6.11), a mianowicie rozważymy wzór (4), podany na stronie 202 monografii [5], dotyczący również pola temperatury:

$$v(r,t) = \frac{2hV}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_j)}{(h^2+\alpha_j^2)J_0(a\alpha_j)} e^{-k\alpha_j^2 t}, \tag{6.14}$$

gdzie h, V, a, k — stałe, zaś α_j — pierwiastki równania $\alpha J_0'(a\alpha)+hJ_0(a\alpha) = 0$. Kładąc $a\alpha_j = \lambda_{0j}$, $ah = H$, $\frac{r}{a} = \varrho$, oraz wykonując na obu stronach związku (6.14) transformację Laplace'a [15] (przy wykorzystaniu znanego twierdzenia dotyczącego zamiany operacji całkowania i sumowania [9]), orzymujemy

$$v_L(\varrho,p) = \frac{2HV}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\lambda_{0j})}{\left[\lambda_{0j}^2+\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)^2\right][H^2+\lambda_{0j}^2]J_0(\lambda_{0j})}. \tag{6.15}$$

gdzie $v_L(\varrho,p) = \int\limits_0^\infty v(\varrho,t)e^{-pt}dt$, p — parametr transformacji Laplace'a (liczba zespolona).

Na podstawie wzoru (2.10) możemy napisać

$$v_L(\varrho,p) = \frac{HV}{a^2p}\left(\frac{1}{H} - \frac{I_0\left(a\varrho\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}{HI_0\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)+a\sqrt{\frac{p}{k}}\,I_1\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}\right) = \tag{6.16}$$

$$= \frac{V}{a^2p} - \frac{HV}{a^2}\frac{1}{p^{3/2}}\phi(p),$$

gdzie

$$\phi(p) = \frac{\sqrt{p}\,I_0\left(\varrho a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}{HI_0\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)+a\sqrt{\frac{p}{k}}\,I_1\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}. \tag{6.17}$$

Wykorzystując znane wzory asymptotyczne łatwo można zauważyć, że

$$\lim_{p\to\infty}\phi(p) = \frac{\sqrt{k}}{a}. \tag{6.18}$$

Związek (6.18) jest warunkiem koniecznym stosowalności metody przybliżonego odwracania transformacji Laplace'a, podanej w rozdziale 5 monografii [13]. Wykorzystując tę metodę otrzymuje się

$$v(\varrho,t) = \frac{V}{a^2}\left\{1-H\sum_{k=1}^{n} A_k\bar{\phi}(p_k)\right\}, \tag{6.19}$$

gdzie

$$\bar{\phi}(p) = \frac{\sqrt{p}\,I_0\left(\varrho a\sqrt{\frac{p}{tk}}\right)}{HI_0\left(a\sqrt{\frac{p}{tk}}\right)+a\sqrt{\frac{p}{tk}}\,I_1\left(a\sqrt{\frac{p}{tk}}\right)}. \tag{6.20}$$

Wartości A_k i p_k można znaleźć w tablicach [14] lub wyliczyć jedną z metod podanych w [13].

Szereg, występujący we wzorze (6.19), jest szybkozbieżny w całym obszarze zmiennej t; warto nadmienić, że uwzględnienie niewielkiej liczby wyrazów tego szergu pozwala otrzymać stosunkowo dokładne wyniki [13, 14].

Literatura cytowana w tekście

1. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
2. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela i Dini*, Zastosowania Matematyki (w druku).
3. S. WOELKE, *Summation of certain Bessel series occuring in elasticity problems*, Arch. Mech. Stos., 3, 22 (1970).
4. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos, 2, **15** (1977).
5. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of the heat in solids*, Oxford Clarendon Press, 1959.
6. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
7. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
8. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1958.
9. Н. Н. ВОРОБЬЕВ, *Теория рядов*, Изд. Наука, Москва 1975.
10. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведении*, Изд. Наука, Москва 1971.
11. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, ARKADY, 1962.
12. B. M. BUDAK, A. A. SAMARSKI, A. N. TICHONOW, *Zadania i problemy fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1965.
13. В. И. КРЫЛОВ, Н. С. СКОБЛЬЯ, *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*, Изд. Наука, Москва 1974.
14. В. И. КРЫЛОВ, Л. Т. ШУЛЬГИНА, *Справочная книга по численному интегрированию*, Москва 1966.
15. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
16. В. И. КРЫЛОВ, *Приближенное вычисление интегралов*, Изд. Наука, Москва 1967.

Резюме

О СУММИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ДИНИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУЩЕСТВУЮЩИХ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В работе определены суммы нескольких рядов Дини и тригонометрических рядов зависящих от двух переменных $x, y \in (0, 1)$. Показано, что пользуясь полученными результатами можно в виде очень простых выражении представить решения некоторых статических и динамических задач механики сплошных сред, данные в литературе бесконечными суммами.

Summary

SUMMATION OF CERTAIN DINI AND TRIGONOMETRIC SERIES OCCURRING IN PROBLEMS OF THE THEORY OF CONTINUOUS MEDIA

In the paper the sums of Dini and trigonometric series, which are functions of two variables $x, y \in (0,1)$, are given. By using the relationships obtained here, some known results of static and dynamic problems of the theory of continuous media are shown in a very simple form.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 sierpnia 1977 r.