

NAPRĘŻENIA KRYTYCZNE WOLNOPODPARTYCH ŚCINANYCH PŁYT PRZEKŁADKOWYCH

FRANCISZEK ROMANÓW (WROCLAW)

Oznaczenia

a, b długość i szerokość płyty,
 $t, 2c$ grubość okładziny i rdzenia,
 E, G, ν moduł Younga, Kirchhoffa i liczba Poissona dla okładziny,
 E_u, G_u, ν_u odpowiednio dla rdzenia,
 m, n ilość półfal w kierunku osi x i y ,

$$\beta = \frac{\pi m}{a}$$

$$q = \frac{\pi n}{b}$$

$$r = a/b$$

q jednostkowe naprężenia tnące,

τ naprężenia tnące,

W ugięcie okładziny w kierunku osi z ,

W_u przemieszczenie rdzenia w kierunku osi z ,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{sztywność okładziny na zginanie,}$$

$$\psi^2 = \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)}$$

1. Wstęp

Zagadnieniom obliczania naprężeń krytycznych ścinanych płyt przekładkowych poświęcono dotychczas wiele prac. Przedstawione tam metody mogą być jednak stosowane tylko do tzw. cienkich płyt przekładkowych [1, 2], które spełniają warunek

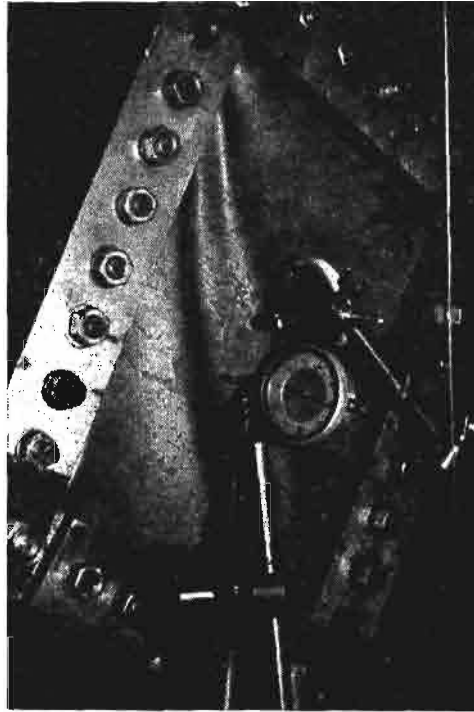
$$(1.1) \quad \frac{\pi^2 Etc}{a^2 G_u (1-\nu)} < 1.$$

Podstawowym uproszczeniem, jakie przyjmowane jest w tych pracach, to nieodkształcalność miękkiego rdzenia w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty. To założenie nie uwzględnia naprężeń ścinających w rdzeniu i uniemożliwia opracowanie ogólniejszej metody oraz projektowanie płyt w oparciu o nośność graniczną. Zasadniczym kryterium wytrzymałościowym tych płyt jest utrata stateczności całej płyty (tzw. ogólna forma utraty stateczności), przy której obciążenia krytyczne są na ogół mniejsze od nośności granicznej.

Z ekonomicznego punktu widzenia interesujące są grubsze płyty, w których naprężenia krytyczne są zbliżane do granicy plastyczności okładziny. Wychodząc z założenia, że ugięcie okładziny opisane jest szeregiem

$$(1.2) \quad W = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b},$$

w pracy [5] rozwiązano zagadnienie stateczności krótkich płyt przekładkowych, dla których ($a/b \leq 2$). Jednak doświadczenia wykazały, że teoretyczne naprężenia krytyczne w stosunku do wyników badań są znacznie zawyżone. Dlatego dalsze poszukiwania doprowadziły do przyjęcia nieco innej funkcji od równania (1.2) która dokładniej opisuje ugięcia wolnopodpartych, ścinanych, prostokątnych płyt przekładkowych i w konsekwencji daje dokładniejsze rozwiązania. Rzeczywisty obraz odkształconej płyty, uzyskany na drodze doświadczalnej, przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Forma utraty stateczności płyt przekładkowych

Przeprowadzone rozważania i otrzymane wnioski są słuszne przy następujących założeniach:

- okładziny wykonane z jednakowego, izotropowego materiału posiadają taką samą grubość,
- rdzeń wykonany z miękkiego izotropowego materiału, dla którego obowiązuje zależność $E_u \cdot c/Et < 0,1$. Oznacza to, że sztywność rdzenia w płaszczyźnie płyty w stosunku do sztywności okładzin jest dużo mniejsza.

Możemy więc przyjąć, że obciążenia leżące w płaszczyźnie płyty przenoszą tylko okładziny. Rdzeń natomiast równomiernie podpira okładziny i przenosi siły tnące oraz siły normalne prostopadłe do powierzchni płyty.

W oparciu o powyższe założenia możemy przyjąć, że lekki rdzeń charakteryzuje się następującymi własnościami: $E_x = E_y = G_{xy} = 0$; $G_{xz} = G_{yz} = G_u$ i $E_z = E_u$.

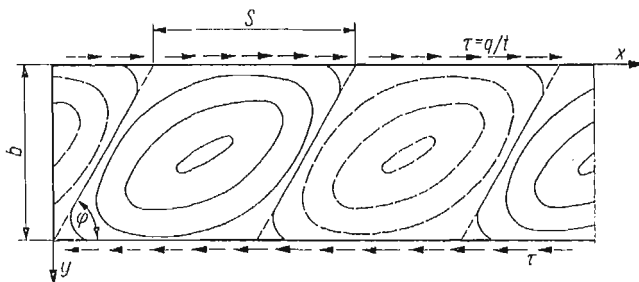
2. Płyta nieskończenie długa

Na początek przeanalizujemy problem naprężeń krytycznych dla płyt teoretycznie nieskończenie długich. Podobnie jak w teorii cienkich płyt przyjmiemy, że ugięcie okładziny opisuje zależność

$$(2.1) \quad W = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y).$$

Dla wolnopodpartej płyty funkcja ta spełnia tylko częściowo warunki brzegowe [3].

Na krawędziach płyty ($y = 0$, $y = b$) ugięcia równają się zeru, zaś momenty są różne od zera, gdyż $\partial^2 W / \partial y^2 \neq 0$. Jednak dla uzyskania chociaż przybliżonego rozwiązania będziemy w dalszym ciągu korzystać z tej zależności. Graficzne przedstawienie ugięcia płyty pokazane jest na rys. 2, gdzie s oznacza długość półfali, α charakteryzuje nachylenie linii węzłowych, dla których $x - \alpha y / s$ jest liczbą całkowitą i A jest amplitudą.



Rys. 2. Schemat odkształconej nieskończenie długiej płyty przekładkowej

Przemieszczenie rdzenia w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty zostało określone w ogólnym przypadku w pracy [4] jako funkcja trzech zmiennych

$$(2.2) \quad W_u = \varphi(z) W_{(x,y)} = - \frac{\cosh [p(c-z)]}{\cos h pc} W_{(x,y)},$$

gdzie

$$(2.3) \quad p^2 = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}}{W} \frac{1 - 2\nu_u}{2(1 - \nu_u)}.$$

Jak wynika z zależności (2.2), φ jest tylko funkcją zmiennej z , a ugięcie W funkcją x i y . Aby to założenie było spełnione, zależność (2.3) będziemy traktować jako parametr,

który w konkretnym przypadku ugięcia okładziny posiada stałą wartość. Wielkość tego współczynnika dla niektórych funkcji ugięcia okładziny podano w tablicy 1.

Tablica 1

Funkcja ugięcia okładziny W	Parametr p^2
$A_0 \sin \frac{\pi x m}{a}$	$\left(\frac{\pi m}{a} \psi\right)^2$
$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b}$	$\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right] \psi^2$
$A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y)$	$\left(\frac{\pi \psi}{s}\right)^2 \left(1 + \frac{s^2}{b^2} + \alpha^2\right)$
$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b} \cos \frac{\pi}{a} (y - \alpha x)$	$\left(\frac{\pi \psi}{a}\right)^2 \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} n\right)^2 + \alpha^2 + 1\right]$

Mając określone przemieszczenie rdzenia możemy teraz za pomocą metody energetycznej znaleźć naprężenia krytyczne.

W związku z tym, iż okładzina traktowana jest jako cienka izotropowa płyta, jej energia odkształcenia sprężystego określona jest wzorem [3]

$$A_K = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Opierając się na przedstawionych we wstępie założeniach odnośnie rdzenia i korzystając z ogólnego równania na energię sprężystą ciała izotropowego, energię sprężystą da się opisać zależnością

$$A_r = G_u \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left\{ \frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \left(\frac{\partial W_u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_u}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz.$$

Praca wykonana przez zewnętrzne siły ścinające płytę wyraża się wzorem

$$A_z = - \int_0^a \int_0^b q \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy.$$

Uwzględniając dalej równania (2.1) i (2.2) ostatecznie otrzymamy:

$$(2.4) \quad A_K = \frac{4A^2 D a b}{8} \left[\frac{1}{b^4} + \frac{2+6\alpha^2}{s^2 b^2} + \frac{(1+\alpha^2)^2}{s^2} \right],$$

$$(2.5) \quad A_r = \frac{\pi^2 G_u A^2 a b}{8} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc},$$

$$(2.6) \quad A_z = q \frac{\pi^2 A^2 \alpha a b}{4s^2}.$$

Nieznane jednostkowe naprężenia tnące q obliczymy z zależności

$$(2.7) \quad A_K + A_r + A_z = 0,$$

$$(2.8) \quad q = \frac{\pi^2 D}{2} \left[\frac{s^2}{b^4} + \frac{2+6\alpha^2}{b^2} + \frac{(1+\alpha^2)^2}{s^2} + \frac{G_u}{2\alpha} \left(\frac{s^2}{b^2} + 1 + \alpha^2 \right) \frac{\operatorname{tgh} pc}{p} \right].$$

W dalszym ciągu interesuje nas najmniejsza wartość q , czyli naprężenia krytyczne. Żądaną wartość otrzymamy z warunku

$$(2.9) \quad \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = 0.$$

Z równania (2.9) przy założeniu, że mamy do czynienia tylko z cienką płytą (bez rdzenia $c = 0$) otrzymamy znane rozwiązania [3]

$$\alpha_0 = 0,7071; \quad s_0 = 1,2247 b$$

i najmniejszą wartość naprężeń

$$q_0 = 5,7 \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Rozwiązanie równań (2.9) najłatwiej przeprowadzić metodą numeryczną. Dla szczególnych przypadków płyt można stosunkowo łatwo określić naprężenia krytyczne metodą analityczną. Dla dostatecznie cienkich płyt przekładkowych można przyjąć, że

$$\operatorname{tgh} pc \approx pc,$$

wtedy z równania (2.8), poprzez wykorzystanie równań (2.9) otrzymamy:

$$s_{kr} = b \sqrt{1 + \alpha_{kr}^2} \sqrt[4]{c_4},$$

$$\alpha_{kr} = \frac{2 - c_2}{2 - c_3},$$

tutaj

$$c_2 = -\sqrt{c_4}(2 + c_5),$$

$$c_3 = \sqrt{c_4}(6 + c_5),$$

$$c_4 = \frac{1}{1 + c_5},$$

$$c_5 = \frac{G_u c b^2}{\pi^2 D}.$$

Podstawiając s_{kr} i α_{kr} do równania (2.8) ostatecznie otrzymamy jednostkowe naprężenia krytyczne.

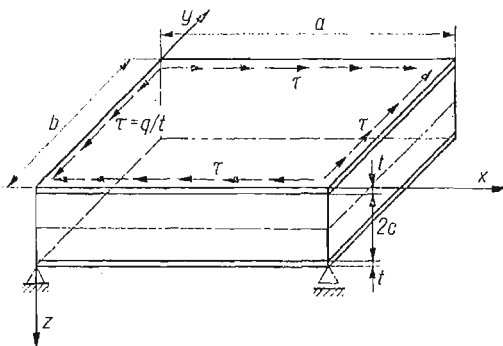
Porównując s_0 z s_{kr} oraz α_0 z α_{kr} można łatwo wykazać, że $s_{kr} < s_0$ i $\alpha_{kr} > \alpha_0$. Oznacza to, że płyta przekładkowa fałduje się w ten sposób, że długość półfali jest mniejsza od długości półfali dla takiej samej cienkiej płyty (bez rdzenia).

3. Płyty prostokątne

Jak już wspomniano we wstępie w pracy [5] rozwiązano problem stateczności krótkich płyt przekładkowych przy założeniu, że ugięcie okładziny opisane jest zależnością (1.2). Schemat takiej płyty przedstawiono na rys. 3. Późniejsze dociekania doprowadzają do wniosku, że dokładniej ugięcie okładziny można opisać następującą zależnością:

$$(3.1) \quad W = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b} \cos \frac{\pi}{a} (y - \alpha x).$$

Wyrażenie to, podobnie jak zależność (2.1), nie spełnia wszystkich warunków brzegowych, gdyż na krawędziach płyty ugięcia są równe zero, zaś momenty nie są równe zero.



Rys. 3. Płyta prostokątna wolnopodparta na całym obwodzie obciążona na krawędziach naprężeniami tnącymi

W dalszym ciągu zostanie wykazane, iż ten fakt dla płyt przekładkowych w przeciwieństwie do płyt bez rdzenia nie jest zbyt istotny. Wykorzystując zależność (2.2) i (3.1), a następnie postępując, podobnie jak w p. 2, otrzymamy wzory na energię sprężystą i pracę sił zewnętrznych.

Energia gięcia okładziny

$$(3.2) \quad A_k = \frac{D}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left\{ \frac{\pi^4}{a^4} \left[(m^2 + \alpha^2)^2 \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (m\alpha^3 + m^3 \alpha) (x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})) + m^2 \alpha^2 (4x_2 x_{18} - 2x_4 x_{20} + 4x_8 x_{19}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^4}{a^2} \left[(m^2 + \alpha^2) \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \frac{m\alpha}{2} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})) + \frac{n}{2ab} (m^2 + \alpha^2) (x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{mn\alpha}{ab} \left(\frac{1}{2} x_3 x_{15} - x_{10} x_{17} - x_4 x_{16} \right) \right] + \pi^4 \left[\left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{n}{a^3 b} + \frac{n^3}{ab^3} \right) (x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})) + \frac{n^2}{a^2 b^2} (4x_1 x_7 - 2x_5 x_9 + 4x_{11} x_{12}) \right] \right\}.$$

Energia sprężysta rdzenia

$$(3.3) \quad A_r = \frac{G_u}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \left\{ p^2 \left(\frac{\operatorname{tgh} pc}{p} - \frac{c}{\cosh^2 pc} \right) \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tgh} pc}{p} + \frac{c}{\cosh^2 pc} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} \left[m^2 \left(x_2 x_{19} + \frac{1}{2} x_4 x_{20} + x_8 x_{18} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha m}{2} (x_{15} (x_8 - x_2)) + x_4 (x_{17} - x_{16}) + \alpha^2 \left(x_2 x_{11} + x_1 x_8 - \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) \right] + \right. \\ \left. + \pi^2 \left[\frac{n^2}{b^2} \left(x_1 x_{12} + \frac{1}{2} x_5 x_9 + x_7 x_{11} \right) + \frac{n}{2ab} (x_3 (x_{11} - x_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + x_5 (x_{14} - x_{10})) + \frac{1}{a^2} \left(x_2 x_{11} + x_1 x_8 - \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) \right] \right\} \Bigg\}.$$

W równaniach tych przez x oznaczono następujące całki:

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi \alpha}{a} x \sin^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} \left[1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \sin 2\pi \alpha \right] = x_1,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi n}{b} y \cos^2 \frac{\pi}{a} y dy = \frac{b}{4} + \frac{a}{8\pi} \left(1 + \frac{b^2}{n^2 a^2 - b^2} \right) \sin 2\pi \frac{b}{a} = x_2,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi}{a} y \sin \frac{2\pi n}{b} y dy = \frac{na^2 b}{2\pi(b^2 - a^2 n^2)} \sin 2\pi \frac{b}{a} = x_3,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi}{a} y \sin^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \left(\cos 2\pi \frac{b}{a} - 1 \right) \left[\frac{a}{4\pi} \left(\frac{2b^2}{b^2 - a^2 n^2} - 1 \right) \right] = x_4.$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi \alpha}{a} x \sin^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4\pi} \left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 - m^2} (\cos 2\pi \alpha - 1) + \frac{1}{\alpha} (1 - \cos 2\pi \alpha) \right] = x_5,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{a} y \cos^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \frac{b}{4} - \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2 n^2} + 1 \right) \sin 2\pi \frac{b}{a} \right] = x_7,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{a} y \sin^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \frac{b}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2 n^2} - 1 \right) \sin 2\pi \frac{b}{a} \right] = x_8,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi}{a} y \cos^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \left(1 - \cos 2\pi \frac{b}{a} \right) \left[\frac{a}{4\pi} \left(1 + \frac{2b^2}{b^2 - a^2 n^2} \right) \right] = x_9,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi n}{b} y \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy = \frac{a^2 b n}{2\pi(a^2 n^2 - b^2)} \left(\cos 2\pi \frac{b}{a} - 1 \right) = x_{10},$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \sin^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \sin 2\pi\alpha = x_{11},$$

$$\int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} y \cos^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \frac{b}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(1 + \frac{b^2}{b^2 - a^2 n^2} \right) \right] \sin 2\pi \frac{b}{a} = x_{12},$$

$$\int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} y \sin \frac{2\pi n}{b} y dy = \frac{a^2 b n}{4\pi(n^2 a^2 - b^2)} \left(1 - \cos 2\pi \frac{b}{a} \right) = x_{14},$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi\alpha}{a} x \sin \frac{2\pi m}{a} x dx = \frac{am}{2\pi(\alpha^2 - m^2)} \sin 2\pi\alpha = x_{15},$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \sin \frac{2\pi m}{a} x dx = \frac{a\alpha}{4\pi(m^2 - \alpha^2)} (1 - \cos 2\pi\alpha) = x_{16},$$

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \sin \frac{2\pi m}{a} x dx = \frac{am}{4\pi(m^2 - \alpha^2)} (1 - \cos 2\pi\alpha) = x_{17},$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \cos^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} - \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \right] \sin 2\pi\alpha = x_{18},$$

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \cos^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \right] \sin 2\pi\alpha = x_{19},$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi\alpha}{a} x \cos^2 \frac{\pi m}{a} x dx = (1 - \cos 2\pi\alpha) \left[\frac{a}{4\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \right] = x_{20}.$$

Praca sił zewnętrznych

$$(3.4) \quad A_z = -q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mn} C_{kl} \frac{\pi^2}{a} \left\{ \frac{ml}{b} (Z_1 Z_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} Z_4 Z_5 + Z_8 Z_9) + \frac{\alpha l}{b} [Z_{13}(Z_8 - Z_3) + Z_5(Z_{12} - Z_{11})] + \right. \\ \left. + \frac{m}{2a} [Z_4(Z_6 - Z_7) + Z_2(Z_9 - Z_1)] + \frac{\alpha}{a} \left[\frac{1}{2} Z_2 Z_{13} - Z_7 Z_{12} - Z_6 Z_{11} \right] \right\},$$

gdzie:

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(m+k)} [1 - \cos \pi(m+k)] + \\ + \frac{a}{4\pi(m-k)} [\cos \pi(m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha + m + k)} [1 - \cos \pi(2\alpha + m + k)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a}{8\pi(2\alpha-m-k)} [\cos \pi(2\alpha-m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha+m-k)} \times \\
& \times [\cos \pi(2\alpha+m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha-m-k)} [\cos \pi(2\alpha-m+k) - 1] = Z_1, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{2\pi}{a} y \sin \frac{\pi l}{b} y dy & = -\frac{ab}{4\pi[2b+a(n-l)]} \left[\cos \pi \left(\frac{2b}{a} + n-l \right) - 1 \right] + \\
& + \frac{ab}{4\pi[2b-a(n-l)]} \left[1 - \cos \pi \left(\frac{2b}{a} - n+l \right) \right] + \frac{ab}{4\pi[2b+a(n+l)]} \left[\cos \pi \left(\frac{2b}{a} + \right. \right. \\
& \left. \left. + n+l \right) - 1 \right] + \frac{ab}{4\pi[2b-a(n+l)]} \left[\cos \pi \left(\frac{2b}{a} - n-l \right) - 1 \right] = Z_2, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \cos \frac{\pi l}{b} y \cos^2 \frac{\pi}{a} y dy & = \frac{b}{4\pi(n+l)} [\cos \pi(n+l) + 1] + \frac{b}{4\pi(n-l)} [1 - \cos \pi(n-l)] + \\
& + \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \left[1 - \cos \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \left[1 - \cos \pi \times \right. \\
& \left. \times \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \left[1 - \cos \pi(n-l) + \right. \\
& \left. + \frac{2b}{a} \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \left[1 - \cos \pi(n-l) - \frac{2b}{a} \right] = Z_3, \\
\int_0^a \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{2\pi \alpha}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx & = \frac{a}{4\pi(2\alpha-k-m)} \sin \pi(2\alpha-k-m) + \\
& + \frac{a}{4\pi(2\alpha-k+m)} \sin \pi(2\alpha-k+m) + \frac{a}{4\pi(2\alpha+k-m)} \sin \pi(2\alpha+k-m) - \\
& - \frac{a}{4\pi(2\alpha+k+m)} \sin \pi(2\alpha+k+m) = Z_4, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{2\pi}{a} y \cos \frac{\pi l}{b} y dy & = \frac{ab}{4\pi(2b-a)(n-l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} - n+l \right) - \\
& - \frac{ab}{4\pi(2b+a)(n+l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} + n+l \right) + \frac{ab}{4\pi(2b-a)(n+l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} - n-l \right) - \\
& - \frac{ab}{4\pi(2b+a)(n-l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} + n-l \right) = Z_5, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi l}{b} y \cos^2 \frac{\pi}{a} y dy & = \frac{b}{4\pi(n-l)} \sin \pi(n-l) - \frac{b}{4\pi(n+l)} \sin \pi(n+l) + \\
& + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \sin \pi \left(n-l - \frac{2b}{a} \right) + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \sin \pi \left(n-l + \frac{2b}{a} \right) - \\
& - \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \sin \pi \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) - \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \sin \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) = Z_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi l}{b} y \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy &= \frac{b}{4\pi(n-l)} \sin \pi(n-l) - \frac{b}{4\pi(n+l)} \sin \pi(n+l) - \\
&- \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \sin \pi \left(n-l - \frac{2b}{a} \right) - \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \times \\
&\times \sin \pi \left(n-l + \frac{2b}{a} \right) - \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \sin \pi \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) - \\
&- \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \sin \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) = Z_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \cos \frac{\pi l}{b} y \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy &= \frac{b}{4\pi(n+l)} [1 - \cos \pi(n+l)] + \left(\frac{b}{4\pi(n-l)} \right) \times \\
&\times [1 - \cos \pi(n-l)] + \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \left[-1 + \cos \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) \right] + \\
&+ \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \left[-1 + \cos \pi \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \times \\
&\times \left[\cos \pi \left(n-l + \frac{2b}{a} \right) - 1 \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \left[\cos \pi \left(n-l - \frac{2b}{a} \right) - 1 \right] = Z_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sin^2 \frac{\pi \alpha}{a} x \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx &= \frac{a}{4\pi(m+k)} [1 - \cos \pi(m+k)] + \\
&+ \frac{a}{4\pi(m-k)} [\cos \pi(m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha+m+k)} [\cos \pi(2\alpha+m+k) - 1] + \\
&+ \frac{a}{8\pi(2\alpha-m-k)} [\cos \pi(2\alpha-m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha+m-k)} \times \\
&\times [1 - \cos \pi(2\alpha+m-k)] + \frac{a}{8\pi(2\alpha-m+k)} [\cos \pi(2\alpha-m+k) - 1] = Z_9,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sin^2 \frac{\pi \alpha}{a} x \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx &= \frac{a}{4\pi(m-k)} \sin \pi(m-k) - \\
&- \frac{a}{4\pi(m+k)} \sin \pi(m+k) - \frac{a}{8\pi(m-k-2\alpha)} \sin \pi(m-k-2\alpha) + \\
&+ \frac{a}{8\pi(m-k+2\alpha)} \sin \pi(m-k-2\alpha) - \frac{a}{8\pi(m+k-2\alpha)} \times \\
&\times \sin \pi(m+k-2\alpha) - \frac{a}{8\pi(m+k+2\alpha)} \sin \pi(m+k+2\alpha) = Z_{11},
\end{aligned}$$

$$\int_0^a \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x \cos^2 \frac{\pi \alpha}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(m-k)} \sin \pi(m-k) -$$

$$- \frac{a}{4\pi(m+k)} \sin \pi(m+k) + \frac{a}{8\pi(m-k-2\alpha)} \sin \pi(m-k-2\alpha) +$$

$$+ \frac{a}{8\pi(m-k+2\alpha)} \sin \pi(m-k+2\alpha) + \frac{a}{8\pi(m+k-2\alpha)} \sin \pi(m+k-2\alpha) -$$

$$- \frac{a}{8\pi(m+k+2\alpha)} \sin \pi(m+k+2\alpha) = Z_{12},$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi \alpha}{a} x \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(k+2\alpha-m)} [1 + \cos \pi(k+2\alpha-m)] +$$

$$+ \frac{a}{4\pi(k+m-2\alpha)} [1 - \cos \pi(k-2\alpha+m)] + \frac{a}{4\pi(k+2\alpha+m)} [\cos \pi(k+m+2\alpha) - 1] +$$

$$+ \frac{a}{4\pi(k-2\alpha-m)} [1 - \cos \pi(k-2\alpha-m)] = Z_{13},$$

tutaj

$$m \neq k, \quad n \neq l.$$

Całkowita energia płyty. Korzystając z równania (2.7) przy uwzględnieniu równań (3.2), (3.3) i (3.4) otrzymamy ostatecznie wzór na całkowitą energię płyty przekładkowej

$$(3.5) \quad A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 A_{mn} - q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mn} C_{kl} B_{mnkl},$$

gdzie:

$$A_{mn} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\pi^4}{a^4} [(m^2 + \alpha^2)^2 (x_1 x_2 + 0,5 x_4 x_5 + x_8 x_{11}) + (m\alpha^3 + m^3 \alpha) \times \right.$$

$$\times [x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})] + m^2 \alpha^2 (4x_2 x_{18} - 2x_4 x_{20} + 4x_8 x_{19})] +$$

$$+ \frac{2\pi^4}{a^2} \left[(m^2 + \alpha^2) \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) (x_1 x_2 + 0,5 x_4 x_5 + x_8 x_{11}) + \frac{m\alpha}{2} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \times \right.$$

$$\times [x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})] + \frac{n}{2ab} (m^2 + \alpha^2) [x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})] +$$

$$+ \frac{mn\alpha}{ab} (0,5 x_3 x_{15} - x_{10} x_{17} - x_4 x_{16}) \left. \right] + \pi^4 \left[\left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 (x_1 x_2 + 0,5 x_5 x_4 + \right.$$

$$+ x_8 x_{11}) + \left(\frac{n}{a^3 b} + \frac{n^3}{ab^3} \right) [x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})] + \frac{n^2}{a^2 b^2} \times$$

$$\times (4x_1 x_7 - 2x_5 x_9 + 4x_{11} x_{12}) \left. \right] + \frac{G_u}{2} p^2 \left(\frac{\operatorname{tg} h p c}{p} - \frac{c}{\cosh^2 p c} \right) \times$$

$$\times (x_1 x_2 + 0,5 x_4 x_5 + x_8 x_{11}) + 0,5 \left(\frac{\operatorname{tg} h p c}{p} + \frac{c}{\cosh^2 p c} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} [m^2 (x_2 x_{19} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 0,5x_4x_{20} + x_8x_{18}) + \frac{m\alpha}{2} [x_{15}(x_8 - x_2) + x_4(x_{17} - x_{16})] + \alpha^2 \times \\
& \times (x_2x_{11} + x_1x_8 - 0,5x_4x_5) + \pi^2 \left[\frac{n^2}{b^2} (x_1x_{12} + 0,5x_5x_9 + x_7x_{11}) + \right. \\
& \left. + \frac{n}{2ab} [x_3(x_{11} - x_1) + x_5(x_{14} - x_{10})] + \frac{1}{a^2} (x_1x_8 - 0,5x_4x_5 + x_2x_{11}) \right],
\end{aligned}$$

wzór na B_{mnkl} ma postać:

$$\begin{aligned}
B_{mnkl} = & \frac{\pi^2}{a} \left[\frac{ml}{b} (z_1z_3 + 0,5z_4z_5 + z_8z_9) \right] + \frac{\alpha l}{b} [z_{13}(z_8 - z_3) + z_5(z_{12} - z_{11})] + \\
& + \frac{m}{2a} [z_4(z_6 - z_7) + z_2(z_9 - z_1)] + \frac{\alpha}{a} [0,5z_2z_{13} - z_7z_{12} - z_6z_{11}].
\end{aligned}$$

Stosując metodę Ritza-Timoshenki otrzymamy m równań liniowych jednorodnych postaci:

$$\frac{\partial A}{\partial C_{mn}} = 0,$$

rozwiązując następnie wyznacznik tego układu równań, otrzymamy ostatecznie wielkość jednostkowych naprężeń tnących q_{kr} (krytyczne).

W pracy [5] autor wykazał, że dostateczną dokładność rozwiązania zagadnienia dla celów praktycznych uzyskuje się, przyjmując sześć a nawet pięć składników szeregu Fouriera. Toteż w niniejszej pracy ograniczono się do przyjęcia $m = 1, 2, \dots, 5$ i $n = 1, 2, \dots, 5$.

W celu porównania wielkości naprężeń krytycznych dla funkcji ugięcia osłazdżyny określonej wzorem (1.2) i (3.1) odpowiednie wartości podano w tablicy 2 i 3.

Tablica 2. q^{**} — Jednostkowe naprężenia krytyczne obliczone dla funkcji wg wzoru (1.2)

Lp.	c	m, n	m, n			
			1, ..., 2	1, ..., 3*	1, ..., 4	1, ..., 5
1		0	40,42	33,27	33,17	32,96
2		0,5	402,00	230,91	201,54	196,95
3		1	746,79	409,69	342,86	326,61
4		1,5	1075,32	573,71	465,74	432,64
5		2	1381,95	718,95	567,00	512,54
6		2,5	1662,88	843,57	646,39	568,27
7		3	1916,20	947,72	706,18	605,06
8		3,5	2141,74	1032,97	749,90	628,61
9		4	2340,47	1101,65	781,26	643,47
10		5	2665,42	1199,56	819,19	658,72

Uwaga: dane w tablicy pomnożone przez 10^{-3} dają wartości q w [MN/m]. Grubość rdzenia c pomnożone przez 10^{-2} dają wartości w [m].

Tablica 3. q^* — Jednostkowe naprężenia krytyczne obliczone dla funkcji wg wzoru (3.1)

Lp.	m, n c	1, ..., 2	1, ..., 3	1, ..., 4	1, ..., 5
		1	0	55,2	38,85
2	0,5	361,45	196,95	157,89	145,4
3	1	656,6	341,71	262,33	232,72
4	1,5	937,54	474,0	352,85	304,1
5	2	1200	590,85	427,42	358,45
6	2,5	1597,65	719,17	485,88	397,1
7	3	1659,45	773,81	529,74	423,3
8	3,5	1855	841,69	561,72	449,86
9	4	2028,3	896,24	584,67	451,26
10	5	2535	1002,6	614,79	464,4

Dane w tablicy pomnożone przez 10^{-3} dają wartość q w [MN/m]. Grubość rdzenia c pomnożona przez 10^{-2} dają wartość w [m].

Z porównania jednostkowych naprężeń tnących według funkcji (1.2) (wartości z dwoma gwiazdkami w tablicy 2) z naprężeniami krytycznymi dla funkcji (3.1) (wartości z jedną gwiazdką w tablicy 3) można wyciągnąć bardzo ciekawy wniosek:

— Dla cienkich jednolitych płyt $c = 0$ naprężenia q^{**} są znacznie mniejsze od naprężeń q^* , co oznacza, że funkcja (3.1) daje zawyżone wartości naprężeń.

Podstawową przyczyną wzrostu naprężeń jest częściowe niespełnienie warunków brzegowych, o czym była mowa wcześniej.

Widać więc, że jednolite płyty (bez rdzenia) są bardziej «wrażliwe» na warunki brzegowe.

— Dla grubości rdzenia $c > 0$, np. dla $c = 0,5 \cdot 10^{-2}$ [m] funkcja (3.1) daje dokładniejsze rozwiązania w stosunku do funkcji (1.2) o około 35%.

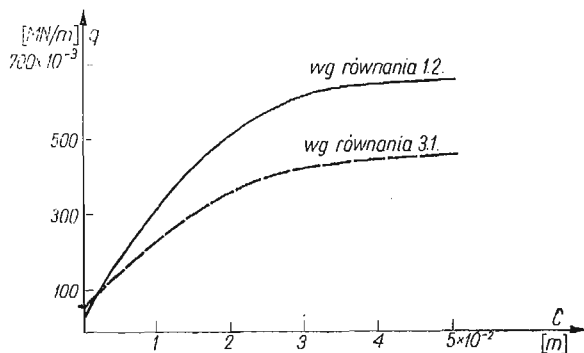
Tablica 4. Procentowy błąd względny $\Delta\%$

Lp.	m, n c	1, ..., 2	1, ..., 3	1, ..., 4	1, ..., 5
		1	0	-26,7	-14,4
2	0,5	11,3	17,2	26,4	35,5
3	1	13,7	19,9	30,7	40,3
4	1,5	14,6	21	32	42,3
5	2	15,2	21,7	32,7	42,9
6	2,5	14	17,2	33,0	43,1
7	3	15,5	22,5	33,2	42,9
8	3,5	15,7	22,7	33,4	42,6
9	4	15,4	22,8	33,6	42,6
10	5	15	20	33	42

$$\Delta = \frac{q^{**} - q^*}{q^*} \cdot 100\%, \quad q^{**} \text{ wg tabl. 2, } q^* \text{ wg tabl. 3}$$

Dla bardziej przejrzystego zobrazowania różnicy wielkości naprężeń krytycznych, na rys. 4 przedstawiono zależność tych naprężeń od grubości rdzenia. Z przebiegu tych krzywych widać, że można dobrać taką grubość rdzenia, powyżej której jego zwiększanie nie daje efektywnych przyrostów naprężeń krytycznych, a tylko niepotrzebnie zwiększa ciężar płyty.

Przykładowe obliczenie naprężeń krytycznych wykonano dla płyty, która charakteryzowała się następującymi parametrami: $a = 28,5 \cdot 10^{-2}$ [m]; $b = 19 \cdot 10^{-2}$ [m]; $D = 17,02 \cdot 10^{-6}$ [MNm]; $t = 0,1 \cdot 10^{-2}$ [m]; $E = 185475,95$ [MN/m²]; $G_u = 23,55$ [MN/m²]; $\nu_u = 0,17$; $\nu = 0,3$ i $E_u = 58,81$ [MN/m²].



Rys. 4. Zależność naprężeń krytycznych od grubości rdzenia obliczonych dla pięciu liczb szeregu (1.2) i (3.1)

Dla ułatwienia bardzo żmudnych obliczeń autor opracował program «MINQ» na EMC umożliwiającą obliczanie naprężeń krytycznych dla dowolnej liczby wyrazów szeregu Fouriera.

W oparciu o parametry płyty, służące jako dane wejściowe, otrzymujemy α_{kr} ; S_{kr} ; q_{kr} ; τ_{kr} i krytyczne obciążenia.

Program dostępny jest w Instytucie Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej.

Literatura cytowana w tekście

1. А. Я. АЛЕКСАНДРОВ и др., *Расчет трехслойных панелей*, Москва 1960.
2. P. P. BIJLAARD, *Analysis of the elastic and elastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities*, J. Aeronautical Sci., **18**, 5 (1961) 339—349.
3. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Warszawa 1963.
4. Fr. ROMANÓW, *Stateczność płyt dwuwarstwowych, wolnopodparty, przy obciążeniu ścinającym*. Konstrukcje Lekkie — Konferencje Naukowo-Techniczne w Instytucie Lotnictwa, Warszawa 1966.
5. Fr. ROMANÓW, *Wpływ ilości składników szeregu Fouriera na dokładność obliczeń naprężeń krytycznych w ścinanych płytach przekładkowych*, Prace Instytutu Lotnictwa, 46 (1971).

Резюме

КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН РАБОТАЮЩИХ НА СДВИГ

Используя энергетический метод решена задача расчета критических напряжений трехслойных пластин, подвергнутых воздействию срезающих нагрузок. В результате учёта деформируемости заполнителя по всей его толщине предложенный метод — в отличие от общеизвестных

теорий, например [1, 2] — может применяться без каких-либо ограничений для пластин произвольных геометрических размеров, в которых заполнитель состоит из легких изотропных пенообразных материалов. Рассматриваемые пластины были рассчитаны численным методом, а результаты приведены в таблице 1, 2 и на рис. 4.

Summary

CRITICAL STRESSES OF SIMPLY SUPPORTED SANDWICH PLATES IN SHEAR

Energy method is used to solve the problem of critical stresses in sandwich plates subject to shear loads. Since the deformation over entire thickness of the core was taken into consideration (contrary to the well-known theories [1, 2]), the present theory can be used without any limitation for the plates of arbitrary dimensions with cores made of foam-type isotropic materials. The results of numerical analysis are given in table 1, 2 and Fig. 4.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1977 r.