

ITERACYJNA METODA OBLICZANIA DOWOLNYCH CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH  
W ZAKRESIE LINIOWO SPRĘŻYSTYM

JÓZEF WRANIK (BIELSKO-BIAŁA)

1. Wstęp

Praca niniejsza stanowi uogólnienie prac [1, 10, 11, 12, 13] i dotyczy rozwiązywania metodą iteracyjną dowolnych ciał odkształcalnych w zakresie liniowo sprężystym. Można również korzystać z niej przy rozwiązywaniu równań z operatorami liniowymi.

Przedstawiana metoda ma wiele cech wspólnych z metodą perturbacji [2, 8] i jest w pewnym sensie jej uogólnieniem. W metodzie perturbacji [8] wprowadza się do równania parametr perturbacyjny  $\varepsilon$  przyjmujący wartości z przedziału  $[0, 1]$ . Równanie operatorowe

$$(1.1) \quad \mathcal{U}Z = g$$

przyjmuje wówczas postać równania zastępczego

$$(1.2) \quad \mathcal{U}(\varepsilon)Z_\varepsilon = g,$$

a dla szczególnych wartości  $\varepsilon$ , np.  $\varepsilon = 0$ , otrzymujemy równanie

$$(1.3) \quad \mathcal{U}\dot{Z} = g,$$

które rozwiązuje się prościej, lub którego rozwiązanie jest znane.

Rozwijając rozwiązanie  $Z_\varepsilon$  równania (1.2) w szereg zbieżny względem potęg  $\varepsilon$ , otrzymuje się ciąg równań, z których przy szczególnej wartości  $\varepsilon$  np.  $\varepsilon = 0$ , wyznacza się kolejne przybliżenia, a rozwiązaniem równania (1.2) jest wspomniany szereg dla  $\varepsilon = 1$ .

FUNG w pracy [2] przedstawia dla szczególnego przypadku zagadnienia teorii sprężystości metodę zaburzeń przez zmianę współczynnika Poissona  $\nu$  (metoda pomysłu WESTERGAARDA). Można zauważyć, że wprowadzenie parametru perturbacyjnego  $\varepsilon$  jako mnożnika  $\nu$  zmienia wartość  $\nu$ , a tym samym zmienia operator równania Naviera. WESTERGAARD nie wprowadza w sposób jawny współczynnika  $\varepsilon$ , dobiera jednak taką szczególną wartość  $\nu = m$ , aby rozwiązanie równania Naviera było prostsze lub znane.

W metodzie iteracji, proponowanej w niniejszej pracy, również nie operuje się w sposób jawny parametrami zaburzającymi stan dany, lecz przyjmuje się operator zastępczy prostszy (lub ciało zastępcze prostsze), zbliżony swą postacią do danego, taki jednak, aby otrzymywany szereg był zbieżny. Za pomocą przyjętego operatora zastępczego, stacjonarnego dla procesu iteracyjnego, rozwiązuje się ciąg zagadnień prostszych, z których tworzy się szereg nieskończony, zbieżny do rozwiązania danego.

Jedną z zalet proponowanej metody jest możliwość przeprowadzenia oceny błędów, jakie się popełnia przy rozwiązywaniu zagadnień teorii sprężystości, w przypadku idealizacji ciała odkształcalnego, gdy np. ciało niejednorodne zastępujemy w obliczeniach ciałem jednorodnym, lub anizotropowe — ciałem izotropowym, itp.

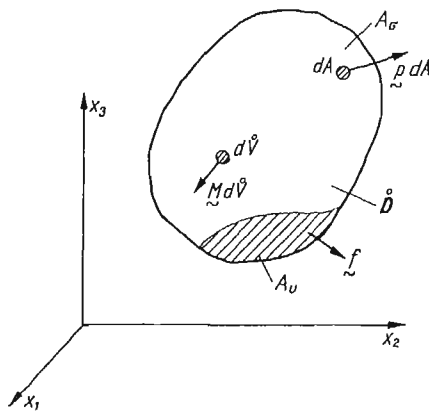
Ocena błędów jest tu prostsza niż np. w metodzie elementów skończonych, za pomocą której oszacowanie wpływu cech sprężystości ciała na wyniki obliczeń jest możliwe wyłącznie przez porównanie rozwiązań.

W opracowaniu skorzystano z zapisu operatorowego, oznaczając operatory wyróżnionym drukiem np.  $\mathcal{U}$ , i opierając się na stwierdzeniu, że «działaniom na operatorach w  $C^n$  odpowiadają analogiczne działania na odpowiadających im macierzach według reguł algebry liniowej» [5].

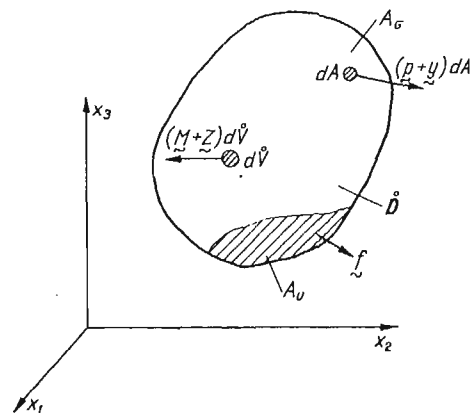
Używać będziemy prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych odniesienia; w układzie takim znika różnica między kontrawariantnością i kowariantnością, w związku z czym prowadzenie przekształceń za pomocą rachunku tensorowego sprowadziłoby się wyłącznie do notacji tensorowej, operującej wskaźnikami, które tu zajmowałyby miejsce innym wskaźnikiem, niezbędnym z fizycznego punktu widzenia. W tym przypadku wygodniejsza będzie notacja operatorowa i macierzowa. Składowe stanów naprężenia i odkształcenia traktować będziemy jako składowe wektorów.

## 2. Sformułowanie problemu

Dane jest dowolne ciało  $V$  stałe odkształcalne i sprężyste, anizotropowe lub niejednorodne (rys. 1) z dowolnymi warunkami brzegowymi (trzęcie podstawowe zagadnienie brzegowe), w którym na powierzchni  $A_\sigma$  dane są obciążenia  $\mathbf{p}$ , a na powierzchni  $A_u$  — przemieszczenia  $\mathbf{f}$  [6].



Rys. 1. Ciało dane  $V$  (układ dany  $U$ ) \*



Rys. 2. Ciało zastępcze  $\tilde{V}$

Rozwiązanie tego zagadnienia można przeprowadzić za pomocą pewnego z a s t ę p - c z e g o c i a ł a s p r ęż y s t e g o  $\tilde{V}$ , przystającego geometrycznie do ciała  $V$ , o identycznych jak w ciele  $V$  powierzchniach  $A_\sigma$  i  $A_u$  ograniczających ciało (rys. 2). Zakładamy, że jest możliwe rozwiązanie ciała zastępczego. Będzie to więc z zasady ciało o prostszych cechach fizycznych np. izotropowe i jednorodne.

Punktem wyjścia jest równowaga obu ciał pod względem pól przemieszczeń, przy wynikających stąd różnych polach sił. Można więc stwierdzić, że siły masowe  $\mathbf{M}$  (znane)

\* Symbole podkreślone wężykami na rysunkach odpowiadają symbolom pogrubionym w tekście.

obciążające ciało  $V$  nie są równe siłom masowym  $\mathbf{M} + \mathbf{Z}$  (nieznanym), obciążającym ciało zastępcze  $\dot{V}$ , oraz odpowiednio obciążenia  $\mathbf{p}$  (znane) na powierzchni  $A_\sigma$  ciała  $V$  nie są równe obciążeniom  $\mathbf{p} + \mathbf{y}$  (nieznanym) na powierzchni  $A_\sigma$  ciała  $\dot{V}$ . Przemieszczenia  $\mathbf{f}$  na  $A_u$  natomiast są sobie równe w obu ciałach  $V$  i  $\dot{V}$ , co wynika z założonej równości pól przemieszczeń.

Gdyby znane były siły masowe  $\mathbf{Z}$  i siły powierzchniowe  $\mathbf{Y}$ , to przy założonej możliwości rozwiązania ciała  $\dot{V}$  można by obliczyć przemieszczenia  $\dot{\mathbf{U}}$ , które z kolei przy założonej równości pól przemieszczeń ciał  $V$  i  $\dot{V}$  byłyby podstawą do określenia sił wewnętrznych w ciele  $V$ . Problemem podstawowym jest tu więc (pomijając rozwiązanie ciała  $\dot{V}$ ) określenie niewiadomych sił  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$ .

Można zauważyć analogię do metody sił dla układów prętowych lub dla ciał z niejednorodnymi warunkami brzegowymi, w której przyjmuje się układ zastępczy z niewiadomymi siłami (tu odpowiednio  $\dot{V}$ ,  $\mathbf{M} + \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{p} + \mathbf{y}$ ), a następnie z warunków nierozdzielności (tu  $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ ) określa się równania algebraiczne lub całkowe z niewiadomymi siłami.

Równoważność obu układów przedstawionych na rys. 1 i 2 pod względem pól przemieszczeń można udowodnić, rozpatrując zadanie odwrotne do sformułowanego i opierając się na twierdzeniu Kirchoffa o jednoznaczności rozwiązań zagadnień teorii sprężystości dla ciała liniowo sprężystego z dodatnio określoną funkcją energii odkształcenia.

Założmy, że znane są siły masowe  $\mathbf{M} + \mathbf{Z}$  i  $\mathbf{p} + \mathbf{y}$  w ciele  $\dot{V}$ ; korzystając np. z relacji (2.2) obliczyć możemy  $\dot{\mathbf{U}}$ , a następnie na podstawie (2.1) określamy wektor  $\mathbf{U}$ , który jest podstawą do jednoznacznego (uwagi końcowe pracy) określenia wektora odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

Wektor odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}$  wyznacza jednoznacznie naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  w ciele  $V$  (2.6), a te z kolei określają jednoznacznie siły masowe  $\mathbf{M}$  i siły powierzchniowe  $\mathbf{p}$ . Zadanie postawione jest więc również jednoznacznie określone, a tym samym istnieje realna możliwość doboru sił  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$  takich, by układy, dany i zastępczy, były sobie równoważne.

Wektor przemieszczeń  $\dot{\mathbf{U}}$  w ciele  $\dot{V}$  można przedstawić za pomocą tensora przemieszczeniowego Greena  $\dot{\mathbf{U}}$  ciała  $\dot{V}$ , w postaci równań całkowych, w których niewiadomymi funkcjami są składowe wektorów  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$ .

Korzystając z założonej równości

$$(2.1) \quad \mathbf{U} = \dot{\mathbf{U}},$$

otrzymujemy

$$(2.2) \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} = \int_V \dot{\mathbf{U}} \mathbf{Z} dV + \int_A \dot{\mathbf{U}} \mathbf{y} dA - \int_A \dot{\mathbf{P}} \mathbf{f} dA + \int_V \dot{\mathbf{U}} \mathbf{M} dV + \int_A \dot{\mathbf{U}} \mathbf{p} dA,$$

gdzie  $\dot{\mathbf{U}}$  oznacza tensor przemieszczeniowy Greena ciała  $\dot{V}$ ,  $\dot{\mathbf{P}}$  macierz oddziaływań dla ciała  $\dot{V}$  na powierzchni  $A_u$  przy obciążeniu w punkcie  $\boldsymbol{\xi}$  siłą masową  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{Z}$  wektor nieznanymi sił masowych w ciele  $\dot{V}$ ,  $\mathbf{y}$  wektor nieznanymi sił powierzchniowych na powierzchni  $A_\sigma$  w ciele  $\dot{V}$ .

Zauważmy, że siły masowe i powierzchniowe w ciałach  $V$  i  $\dot{V}$  można przedstawić następująco:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{M} &= -\mathfrak{B} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \mathbf{U}, & \mathbf{M} + \mathbf{Z} &= -\mathfrak{B} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \dot{\mathbf{U}}, \\ \mathbf{p} &= \mathfrak{H} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \mathbf{U}, & \mathbf{p} + \mathbf{y} &= \mathfrak{H} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \dot{\mathbf{U}}, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathfrak{B}$  oznacza operator różniczkowy równań równowagi,  $\mathfrak{W}^T$  transponowany operator różniczkowy równań równowagi,  $\mathfrak{D}$  macierz cech sprężystości ciała  $V$ ,  $\bar{\mathfrak{D}}$  macierz cech

sprężystości ciała zastępczego  $\dot{V}$ ,  $\mathfrak{H}$  macierz kosinusów kierunkowych normalnej do powierzchni  $A_\sigma$  ciała  $V$  lub  $\dot{V}$ .

A zatem

$$\mathfrak{W} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\mathbf{U} = \boldsymbol{\epsilon}, \quad \bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\dot{\mathbf{U}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}},$$

$$\mathfrak{H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & 0 & \cos \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_3 \\ 0 & \cos \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_3 & 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & 1 & \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \\ 0 & & & \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy stąd po przekształceniach

$$(2.4) \quad \mathbf{Z} = -\mathfrak{W}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\dot{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{y} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\dot{\mathbf{U}}.$$

Podstawiając (2.4) do (2.2) otrzymamy również

$$(2.5) \quad \dot{\mathbf{U}} = - \int_V \dot{\mathbf{U}}\mathfrak{W}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\dot{\mathbf{U}}dV + \int_A \dot{\mathbf{U}}\mathfrak{H}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\dot{\mathbf{U}}dA + \\ - \int_A \mathfrak{P}fdA + \int_V \dot{\mathbf{U}}MdV + \int_A \dot{\mathbf{U}}pdA.$$

Otrzymaliśmy układ równań całkowych z niewiadomymi składowymi wektora przemieszczeń  $\dot{\mathbf{U}}$ . Po obliczeniu wektora  $\dot{\mathbf{U}}$  obliczymy z (2.3) obciążenia ciała  $\dot{V}$ . Spełnione jest (2.1). Siły wewnętrzne i odkształcenia ciała  $V$  obliczymy w zwykły sposób według wzorów

$$(2.6) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{W}^T\mathbf{U}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}.$$

Rozwiązanie układu równań całkowych (2.5) jest problemem złożonym o dużym stopniu trudności. Spróbujemy go rozwiązać, omijając równania całkowe w postaci (2.5), a korzystając z proponowanej metody iteracji.

### 3. Matematyczne sformułowanie metody iteracji

Równania operatorowe, przedstawione w postaci

$$(3.1) \quad \mathbf{z} = \mathfrak{U}\mathbf{z} + \mathbf{g}$$

dobrze nadają się do iteracyjnego rozwiązywania i są szeroko omówione np. w pracach [4, 7, 8, 9].

Słabo opracowane są metody iteracyjne równań operatorowych w postaci

$$(3.2) \quad \mathfrak{U}\mathbf{z} = \mathbf{g}$$

i nie w każdym przypadku można je sprowadzić do postaci (3.1), [4]. Proponowana metoda iteracji nadaje się zarówno dla równań typu (3.1), jak i (3.2), bez konieczności sprowadzania równań do postaci (3.1).

Niech dane będzie równanie operatorowe (3.2) z określonymi warunkami granicznymi, gdzie  $\mathcal{U}$  jest operatorem liniowym,  $\mathbf{g}$  — danym elementem przestrzeni wektorowej. Pod pojęciem operacji rozumiemy tu będziemy operację, która funkcji  $\mathbf{z}$  przyporządkowuje funkcję  $\mathcal{U}\mathbf{z}$ , przy czym może to być operacja różniczkowania, całkowania, przekształcenia za pomocą macierzy, bądź też operacja związana z jakąkolwiek metodą rozwiązywania ciała odkształcalnego, lub innego dowolnego obiektu.

Załóżmy, że przedstawienie rozwiązania równania (3.2) w postaci zamkniętej jest trudne lub niemożliwe i przyjmijmy, że istnieje taki operator zastępczy  $\dot{\mathcal{U}}$ , za pomocą którego równanie o postaci

$$(3.3) \quad \dot{\mathcal{U}}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}$$

jest rozwiązywalne, czyli

$$(3.4) \quad \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathcal{U}}^{-1}\mathbf{g}.$$

Jeżeli operator  $\dot{\mathcal{U}}$  jest «zbliżony» do operatora  $\mathcal{U}$ , wówczas rozwiązanie (3.4) możemy traktować jako przybliżenie poszukiwanego wektora  $\mathbf{z}$ , czyli  $\mathbf{z} \cong \dot{\mathbf{z}}$ .

Przeprowadźmy operację  $\mathcal{U}$  na wektorze  $\dot{\mathbf{z}}$ , otrzymamy

$$(3.5) \quad \mathcal{U}\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{g}},$$

a podstawiając do (3.5) rozwiązanie (3.4) otrzymamy

$$(3.6) \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathcal{S}\mathbf{g},$$

gdzie operator  $\mathcal{S} = \mathcal{U}\dot{\mathcal{U}}^{-1}$ .

Przedstawmy rozwiązanie  $\mathbf{z}$  i wektor  $\mathbf{g}$  w postaci

$$(3.7a) \quad \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \Delta_1 \mathbf{z},$$

$$(3.7b) \quad \mathbf{g} = \dot{\mathbf{g}} + \Delta_1 \mathbf{g}.$$

Przy podstawieniu (3.7) do (3.2) otrzymamy

$$\dot{\mathcal{U}}\dot{\mathbf{z}} + \mathcal{U}\Delta_1 \mathbf{z} = \dot{\mathbf{g}} + \Delta_1 \mathbf{g},$$

a stąd

$$(3.8) \quad \mathcal{U}\Delta_1 \mathbf{z} = \Delta_1 \mathbf{g}.$$

Ponieważ na podstawie (3.7b):

$$\Delta_1 \mathbf{g} = \mathbf{g} - \dot{\mathbf{g}} = (\mathfrak{J} - \mathcal{S})\mathbf{g}, \quad \text{gdzie } \mathfrak{J}\mathbf{g} = \mathbf{g},$$

otrzymamy

$$(3.9) \quad \mathcal{U}\Delta_1 \mathbf{z} = \mathbf{r}\mathbf{g},$$

gdzie  $\mathbf{r} = \mathfrak{J} - \mathcal{S}$  jest operatorem, a  $\mathfrak{J}$  operatorem jednostkowym [4].

Otrzymane równanie (3.9) jest podobne do równania (3.2). Postępując identycznie jak z równaniem (3.2) otrzymamy następną przybliżenie  $\Delta_1 \dot{\mathbf{z}}$  oraz  $\Delta_2 \dot{\mathbf{g}}$  i  $\Delta_2 \mathbf{g}$ .

W kolejnym  $i$ -tym kroku iteracyjnym otrzymamy

$$(3.10a) \quad \Delta_{i-1} \dot{z} = \dot{U}^{-1} r^{-1} g,$$

$$(3.10b) \quad \Delta_{i-1} \dot{g} = \mathfrak{S} r^{i-1} g,$$

$$(3.10c) \quad \Delta_i g = r^i g,$$

gdzie operacja  $r^i$  wyraża się wzorem rekurencyjnym:

$$(3.11) \quad r^i g = r(r^{i-1} g).$$

W rezultacie otrzymujemy ciąg wektorów  $\Delta_i \dot{z}$  i w myśl (3.7) rozwiązanie możemy przedstawić w postaci

$$(3.12) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \dot{z},$$

przy czym  $\Delta_0 \dot{z} = \dot{z}$ .

Korzystając z (3.10a) otrzymamy

$$(3.13) \quad z = \dot{U}^{-1}(g + r g + r^2 g + \dots + r^i g + \dots)$$

lub

$$(3.14) \quad z = \dot{U}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} r^i g,$$

przy czym operacja  $r^0 g = \mathfrak{I} g = g$ .

Jeżeli założymy, że szereg (3.13) jest jednostajnie zbieżny w obszarze rozpatrywanym i że wykonalne są operacje  $\mathfrak{U}$ ,  $\dot{\mathfrak{U}}$ ,  $\dot{\mathfrak{U}}^{-1}$  w tym obszarze, to podstawiając (3.13) do (3.2), otrzymamy

$$\mathfrak{U} z = \dot{\mathfrak{U}} \dot{\mathfrak{U}}^{-1}(g + r g + r^2 g + \dots) = \mathfrak{S} g + \mathfrak{S} r g + \mathfrak{S} r^2 g + \dots = \dot{g} + \Delta_1 \dot{g} + \Delta_2 \dot{g} + \dots = g,$$

co należało wykazać.

Zbieżność szeregu (3.14) zależy od operatora  $r$ , a co za tym idzie od operatora zastępczego  $\dot{\mathfrak{U}}$ . Warunki, jakie spełniać musi operator  $\dot{\mathfrak{U}}$ , aby szereg (3.14) był jednostajnie zbieżny, muszą być rozpatrywane niezależnie dla poszczególnych zagadnień fizyki czy matematyki (zagadnienia teorii sprężystości, równania algebraiczne, równania różniczkowe, równania całkowe).

W większości zagadnień nie jest możliwe przedstawienie rozwiązania w postaci (3.14) z powodu trudności w określeniu operatora  $r$ . W takim przypadku rozwiązanie przeprowadzić można wg algorytmu, który doprowadził do szeregu (3.14), a  $\dot{\mathfrak{U}}^{-1} g$  traktować jako symbol określający rozwiązanie układu zastępczego. Jako przykłady zastosowania podanego sposobu mogą posłużyć prace [1, 10, 11, 12, 13].

Niżej ilustruje się podaną metodę przykładem równania różniczkowego drugiego rzędu, w którym operatora  $r$  nie wyznaczamy. Zagadnienie równań różniczkowych wymaga niewątpliwie osobnego rozpatrzenia.

Dane jest równanie

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \alpha^2 z = 0,$$

przy czym  $z(0) = 0$  i  $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = a$ . Tutaj  $\mathfrak{U} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2\right)$ ,  $g = 0$ .

Przyjmijmy operator zastępczy  $\dot{\mathcal{U}} = d^2/dx^2$ . Otrzymamy przy uwzględnieniu warunków początkowych

$$\dot{z} = \dot{\mathcal{U}}^{-1}g = ax$$

oraz

$$\dot{g} = \mathcal{U}\dot{z} = \mathcal{U}(ax) = \alpha^2 ax, \quad \Delta_1 g = g - \dot{g} = rg = -\alpha^2 ax.$$

W drugim kroku iteracyjnym otrzymujemy równanie:

$$\mathcal{U}\Delta_1 z = -\alpha^2 ax$$

oraz

$$\Delta_1 \dot{z} = \dot{\mathcal{U}}^{-1}(-\alpha^2 ax) = -\alpha^2 a \frac{x^3}{3!}, \quad \Delta_1 \dot{g} = \mathcal{U}\left(-\alpha^2 a \frac{x^3}{3!}\right) = -\alpha^2 ax - \alpha^4 a \frac{x^3}{3!},$$

$$\Delta_2 g = \Delta_1 g - \Delta_1 \dot{g} = \alpha^4 ax^3, \quad \mathcal{U}\Delta_2 z = \alpha^4 a \frac{x^3}{3!}.$$

Postępując podobnie otrzymamy według (3.13)

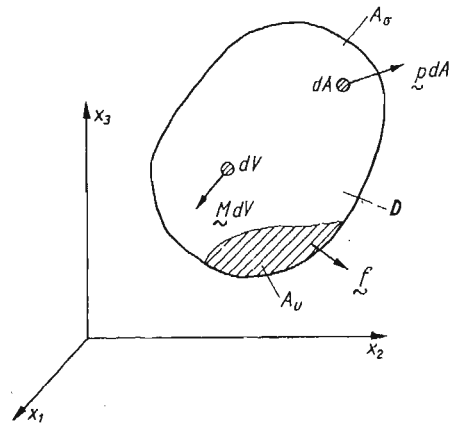
$$z = ax - a\alpha^2 \frac{x^3}{3!} + a\alpha^4 \frac{x^5}{5!} - \dots = \frac{a}{\alpha} \left( \alpha x - \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} - \dots \right)$$

więc  $z = \frac{a}{\alpha} \sin(\alpha x)$ .

#### 4. Zastosowanie metody iteracyjnej do dowolnego ciała odkształcalnego

Problem sformułowany w p. 2 rozwiążemy metodą iteracyjną zgodnie z p. 3.

Konieczne jest wprowadzenie dodatkowych symboli na następujące układy: ciało  $V$  z danymi warunkami brzegowymi nazwiemy układem danym  $U$  (rys. 1), ciało zastępcze  $\dot{V}$  z określonymi przez układ  $U$  warunkami brzegowymi nazwiemy układem zastępczym  $\dot{U}$  (rys. 3), ciało  $V$  z warunkami brzegowymi wynikającymi z rozwiązania układu zastępczego  $\dot{U}$  oznaczymy przez  $W$ . Niewiadome siły masowe  $Z$  i powierzchniowe  $y$  wyznaczmy na drodze iteracyjnej.



Rys. 3. Układ zastępczy  $\dot{U}$

Założeniem podstawowym metody jest znajomość lub możliwość rozwiązania ciała zastępczego obciążonego dowolnie siłami masowymi i powierzchniowymi. Ponieważ ciało zastępcze ma charakterystyki zbliżone do charakterystyk ciała danego, można przypusz-

czać, że obciążenie ciała zastępczego, tak jak ciała danego, da również zbliżone rozwiązania (3.3).

W początkowym kroku iteracyjnym obciążamy więc ciało zastępcze siłami danymi  $\mathbf{p}$  na powierzchni  $A_\sigma$ , danymi siłami masowymi  $\mathbf{M}$  oraz danymi przemieszczeniami  $\mathbf{f}$  na powierzchni  $A_u$ .

Z rozwiązania układu zastępczego  $\dot{U}$  podobnie do (3.4) otrzymujemy: wektor naprężeń  $\dot{\sigma}$ , wektor przemieszczeń  $\dot{\mathbf{u}}$  i wektor odkształceń  $\dot{\epsilon}$ . Założona w p. 2 równoważność pól przemieszczeń ciał  $V$  i  $\dot{V}$  daje relację

$$(4.1) \quad \overset{w}{\epsilon} = \dot{\epsilon}$$

równoznaczną z wymuszeniem w ciele  $V$  odkształceń  $\dot{\epsilon}$ .

Otrzymujemy układ  $W$ . Naprężenia  $\overset{w}{\sigma}$  i obciążenia  $\overset{w}{\mathbf{M}}$  i  $\overset{w}{\mathbf{p}}$  układu  $W$  obliczymy korzystając z równości (4.1), mianowicie

$$(4.2) \quad \mathcal{D}\overset{w}{\sigma} = \dot{\mathcal{D}}\dot{\sigma}.$$

Przekształcając (4.2) otrzymamy (patrz (3.5), (3.6)),

$$(4.3) \quad \overset{w}{\sigma} = \mathcal{S}\dot{\sigma},$$

gdzie

$$(4.4) \quad \mathcal{S} = \mathcal{D}^{-1}\dot{\mathcal{D}}$$

Korzystając z (2.3) i (4.3) otrzymujemy obciążenia układu  $W$ :  
siły masowe

$$(4.5a) \quad \overset{w}{\mathbf{M}} = -\mathcal{W}\overset{w}{\sigma} = -\mathcal{W}\mathcal{S}\dot{\sigma},$$

siły powierzchniowe

$$(4.5b) \quad \overset{w}{\mathbf{p}} = \mathcal{H}\overset{w}{\sigma} = \mathcal{H}\mathcal{S}\dot{\sigma}.$$

Rozwiązanie układu  $U$  przedstawimy w postaci podobnej do (3.7), tj.

$$(4.6) \quad U = W + \Delta_1 U,$$

przy czym w miejsce symboli  $U$ ,  $W$ ,  $\Delta_1 U$  w równaniu (4.6) można podstawić odpowiednie wektory odkształceń, wówczas  $\epsilon = \overset{w}{\epsilon} + \Delta_1 \epsilon$ , wektory przemieszczeń —  $\mathbf{u} = \overset{w}{\mathbf{u}} + \Delta_1 \mathbf{u}$ , naprężeń —  $\sigma = \overset{w}{\sigma} + \Delta_1 \sigma$ , siły masowe —  $\mathbf{M} = \overset{w}{\mathbf{M}} + \Delta_1 \mathbf{M}$ , lub siły powierzchniowe —  $\mathbf{p} = \overset{w}{\mathbf{p}} + \Delta_1 \mathbf{p}$ .

Otrzymamy obciążenia układu  $\Delta_1 \mathbf{u}$  w postaci

$$(4.7a) \quad \Delta_1 \mathbf{p} = \mathcal{H}\mathbf{r}\dot{\sigma},$$

$$(4.7b) \quad \Delta_1 \mathbf{M} = -\mathcal{W}\mathbf{r}\dot{\sigma},$$

$$(4.7c) \quad \Delta_1 \mathbf{f} = 0,$$

gdzie

$$(4.8) \quad \mathbf{r} = \mathcal{J} - \mathcal{S}, \quad \mathcal{J} \text{ — macierz jednostkowa.}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ  $\Delta_1 U$ , który jest ciałem  $V$  z siłami  $\Delta_1 \mathbf{p}$  (4.7a) na powierzchni  $A_\sigma$ , z siłami masowymi  $\Delta_1 \mathbf{M}$  (4.7b) i zerowymi przemieszczeniami  $\Delta_1 \mathbf{f} = 0$  (4.7c) na powierzchni  $A_u$ .



Rozwiązanie układu  $\Delta_1 U$  można przedstawić w postaci analogicznej do (4.6)

$$(4.9) \quad \Delta_1 U = \Delta_1 W + \Delta_2 U,$$

przy czym układ  $\Delta_1 W$  otrzymujemy w drugim kroku iteracyjnym, podobnie do układu  $W$ .

W kolejnym  $i$ -tym kroku iteracyjnym otrzymamy:

obciążenia układu  $\Delta_i \dot{U}$

$$(4.10a) \quad \Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \Delta_i \mathbf{p} = \mathfrak{H}r \Delta_{i-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

$$(4.10b) \quad \Delta_i \dot{\mathbf{M}} = \Delta_i \mathbf{M} = -\mathfrak{B}r \Delta_{i-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

rozwiązanie układu  $\Delta_i U$  w postaci wektorów naprężeń  $\Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}$  i odkształceń  $\Delta_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , odkształcenia w układzie  $\Delta_i W$

$$(4.11) \quad \Delta_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \Delta_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}},$$

naprężenia w układzie  $\Delta_i W$ ,

$$(4.12) \quad \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathfrak{S} \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

obciążenia układu  $\Delta_i W$

$$(4.13) \quad \Delta_i \dot{\mathbf{M}} = -\mathfrak{B} \mathfrak{S} \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \mathfrak{H} \mathfrak{S} \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

obciążenia układu  $\Delta_{i+1} U$

$$(4.14a) \quad \Delta_{i+1} \mathbf{p} = \mathfrak{H}r \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

$$(4.14b) \quad \Delta_{i+1} \mathbf{M} = -\mathfrak{B}r \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Rozwiązanie układu  $\Delta_i U$  przedstawić możemy podobnie do (4.6) i (4.9) w postaci

$$(4.15) \quad \Delta_i U = \Delta_i W + \Delta_{i+1} U,$$

a stąd wynika przedstawienie rozwiązania układu  $U$  w postaci nieskończonego szeregu:

$$(4.16) \quad U = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i W.$$

Postać (4.16) rozwiązania możemy przedstawić przy wykorzystaniu (4.15) następująco:

$$(4.17) \quad U = U - \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_{i+1} U.$$

Związek (4.17) jest dowodem zbieżności szeregu (4.16) przy warunku

$$(4.18) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_{i+1} U = 0.$$

Można zauważyć, że o wielkościach składowych wektorów obciążenia  $\Delta_i \mathbf{p}$  i  $\Delta_i \mathbf{M}$  decyduje macierz  $r$ ; wzory (4.10) i (4.14). Jeżeli macierz  $r$  dobierzemy tak, aby spełnione były nierówności:

$$(4.19) \quad \|\Delta_{i+1} \mathbf{p}\| < \|\Delta_i \mathbf{p}\|, \quad \|\Delta_{i+1} \mathbf{M}\| < \|\Delta_i \mathbf{M}\|,$$

wówczas również normy wektorów naprężenia i odkształcenia będą maleć z kolejnym krokiem iteracyjnym, co wynika wprost z (4.14) i definicji normy. Otrzymamy

$$\|\mathfrak{B}r \Delta_{i+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\| < \|\mathfrak{B}r \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}\|,$$

a stąd

$$(4.20) \quad \|\Delta_{i+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\| < \|\Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}\|$$

i podobnie

$$(4.21) \quad \|\Delta_{i+1}\dot{\mathbf{e}}\| < \|\Delta_i\dot{\mathbf{e}}\|.$$

Przy  $i \rightarrow \infty$  normy wektorów zmierzają do zera, a tym samym składowe odpowiednich wektorów osiągną wartości zerowe.

Zagadnieniem osobnym jest możliwość spełnienia warunków (4.19). Mogą one być spełnione przy takim doborze macierzy  $\mathbf{r}$ , aby zachodziła nierówność

$$(4.22) \quad \|\mathbf{r}\| < 1,$$

wynikająca z twierdzeń związanych ze zbieżnością szeregu macierzowego.

Macierz  $\mathbf{r}$  (4.8) określona jest przez ciało zastępcze  $\check{V}$ ; zatem im bliższe będzie ono ciału danemu  $V$ , tym norma macierzy  $\mathbf{r}$  będzie mniejsza, a zbieżność lepsza. Zważając na możliwość rozwiązania ciała zastępczego  $\check{V}$  dobierzemy jego charakterystyki jak najprostsze, np. ciało izotropowe, jednorodne i jednospójne. Przy z góry określonym rodzaju ciała zastępczego różniącego się dość znacznie od ciała danego, zachodzi problem optymalnego doboru wartości charakterystyk ciała zastępczego ze względu na nierówność (4.22).

Zagadnienie ciała zastępczego wygodniej jest rozpatrywać dla określonego rodzaju ciała danego (tarcze, płyty, powłoki); problem ten będzie przedmiotem osobnych opracowań.

Obliczmy jeszcze obciążenia  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$ . Podobnie do (4.16), możemy utworzyć szereg nieskończony z ciągu rozwiązań  $\Delta_i\dot{U}$ , wtedy

$$(4.23) \quad \mathbf{M} + \mathbf{Z} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{p} + \mathbf{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}} + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{p}}.$$

Korzystając z (4.10) otrzymamy

$$(4.24) \quad \mathbf{Z} = -\mathfrak{B}\mathfrak{r}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{i-1} \dot{\mathbf{\sigma}}\right), \quad \mathbf{y} = \mathfrak{S}\mathfrak{r}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{i-1} \dot{\mathbf{\sigma}}\right),$$

lub

$$(4.25) \quad \mathbf{Z} = -\mathfrak{B}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}\right), \quad \mathbf{y} = \mathfrak{S}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}\right),$$

ponieważ  $\Delta_i \dot{\mathbf{M}} = -\mathfrak{B}\Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}$  i  $\Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \mathfrak{S}\Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}$ .

## 5. Uwagi końcowe

Rozważmy jeszcze związane z samonaprężeniami zagadnienie jednoznaczności rozwiązania. Czy narzucając w układzie  $\Delta_i W$  przemieszczenia otrzymujemy jednoznacznie określone naprężenia? Odkształcenia niezależne od sił zewnętrznych powodują wystąpienie samonaprężeń tylko wtedy, gdy nie spełniają warunków nierozdzielności [3]. W przypadkach rozpatrywanych warunki nierozdzielności są zawsze spełnione, gdyż wektor odkształceń narzucony w układzie  $\Delta_i W$  ciała danemu jest wzięty z rozwiązania układu  $\Delta_i \dot{U}$ , który możemy zawsze rozwiązać jednoznacznie.

Rozwiązanie w każdym kroku iteracyjnym jest więc jednoznaczne, a tym samym i suma szeregu nieskończonego — lub w rozwiązaniu przybliżonym suma częściowa — są jednoznacznie określone.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. BUDZIANOWSKI, F. ANDERMANN, J. WRANIK, *Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych*, Mech. Teor. i Stos., 2, 12 (1974).
2. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Warszawa, 1969.
3. M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, Część I, Warszawa 1954.
4. А. Ю. Лучка, *Теория и применение метода осреднения функциональных поправок*, Киев 1963.
5. W. MŁAK, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, Warszawa 1970.
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1970.
7. A. PISKOREK, *Równania całkowite*, Warszawa 1971.
8. G. N. POŁOŻY, *Metody przybliżonych obliczeń*, Warszawa 1966.
9. Ю. Д. Соколов, *Метод осреднения функциональных поправок*, Киев 1967.
10. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania tarcz o ciągłej zmianie grubości według funkcji jednej zmiennej*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo, 41 (1976).
11. J. WRANIK, *Iteracyjne odwracanie macierzy kwadratowych występujących w mechanice budowli*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo, 41 (1976).
12. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania tarcz w zakresie liniowo sprężystym*, Materiały XVIII Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Wisła, wrzesień 1976.
13. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania dowolnych tarcz w zakresie liniowo sprężystym*, II nagroda na konkursie PTMTS, Poznań, grudzień 1976.

#### Резюме

#### ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛ

В работе представлен общий итерационный метод, который можно применять как при решении произвольных линейно упругих тел, обладающих положительно определенной функцией энергии деформации, так и при решении некоторых математических задач.

Применительно к задачам теории упругости, метод состоит в замене данного тела некоторым фиктивным телом, для которого решается ряд краевых задач при изменяющихся в итерационном процессе нагрузках. Это приводит к образованию бесконечного ряда векторов напряжений и деформаций.

Предлагаемый метод похож на метод малого параметра, так как состоит в незначительном изменении параметров данного тела (данного оператора) и последовательном решении фиктивного тела (упрощенного оператора) при условии сходимости приближенных решений к точному.

Формулируя решение задачи теории упругости при помощи фиктивного тела можно заметить аналогию с методом сил.

#### Summary

#### ITERATION METHOD OF CALCULATING ARBITRARY DEFORMABLE BODIES IN A LINEAR ELASTIC RANGE

In the present work a certain general iteration method is described applicable to arbitrary linear elastic bodies with a positive definite strain energy function and to some other mathematical problems. The considered iteration method, as applied to deformable bodies, consists in replacing the given body by an auxiliary

one, and then solving consecutively the auxiliary system with loads changing in the iterative procedure. In the solution infinite series of stress and deformation vectors are constructed. A certain similarity of the present method to the perturbation and force methods is pointed out.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1977 r.*

---