

ZAGADNIENIA SPRĘŻANIA W OŚRODKACH DWUFAZOWYCH*

JAN HOLNICKI-SZULC (WARSZAWA)

Podejście do zagadnień sprężania, jako do analizy wstępnych stanów naprężenia utrwalonych w ustroju, pomimo niewystępowania obciążeń zewnętrznych prezentowane było w różnych aspektach w kilku pracach ostatnich lat [1 - 5].

Artykuł ten stanowi kontynuację rozważań na temat sprężania opisanych w pracy [6], gdzie analizowane były wstępne stany odkształceń ϵ^R i naprężeń σ^R wywołane w ośrodku ciągłym przez wymuszenie pierwotnych stanów odkształceń $\dot{\epsilon}$ (dystorsji) lub związanych z nimi naprężeń $\dot{\sigma}$ niezgodnych z geometrycznymi i statycznymi więzami ośrodka. Celem wywołania stanów wstępnych była optymalna regulacja stanów końcowych $\epsilon = \epsilon^L + \epsilon^R$, $\sigma = \sigma^L + \sigma^R$, gdzie ϵ^L , σ^L są ustalonymi stanami związanymi z obciążeniem zewnętrznym. Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest sprężanie ustrojów dwufazowych. Analizowane są wstępne stany wywołane w każdej z faz: $\epsilon^{R'}$, $\epsilon^{R''}$, $\sigma^{R'}$, $\sigma^{R''}$, na skutek wymuszenia niezależnych pól pierwotnych odkształceń $\dot{\epsilon}'$, $\dot{\epsilon}''$ lub odpowiadających im pól pierwotnych naprężeń $\dot{\sigma}'$, $\dot{\sigma}''$. Stany wstępne pozostają trwale w ustroju pomimo braku obciążeń zewnętrznych. Celem sprężania, czyli wymuszania stanów wstępnych, jest optymalna regulacja stanów końcowych w jednej lub w obu fazach, przy czym narzucony jest na stany wstępne i końcowe warunek nierozdzielności obu faz.

Jako pierwowzór rozpatrywanego modelu ciągłego ośrodka dwufazowego można przyjąć ośrodek ciągły z gęsto rozproszoną strukturą kratową fazy sprężającej (rys. 1). Stosując kontynuacyjny model opisu tego kompozytu otrzymujemy wyidealizowany ciągły ośrodek dwufazowy posiadający tę cechę, że każdemu punktowi geometrycznemu z obszaru V przyporządkowane są dwa punkty materialne należące do różnych faz.

Zaprezentowany zostanie ogólny opis sprężania dwufazowego, z którego otrzymać będzie można opisy przypadków szczególnych: sprężania wewnętrznego [6] oraz sprężania zewnętrznego (omawianego dalej w pracy) polegającego na wprowadzeniu niezależnych, lecz spełniających więzy geometryczne w każdej z faz odkształceń pierwotnych $\dot{\epsilon}'$, $\dot{\epsilon}''$, a następnie na zespoleniu obu faz, co związane jest z wymuszeniem wspólnej deformacji wstępnej $\epsilon^{R'} = \epsilon^{R''} = \epsilon^R$.

W pracy omówiono także przypadek szczególny sprężania zewnętrznego, tzw. sprężanie powierzchniowe (rys. 2), w którym obie fazy nie przenikają się, lecz stykają się wzdłuż powierzchni kontaktowej S . Przyczyną wywołania stanów wstępnych jest w tym przypadku

* Praca wykonana została w ramach współpracy polsko-amerykańskiej (fundusz Marii Skłodowskiej-Curie NO. INT 75-08722) na temat «Optymalizacja elementów i systemów konstrukcyjnych».

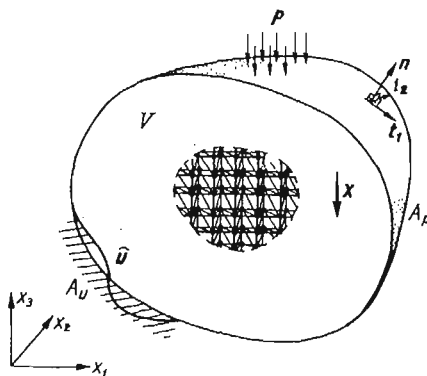
wprowadzenie niezależnych deformacji pierwotnych brzegu S obu faz, a następnie ich zespolenie.

Po ogólnym sformułowaniu zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufazowych o przenikających się fazach i wprowadzeniu formalizmu jego opisu (rozdz. 1) wyznaczono (rozdz. 2) stany naprężeń i odkształceń wstępnych generowane w ośrodku przez dowolnie dane pola dystorsji. W rozdziale 3 przeanalizowano sprężanie powierzchniowe w ośrodkach o fazach rozdzielonych powierzchnią kontaktową. W rozdziale 4 przedyskutowano rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania ze względu na minimalizację wyężenia w fazie sprężanej w przypadku ośrodka o dwu przenikających się fazach (4a) oraz w przypadku sprężania powierzchniowego (4b). W rozdz. 5 przedstawiono przykład sprężania powierzchniowego dwuwarstwowej rury ciśnieniowej. Przykładem zastosowania sprężania zewnętrznego w ośrodkach o przenikających się fazach jest sprężanie elementów siatkobetonowych.

1. Zależności podstawowe dla sprężonego ośrodka o dwu przenikających się fazach

Rozpatrujemy dwufazowe ciała liniowo sprężyste zajmujące w R_3 obszar V ograniczony brzegiem $A = A_p \cup A_u$ (rys. 1).

Na obciążenie zewnętrzne (użytkowe) ustroju składa się obciążenie polem sił masowych \mathbf{X} w obszarze V , polem obciążeń brzegowych \mathbf{p} na części A_p brzegu oraz polem wymuszonych przemieszczeń $\hat{\mathbf{u}}$ na części A_u brzegu. Ograniczamy rozważania do zagadnień statycznych, do małych odkształceń oraz do regularnych pól tensorowych, których składowe w układzie kartezjańskim x_k ($k = 1, 2, 3$) są funkcjami klasy C^2 .



Rys. 1.

Wstępne stany odkształceń faz przedstawić można jako sumy pól dystorsji i odkształceń związanych prawem Hooke'a z wywołanymi naprężeniami wstępnymi [7].

$$(1.1) \quad \overset{R}{\epsilon}' = \dot{\epsilon}' + \mathbf{B}' \overset{R}{\sigma}', \quad \overset{R}{\epsilon}'' = \dot{\epsilon}'' + \mathbf{B}'' \overset{R}{\sigma}'',$$

skąd, definiując:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}' &= \mathbf{A}' \dot{\epsilon}', & \dot{\sigma}'' &= \mathbf{A}'' \dot{\epsilon}'', \\ \dot{\epsilon}' &= \mathbf{B}' \dot{\sigma}', & \dot{\epsilon}'' &= \mathbf{B}'' \dot{\sigma}'' \end{aligned}$$

otrzymujemy zmodyfikowane związki konstytutywne stanów wstępnych:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \overset{R}{\sigma}' &= \mathbf{A}'(\overset{R}{\epsilon}' - \dot{\epsilon}'), & \overset{R}{\sigma}'' &= \mathbf{A}''(\overset{R}{\epsilon}'' - \dot{\epsilon}''), \\ \overset{R}{\epsilon}' &= \mathbf{B}'(\overset{R}{\sigma}' + \dot{\sigma}') & \overset{R}{\epsilon}'' &= \mathbf{B}''(\overset{R}{\sigma}'' + \dot{\sigma}''). \end{aligned}$$

Zmodyfikowane związki konstytutywne dla stanów końcowych, będących superpozycją stanów wstępnych i stanów użytkowych wywołanych przez obciążenia zewnętrzne: $\epsilon' = \overset{R}{\epsilon}' + \overset{L}{\epsilon}'$, $\epsilon'' = \overset{R}{\epsilon}'' + \overset{L}{\epsilon}''$, $\sigma' = \overset{R}{\sigma}' + \overset{L}{\sigma}'$, $\sigma'' = \overset{R}{\sigma}'' + \overset{L}{\sigma}''$ przyjmują, postać:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma' &= \mathbf{A}'(\epsilon' - \dot{\epsilon}'), & \sigma'' &= \mathbf{A}''(\epsilon'' - \dot{\epsilon}''), \\ \epsilon' &= \mathbf{B}'(\sigma' + \dot{\sigma}'), & \epsilon'' &= \mathbf{B}''(\sigma'' + \dot{\sigma}''). \end{aligned}$$

Na końcowe stany naprężeń narzucone są więzy statyczne

$$(1.5) \quad \mathcal{R}(\sigma' + \sigma'', \mathbf{X}, \mathbf{p}) = 0$$

rozumiane jako równania równowagi

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma' + \sigma'') + \mathbf{X} &= 0 & \text{w obszarze } V, \\ (\sigma' + \sigma'')\mathbf{n} &= \mathbf{p} & \text{na brzegu } A_p. \end{aligned}$$

Na końcowe stany odkształceń narzucone są warunki wspólnej deformacji obu faz

$$(1.7) \quad \epsilon' = \epsilon'' = \epsilon$$

oraz więzy geometryczne

$$(1.8) \quad \mathcal{G}(\epsilon, \hat{\mathbf{u}}) = 0$$

rozumiane jako warunki:

zgodności odkształceń Saint-Venanta w obszarze V :

$$(1.9) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \epsilon = 0;$$

zgodności pola deformacji ϵ z przemieszczeniami $\hat{\mathbf{u}}$ danymi na brzegu A_u .

W przypadku analizy sprężania ośrodka ciągłego gęsto rozłożoną wiązką cięgien sprężających (np. model kablobetonu) należałoby uogólnić rozważania dopuszczając różne postacie więzów geometrycznych (1.7), (1.8) dla obu faz oraz wprowadzając ograniczenia stanu naprężeń w fazie sprężającej do naprężeń rozciągających.

Zamiast posługiwać się wielkościami opisującymi stany w poszczególnych fazach, wygodniej będzie wprowadzić ich symetryczne i antysymetryczne części związane odpowiednio z wielkościami makroskopowymi, opisującymi stany zastępczego, «średnionego» ośrodka, oraz z wielkościami mikroskopowymi, opisującymi lokalne zaburzenia stanów makroskopowych w obu fazach.

Zdefiniujemy w związku z tym symetryczne i antysymetryczne (względem obu faz) części pierwotnych stanów odkształceń i naprężeń oraz operatorów konstytutywnych:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^s &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}''), \\ \dot{\epsilon}^a &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}' - \dot{\epsilon}''), \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad \sigma^s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma''),$$

$$\sigma^a \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\dot{\sigma}' - \dot{\sigma}'');$$

$$(1.12) \quad A^s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(A' + A''),$$

$$A^a \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(A' - A'');$$

$$(1.13) \quad B^s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(B' + B''),$$

$$B^a \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(B' - B'').$$

Wyrażając związki (1.2) stanów pierwotnych przez nowo zdefiniowane składowe, otrzymujemy:

$$(1.14) \quad \dot{\sigma}^s = A^s \dot{\epsilon}^s + A^a \dot{\epsilon}^a,$$

$$\dot{\sigma}^a = A^a \dot{\epsilon}^s + A^s \dot{\epsilon}^a;$$

$$(1.15) \quad \dot{\epsilon}^s = B^s \dot{\sigma}^s + B^a \dot{\sigma}^a,$$

$$\dot{\epsilon}^a = B^a \dot{\sigma}^s + B^s \dot{\sigma}^a.$$

Wprowadzając rozkład stanów odkształcenia ϵ' , ϵ'' oraz stanów naprężenia σ' , σ'' na części symetryczne (opisujące makroodkształcenia oraz makronaprężenia ośrodka dwufazowego) i antysymetryczne (opisujące mikroodkształcenia oraz mikronaprężenia w poszczególnych fazach), analogicznie do (1.10), (1.11), zmodyfikowane związki konstytutywne (1.4) przyjmują postać:

$$(1.16) \quad \sigma^s = A^s(\epsilon^s - \dot{\epsilon}^s) + A^a(\epsilon^a - \dot{\epsilon}^a),$$

$$\sigma^a = A^a(\epsilon^s - \dot{\epsilon}^s) + A^s(\epsilon^a - \dot{\epsilon}^a);$$

$$(1.17) \quad \epsilon^s = B^s(\sigma^s + \dot{\sigma}^s) + B^a(\sigma^a + \dot{\sigma}^a),$$

$$\epsilon^a = B^a(\sigma^s + \dot{\sigma}^s) + B^s(\sigma^a + \dot{\sigma}^a),$$

zaś równania więzów (1.5), (1.7), (1.8) przyjmują postać:

$$(1.18) \quad \mathcal{R}(\sigma^s, \mathbf{X}, \mathbf{p}) = 0, \quad \mathcal{C}(\epsilon^s, \hat{\mathbf{u}}) = 0, \quad \epsilon^a = 0.$$

Wstawiając (1.16)₁, (1.14)₁ do równań (1.18)_{1,2} oraz wykorzystując (1.18)₃ otrzymujemy opis stanu odkształcenia $\epsilon = \epsilon^s$, wspólnego dla obu faz w zależności od stanów pierwotnych i obciążeń zewnętrznych:

$$(1.19) \quad \mathcal{R}(A^s \epsilon - \dot{\sigma}^s, \mathbf{X}, \mathbf{p}) = 0,$$

$$\mathcal{C}(\epsilon, \hat{\mathbf{u}}) = 0.$$

Widać stąd, że wpływ pola dystorsji na stan odkształceń ϵ zależy od niezgodności σ^s z więzami statycznymi i jest identyczny ze stanem odkształceń wywołanych przez zastępcze obciążenie zewnętrzne – $\mathcal{R}(\dot{\sigma}^s)$. Jest to uogólnienie «analogii sił masowych» [7, 8] na przypadek ośrodka dwufazowego.

Wstawiając (1.17)₁ i (1.15)₁ do równań (1.18)_{1,2}, natomiast (1.17)₂ i (1.15)₂ do warunku (1.18)₃ otrzymujemy opis makro- i mikronaprężeń w zależności od stanów pierwotnych i obciążeń zewnętrznych:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(\boldsymbol{\sigma}^s, \mathbf{X}, \mathbf{p}) &= 0, \\ \mathcal{C}(\mathbf{B}^s \boldsymbol{\sigma}^s + \mathbf{B}^a \boldsymbol{\sigma}^a + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s, \hat{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \mathbf{B}^a \boldsymbol{\sigma}^s + \mathbf{B}^s \boldsymbol{\sigma}^a + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a &= 0. \end{aligned}$$

Widać stąd, że wpływ na stan naprężeń wywołany przez pola dystorsji zależy od niezgodności makrodystorsji $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$ z więzami geometrycznymi (por. «tensor niezgodności» KRÖNERA [9]) oraz od niezgodności dystorsji z ograniczeniem dotyczącym wspólnoty odkształceń obu faz (mikrodystorsje $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a$).

Układ związków (1.19) (1.20) opisuje najogólniejszy przypadek sprężania dwufazowego. Uwzględniając w nich znikające stany pierwotne uzyskujemy opis stanów odkształceń i naprężeń ustroju niesprężonego. Oznaczamy te stany jako stany użytkowe $\overset{L}{\boldsymbol{\epsilon}}, \overset{L}{\boldsymbol{\sigma}}^s, \overset{L}{\boldsymbol{\sigma}}^a$ i traktować je będziemy w rozważaniach jako znane.

Podstawiając w związkach (1.19) (1.20), znikające obciążenie zewnętrzne: siłowe $\mathbf{X} = 0, \mathbf{p} = 0$ oraz przemieszczeniowe $\hat{\mathbf{u}} = 0$, uzyskujemy opis wstępnych stanów odkształcenia $\overset{R}{\boldsymbol{\epsilon}}$ i naprężeń $\overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^s, \overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^a$, ortogonalnych do stanów użytkowych w tym sensie, że nie dają wkładu do globalnej energii sprężystej ustroju.

Z postaci równań (1.19), (1.20) widać, że w przypadku dwu faz o jednorodnych cechach sprężystych ($\mathbf{B}^a = 0$) makro i mikrostanu rozprzegają się. Odkształcenia wstępne $\overset{R}{\boldsymbol{\epsilon}}$ i makronaprzężenia wstępne $\overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^s$ zależą jedynie od makrodystorsji $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$, zaś mikronaprzężenia wstępne $\overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^a$ zależą jedynie od mikrodystorsji $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a$ i są lokalnie samozrównoważone.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z ustrojem jednofazowym, przyjmując mikrowielkości jako znikające, otrzymujemy z wypisanych zależności związki opisujące «sprężanie wewnętrzne» [6].

«Sprężanie zewnętrzne» zdefiniujemy jako taki przypadek, w którym pola mikro- i makrodystorsji spełniają jednorodne więzy geometryczne (1.8):

$$(1.21) \quad \mathcal{C}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s) = 0, \quad \mathcal{C}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a) = 0.$$

Techniczna realizacja tego sposobu sprężania polega na wywołaniu niezależnych, geometrycznie zgodnych deformacji pierwotnych obu faz, a następnie na ich zespoleniu i cofnięciu przyczyn wywołujących deformacje pierwotne. Sposób ten może być zastosowany do sprężania elementów betonowych siatką ciągien.

2. Analiza stanów wstępnych wywołanych sprężeniem

Przeprowadzimy konstrukcję rozwiązania zagadnień brzegowych (1.19) oraz (1.20), opisujących wstępne stany naprężeń i odkształceń, po położeniu $\mathbf{X} = 0, \mathbf{p} = 0, \hat{\mathbf{u}} = 0$.

Wykorzystajmy w tym celu rozkład pól odkształceń i naprężeń pierwotnych na (ortogonalne w sensie iloczynu $\int \dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dv$) części składowe opisujące odpowiednio stany zgodne

z więzami statycznymi (1.5) i oznaczone symbolem \mathcal{R} oraz stany zgodne z więzami geometrycznymi (1.8) i oznaczone symbolem \mathcal{C} [6]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^s &= \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s, \\ \dot{\epsilon}^a &= \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}^s &= \dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s, \\ \dot{\sigma}^a &= \dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^a, \end{aligned}$$

przy czym:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s) &= \mathcal{R}(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a) = 0, \\ \mathcal{C}(\dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s) &= \mathcal{C}(\dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a) = 0. \end{aligned}$$

Związki (1.14) i (1.15) wiążące stany pierwotne przyjmują po uwzględnieniu (2.1), (2.2) postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}^s &= \mathbf{A}^s(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{A}^a(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a), \\ \dot{\sigma}^a &= \mathbf{A}^a(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{A}^s(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a); \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^s &= \mathbf{B}^s(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{B}^a(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^a), \\ \dot{\epsilon}^a &= \mathbf{B}^a(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{B}^s(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^a). \end{aligned}$$

Podstawiając (2.2)₁ do (1.19)₁ i wykorzystując (2.3)₁ otrzymujemy z równań więzów statycznych

$$(2.6) \quad \epsilon^R = \mathbf{A}^s \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s.$$

Rozwiązanie to spełnia także równania więzów geometrycznych (1.19)₂, co wynika z podstawienia (2.4)₁ do (2.6)

$$(2.7) \quad \epsilon^R = \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s + \mathbf{A}^s \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a$$

oraz z uwzględnienia warunku (2.3)₂.

Zatem rozwiązania (2.6) lub (2.7) opisują poszukiwane pola odkształceń wstępnych wyrażone przez wywołujące je pola naprężeń lub odkształceń pierwotnych.

Podobnie, wykorzystując związki (2.1)₁, (2.5) i (2.3)₂ można sprawdzić, że stany:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathcal{R}}^R &= -\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s, \\ \sigma_{\mathcal{R}}^a &= -\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a - \mathbf{B}^s \mathbf{B}^a \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s \end{aligned}$$

stanowią rozwiązanie układu równań (1.20), a zatem opisują poszukiwane pola naprężeń wstępnych wywołane przez naprężenia pierwotne. Pola te można wyrazić przez odkształcenia pierwotne przekształcając rozwiązania (2.8) przy użyciu związków (2.4), (2.5):

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathcal{R}}^s &= \mathbf{A}^s \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a, \\ \sigma_{\mathcal{R}}^a &= -\mathbf{B}^s [\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \mathbf{B}^a (\mathbf{A}^s \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a)]. \end{aligned}$$

Podstawiając w rozwiązaniach (2.6) ÷ (2.9) $\dot{\epsilon} = \mathbf{0}$, $\dot{\sigma} = \mathbf{0}$ otrzymujemy opis stanów wstępnych wywołanych sprężaniem wewnętrznym ośrodka dwufazowego, który wzbogaca rozwiązanie zagadnienia sprężania wewnętrznego ośrodka jednofazowego [6] o człony mikronaprężeń wstępnych $\sigma_{\mathcal{R}}^R$ wywołanych na skutek różnic sztywności obu faz.

W przypadku sprężania zewnętrznego (1.21) należy przyjąć (por. (2.6)):

$$(2.10) \quad \dot{\epsilon}^s = \dot{\epsilon}_{\varrho}^s, \quad \dot{\epsilon}^a = \dot{\epsilon}_{\varrho}^a, \quad \dot{\sigma}^s = \dot{\sigma}_{\varrho}^s, \quad \dot{\sigma}^a = \dot{\sigma}_{\varrho}^a,$$

co prowadzi do rozwiązania w postaci:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \epsilon^R &= \mathbf{A}^s \dot{\sigma}_{\varrho}^s = \dot{\epsilon}_{\varrho}^s + \mathbf{A}^s \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\varrho}^a, \\ \sigma^R &= 0, \\ \sigma^a &= -\mathbf{B}^s \dot{\epsilon}_{\varrho}^a = -\dot{\sigma}_{\varrho}^a - \mathbf{B}^s \mathbf{B}^a \dot{\sigma}_{\varrho}^s \end{aligned}$$

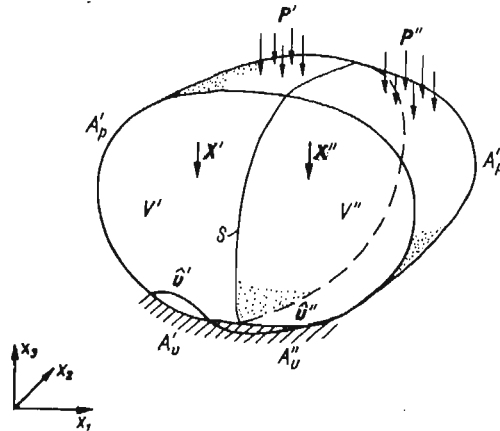
gubiącej w stosunku do rozwiązań (2.6) ÷ (2.9) makronapężenia wstępne σ^R , charakterystyczne dla sprężania wewnętrznego.

Związki (2.11) pozwalają określić jednoznacznie stany wstępne w obu fazach.

Cechą charakterystyczną sprężania zewnętrznego ośrodka o dwu przenikających się fazach jest możliwość lokalnego sterowania stanów naprężeń w jednej z faz (w fazie sprężanej I) przez wymuszanie odpowiednich mikronaprężeń σ^s . Wprowadzane w tym celu dystorsje $\dot{\epsilon}_{\varrho}^a$ (realizowane np. przez sprężającą fazę siatki kratowej II) nie mają wpływu na stan makronaprężeń σ^s .

3. Sprężanie powierzchniowe

W poprzednich rozważaniach zakładaliśmy, że mamy do czynienia z rozmytym kompozytem, którego obie fazy oddziałują na siebie w całym obszarze V . Można jednak uogólnić rozważania na przypadki, w których obszar wzajemnego kontaktu obu faz jest podobszarem V . Zajmijmy się jednym z takich przypadków, gdy obie fazy oddziałują na siebie wzdłuż pewnej powierzchni kontaktowej S .



Rys. 2

Przyjmijmy, że obszar rozpatrywanego ciała składa się z dwu podobszarów V' i V'' (rys. 2). Faza I wypełnia obszar V' zaś faza II wypełnia obszar V'' . Powierzchnia S jest powierzchnią rozdziału obu faz, a zatem jedynym obszarem wzajemnego ich kontaktu.

Niech powierzchnie brzegowe S' , S'' obu faz doznają pierwotnych zmian kształtu opisanych jako niezależne przemieszczenia pierwotne u' , u'' . Jeśli pomimo niezgodności

zdeformowanych pierwotnie brzegów wymusimy ich zgodne zespolenie, to wywołane zostaną w obu fazach wstępne stany odkształcenia $\epsilon^R, \epsilon^{R'}$ i naprężenia $\sigma^R, \sigma^{R'}$. Wywołane pole przemieszczeń wstępnych \mathbf{u}^R jest polem ciągłym w całym obszarze V , natomiast pola odkształceń i naprężeń wstępnych są ciągłe w podobzarach V' i V'' , jednak ich składowe mogą doznawać skoku na powierzchni S . Opisany sposób wprowadzania stanów wstępnych nazwijmy «sprężaniem powierzchniowym».

W rozważaniach ograniczamy się do rozpatrywania rozwiązań odpowiednio regularnych i zakładamy w związku z tym, że rozpatrywane funkcje są w obszarach V' i V'' klasy C^2 .

Pierwotne deformacje brzegów S' i S'' będą zatem występowały w powiązaniu z odpowiednio regularną deformacją poszczególnych faz $\dot{\epsilon}'$ i $\dot{\epsilon}''$.

Zdefiniujemy deformacje pierwotne obu faz jako stany odkształceń wyznaczone jednoznacznie przez związki:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}'(\mathbf{A}'\dot{\epsilon}') &= 0, \\ \mathcal{C}'(\dot{\epsilon}') &= 0; \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}''(\mathbf{A}''\dot{\epsilon}'') &= 0, \\ \mathcal{C}''(\dot{\epsilon}'') &= 0, \end{aligned}$$

wszędzie poza S oraz przez warunki zgodności $\dot{\epsilon}'$ i $\dot{\epsilon}''$ odpowiednio z przemieszczeniami $\dot{\mathbf{u}}'$ i $\dot{\mathbf{u}}''$ na powierzchni S .

Ponieważ deformacje pierwotne spełniają więzy geometryczne obu faz, sprężanie powierzchniowe jest przypadkiem szczególnym sprężania zewnętrznego, w którym obszar kontaktu obu faz ograniczony jest do powierzchni S .

Zdefiniujemy obciążenia pierwotne brzegów S', S'' :

$$(3.3) \quad \dot{\mathbf{p}}' = \mathbf{A}'\dot{\epsilon}'\mathbf{n}', \quad \dot{\mathbf{p}}'' = \mathbf{A}''\dot{\epsilon}''\mathbf{n}''.$$

Związki (3.1), (3.3)₁ oraz (3.3)₂ przyporządkowują jednoznacznie funkcjom przemieszczeń pierwotnych $\dot{\mathbf{u}}', \mathbf{u}'$ na S funkcje obciążeń pierwotnych na S , definiując nam w tym sensie powierzchniowe operatory konstytutywne \mathcal{A}' i \mathcal{A}'' :

$$(3.4) \quad \dot{\mathbf{p}}' = \mathcal{A}'(\dot{\mathbf{u}}'), \quad \dot{\mathbf{p}}'' = \mathcal{A}''(\dot{\mathbf{u}}'').$$

Przyjmując $\dot{\mathbf{p}}', \dot{\mathbf{p}}''$ jako funkcje określone na S , wyznaczyć można ze związków (3.1)_{1,2}, (3.3)₁ oraz (3.2)_{1,2} (3.3)₂ jednoznacznie określone pola $\dot{\epsilon}'$ w V' i $\dot{\epsilon}''$ w V'' . Związki (3.1)_{3,4} (3.2)_{3,4} pozwalają wtedy określić z dokładnością do ruchów sztywnych przemieszczenia pierwotne $\dot{\mathbf{u}}', \dot{\mathbf{u}}''$ przyporządkowane jednoznacznie obciążeniom $\dot{\mathbf{p}}', \dot{\mathbf{p}}''$.

Związki (3.1), (3.2), (3.3) definiują nam w tym sensie odwrotne powierzchniowe operatory konstytutywne \mathcal{B}' i \mathcal{B}'' :

$$(3.5) \quad \dot{\mathbf{u}}' = \mathcal{B}'(\dot{\mathbf{p}}'), \quad \dot{\mathbf{u}}'' = \mathcal{B}''(\dot{\mathbf{p}}'').$$

Dysponując zdefiniowanymi operatorami konstytutywnymi, można sprowadzić analizę sprężania powierzchniowego do analizy wstępnych pól przemieszczeń \mathbf{u}^R i obciążeń $\mathbf{p}^R, \mathbf{p}^{R'}$ wywołanych na powierzchni S przez stany pierwotne $\dot{\mathbf{u}}', \dot{\mathbf{u}}''$ lub $\dot{\mathbf{p}}', \dot{\mathbf{p}}''$.

Postępując analogicznie, jak w rozdz. 1, otrzymujemy zmodyfikowane związki konstytutywne stanów wstępnych:

$$(3.6) \quad \mathbf{p}^R = \mathcal{A}'(\mathbf{u}^R - \dot{\mathbf{u}}'), \quad \mathbf{p}^{R'} = \mathcal{A}''(\mathbf{u}^{R'} - \dot{\mathbf{u}}'');$$

$$(3.7) \quad \mathbf{u}^R = \mathcal{B}'(\mathbf{p}^R + \dot{\mathbf{p}}'), \quad \mathbf{u}^{R'} = \mathcal{B}''(\mathbf{p}^{R'} + \dot{\mathbf{p}}'').$$

Na wstępne stany obciążeń narzucone są więzy statyczne w postaci równań równowagi na powierzchni S

$$(3.8) \quad \mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = 0,$$

zaś na wstępne stany przemieszczeń narzucone są więzy geometryczne w postaci warunku nierozdzielności faz wzdłuż S

$$(3.9) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}'' = \mathbf{u}.$$

Przeprowadzając konstrukcję rozwiązań zagadnienia (3.6) ÷ (3.9) wyznaczających stany wstępne, analogiczną do konstrukcji opisanej w rozdz. 2 otrzymujemy

$$(3.10) \quad \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}^s + \mathcal{A}^{s_0^{-1}} \mathcal{A}^a(\dot{\mathbf{u}}^a)$$

lub

$$(3.11) \quad \mathbf{u} = \mathcal{A}^{s^{-1}}(\dot{\mathbf{p}}^s).$$

W związkach tych $\mathcal{A}^{s^{-1}}$ oznacza operator odwrotny do \mathcal{A}^s , zaś $\mathcal{A}^{s_0^{-1}} \mathcal{A}^a$ oznacza superpozycję operatorów.

Opis wstępnych stanów obciążeń przybiera postać:

$$(3.12) \quad \mathbf{p}^s = 0, \quad \mathbf{p}^a = -\mathbf{p}^a - \mathcal{B}^{s_0^{-1}} \mathcal{B}^a(\dot{\mathbf{p}}^s)$$

lub

$$(3.13) \quad \mathbf{p}^s = 0, \quad \mathbf{p}^a = -\mathcal{B}^s(\dot{\mathbf{u}}^a).$$

Związki (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) opisują jednoznacznie wstępne stany przemieszczeń i obciążeń obu faz na powierzchni S .

4. Optymalna regulacja końcowego stanu naprężenia w jednej z faz

Zajmijmy się, na zakończenie, zagadnieniem sprężania zewnętrznego ze względu na minimalizację wyteżenia w jednej z faz (w fazie sprężanej — np. w fazie I). Faza II spełnia w tym przypadku rolę fazy sprężającej. Końcowe stany w niej wywołane mogą okazać się niekorzystne, czym płacimy za optymalną regulację stanów w fazie I.

4.1. Sprężanie zewnętrzne w ośrodku o dwu przenikających się fazach. Rozważmy na wstępie możliwości wywołania w fazie I dowolnych stanów wstępnych.

Z równań (2.11) wynika, że możliwe jest jednoczesne wywołanie w fazie I dowolnie ustalonych, niezależnych od siebie stanów wstępnego odkształcenia $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'$ i naprężenia $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_q^R$. Należy w tym celu wprowadzić do ustroju stany pierwotnych odkształceń opisane związkami:

$$(4.1) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' + \mathbf{A}^s \mathbf{A}^a \mathbf{B}^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}_q^R, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a = -\mathbf{B}^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}_q^R.$$

Związki (4.1) pozwalają określić pierwotne deformacje poszczególnych faz. Jeżeli przyjmiemy, że stany pierwotne wywoływane są jedynie w fazie sprężającej, czyli wprowadzimy ograniczenie:

$$(4.2) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 0,$$

to z rozwiązania (4.1) wynika, że możliwe jest wywołanie dowolnie ustalonego stanu naprężeń wstępnych $\overset{R}{\sigma}'_g$ w fazie sprężanej przez wymuszenie odkształceń pierwotnych fazy sprężającej

$$(4.3) \quad \dot{\epsilon}'' = 2\mathbf{B}^s \overset{R}{\sigma}'_g.$$

Wynika stąd oczywisty wniosek, że przyjęcie kryterium minimalizacji wyężenia J_σ w fazie I, przy czym

$$(4.4) \quad J_{\sigma'} = \frac{1}{2} \int_V \sigma' \mathbf{B}' \sigma' dv = \frac{1}{2} \int_V (\overset{R}{\sigma}'_g + \overset{L}{\sigma}') \mathbf{B}' (\overset{R}{\sigma}'_g + \overset{L}{\sigma}') dv,$$

prowadzi do rozwiązania

$$(4.5) \quad \overset{R}{\sigma}'_g = -\overset{L}{\sigma}',$$

które związane jest ze znikaniem stanu naprężeń końcowych $\sigma' = 0$ w fazie sprężanej.

4.2. Przypadek sprężania powierzchniowego. Rozważmy możliwość wywołania na powierzchni S fazy sprężanej I dowolnych stanów wstępnych.

Postępując analogicznie jak w p. 4.1 można wykazać, że dowolnie przyjęte stany $\overset{R}{u}'$, $\overset{R}{p}'$ wywołać można przez wprowadzenie jednoznacznie określonych stanów przemieszczeń pierwotnych:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{u}' &= \overset{R}{u}' + (\mathcal{A}^{s_0} \mathcal{A}^a - 1) \mathcal{B}^s(\overset{R}{p}'), \\ \dot{u}'' &= \overset{R}{u}' + (\mathcal{A}^{s_0} \mathcal{A}^a + 1) \mathcal{B}^s(\overset{R}{p}'). \end{aligned}$$

lub stanów obciążeń pierwotnych

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{p}' &= (1 - \mathcal{B}^{s_0} \mathcal{B}^a) \mathcal{A}^s(\overset{R}{u}') - \overset{R}{p}', \\ \dot{p}'' &= (1 + \mathcal{B}^{s_0} \mathcal{B}^a) \mathcal{A}^s(\overset{R}{u}') + \overset{R}{p}'. \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że stany pierwotne wywoływane są jedynie w fazie sprężającej

$$(4.8) \quad \dot{u}' = 0, \quad \dot{p}' = 0,$$

to rozwiązania (4.6) lub (4.7) określają jednoznacznie stany pierwotne na powierzchni S fazy II

$$(4.9) \quad \dot{p}'' = 2\mathcal{A}^s(\overset{R}{u}')$$

lub

$$(4.10) \quad \dot{u}'' = 2\mathcal{B}^s(\overset{R}{p}'),$$

które wzbudzają stany wstępne $\overset{R}{u}'$ lub $\overset{R}{p}'$.

Ze względu na możliwość wywołania (w ogólnym przypadku) dowolnych, niezależnych od siebie stanów wstępnych $\overset{R}{u}'$, $\overset{R}{p}'$, zagadnienia optymalnej regulacji stanów końcowych: $\epsilon' = \overset{R}{\epsilon}' + \overset{L}{\epsilon}'$, $\sigma' = \overset{R}{\sigma}' + \overset{L}{\sigma}'$ ze względu na kryterium (4.4) można rozpatrywać, przy ustalonych stanach użytkowych $\overset{L}{\epsilon}'$, $\overset{L}{\sigma}'$, jako poszukiwanie optymalnych warunków brzegowych $\overset{R}{u}'$, $\overset{R}{p}'$ na powierzchni S ograniczającej V . Po wyznaczeniu stanów $\overset{R}{u}'$, $\overset{R}{p}'$ na S , gwarantujących

optymalne rozkłady σ' , ϵ' w V' , można określić ze związków (4.6) (4.7) stany pierwotne, wywołujące pożądaną regulację stanów końcowych.

Zagadnienie minimalizacji globalnego wyteżenia w fazie I jest w tym przypadku równoważne minimalizacji globalnej energii wewnętrznej $J_{E'}$ fazy I:

$$(4.11) \quad J_{E'} = \frac{1}{2} \int_{V'} \sigma' \epsilon' dv.$$

W celu poszukiwania optymalnych warunków brzegowych na S rozważmy możliwość rozkładu stanów końcowych σ' , ϵ' w fazie I na dwie ortogonalne części składowe, z których jedna podlega regulacji przez sprężanie powierzchniowe, a druga nie:

$$(4.12) \quad \sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2, \quad \epsilon' = \epsilon'_1 + \epsilon'_2.$$

Dla skonstruowania postulowanych rozkładów przyjmijmy z definicji pomocnicze stany ϵ'_p , $\sigma'_p = \mathbf{A}'\epsilon'_p$ jako stany wywołane siłowym obciążeniem zewnętrznym działającym na fazę I przy warunku pełnego utwierdzenia brzegu S . Opisane są one zależnościami:

$$(4.13) \quad \mathcal{R}'(\sigma'_p, \mathbf{X}', \mathbf{p}') = 0, \quad \mathcal{G}'(\epsilon'_p) = 0$$

oraz warunkiem zgodności pola ϵ'_p ze znikającymi przemieszczeniami na S .

Zdefiniujmy analogicznie stany ϵ'_u , $\sigma'_u = \mathbf{A}'\epsilon'_u$ jako stany wywołane przemieszczeniami \hat{u}' brzegu \mathbf{A}'_u , przy warunku swobodnego brzegu S . Opisane są one zależnościami:

$$(4.14) \quad \mathcal{R}'(\sigma'_u) = 0 \quad \mathcal{G}'(\epsilon'_u, \hat{u}') = 0 \quad \sigma'_u \mathbf{n}' = 0 \quad \text{na } S.$$

Niech części rozkładu stanów użytkowych ϵ'_1 , $\sigma'_1 = \mathbf{A}'\epsilon'_1$ stanowią sumę określonych wyżej stanów:

$$(4.15) \quad \epsilon'_1 \stackrel{\text{df}}{=} \epsilon'_p + \epsilon'_u, \quad \sigma'_1 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma'_p + \sigma'_u.$$

Ze względu na jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych (4.13), (4.14) teorii sprężystości, stany ϵ'_1 , σ'_1 określone są jednoznacznie.

Można zatem dokonać w sposób jednoznaczny rozkładu stanów ϵ' , σ' na części składowe (4.12), przy czym części ϵ'_2 , σ'_2 stanowią różnicę pól całkowitych i pól (4.15):

$$(4.16) \quad \epsilon'_2 \stackrel{\text{df}}{=} \epsilon' - \epsilon'_1, \quad \sigma'_2 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma' - \sigma'_1.$$

Są to składowe wywołane oddziaływaniem fazy II poprzez powierzchnię S na fazę I, które spełniają jednorodne równania więzów w obszarze V' :

$$(4.17) \quad \mathcal{R}'(\sigma'_2) = 0, \quad \mathcal{G}'(\epsilon'_2) = 0.$$

Można pokazać, że pola σ'_1 , ϵ'_1 oraz σ'_2 , ϵ'_2 są ortogonalne w sensie ich iloczynu skalarnego

$$(4.18) \quad \int_{V'} \sigma'_1 \epsilon'_2 dv = \int_{V'} \sigma'_2 \epsilon'_1 dv = 0.$$

Pozwala to przedstawić funkcjonal energii wewnętrznej (4.11) w postaci

$$(4.19) \quad I_{E'} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\sigma'_1 \epsilon'_1 + \sigma'_2 \epsilon'_2) dv.$$

Można pokazać, że ze względu na dodatnią określoność obu składników podcałkowych oraz na fakt, że dowolne stany wstępne wywołane w obszarze V' spełniają warunki

(4.17), czyli są ortogonalne do stanów σ'_1, ϵ'_1 wynika, że kryterium (4.11) prowadzi do wyznaczenia stanów wstępnych:

$$(4.20) \quad \overset{R}{\epsilon}' = -\overset{L}{\epsilon}'_2, \quad \overset{R}{\sigma}' = -\overset{L}{\sigma}'_2$$

powodujących znikanie części $\epsilon'_2 = \overset{L}{\epsilon}'_2 + \overset{R}{\epsilon}'$, $\sigma'_2 = \overset{L}{\sigma}'_2 + \overset{R}{\sigma}'$ stanów końcowych.

Wyrażając wniosek (4.20) w języku wielkości powierzchniowych na S otrzymujemy:

$$(4.21) \quad \overset{R}{u}' = -\overset{L}{u}'_2, \quad \overset{R}{p}' = -\overset{L}{p}'_2.$$

Można pokazać, że rozwiązanie optymalne (4.21) wymuszane jest bez udziału stanów pierwotnych fazy I:

$$(4.22) \quad \dot{u}' = 0, \quad \dot{p}' = 0.$$

Zatem korzystając z rozwiązań (4.9) lub (4.10) oraz ze związków (4.21) otrzymujemy optymalne rozkłady pierwotnych przemieszczeń lub obciążeń na brzegu S fazy II:

$$(4.23) \quad \dot{u}' = -2\mathcal{B}^S(\overset{L}{p}'_2), \quad \dot{p}' = -2\mathcal{A}^S(\overset{L}{u}'_2)$$

wywołujących identyczne efekty. W wyniku sprężenia w fazie I pozostają stany końcowe $\sigma' = \overset{L}{\sigma}'_1, \epsilon' = \overset{L}{\epsilon}'_1$, charakteryzujące się, jak to wynika z definicji (4.13)÷(4.15) tym, że obciążenie brzegowe na powierzchni S : $p' = \sigma'n'$ jest takie, jakie wywołane byłoby przez zewnętrzne obciążenia siłowe X', p' fazy I przy pełnym utwierdzeniu brzegu S , zaś przemieszczenia u' powierzchni S są takie, jakie wywołane byłyby przez ruchy \hat{u}' powierzchni A'_u przy warunku swobodnego brzegu S .

W przypadku, gdy nie występują przemieszczenia \hat{u}' na brzegu A'_u stany $\overset{L}{\sigma}'_u, \overset{L}{\epsilon}'_u$ wyznaczone przez (4.14) znikają i sprężenie optymalne daje w fazie I efekt końcowy identyczny z przyjęciem warunku pełnego utwierdzenia $u' = 0$ na powierzchni S .

W przypadku, gdy nie występują siłowe obciążenia zewnętrzne w fazie I ($X' = 0, p' = 0$), stany $\overset{L}{\sigma}'_p, \overset{L}{\epsilon}'_p$, wyznaczone przez (4.13) znikają i sprężenie optymalne daje w fazie I efekt końcowy identyczny z przyjęciem warunku brzegu swobodnego $\sigma'n' = 0$ na powierzchni S .

W przypadku, gdy znikają wszystkie obciążenia zewnętrzne fazy I (siłowe $X = 0, p' = 0$ oraz przemieszczeniowe $\hat{u}' = 0$) to otrzymujemy w wyniku sprężenia optymalnego trywialne rozwiązanie $\overset{R}{p}' = 0, \overset{R}{u}' = 0$ stowarzyszone ze znikaniem stanów końcowych $\sigma' = 0, \epsilon' = 0$ w fazie I. Całe obciążenie zewnętrzne przenoszone jest wtedy przez fazę II.

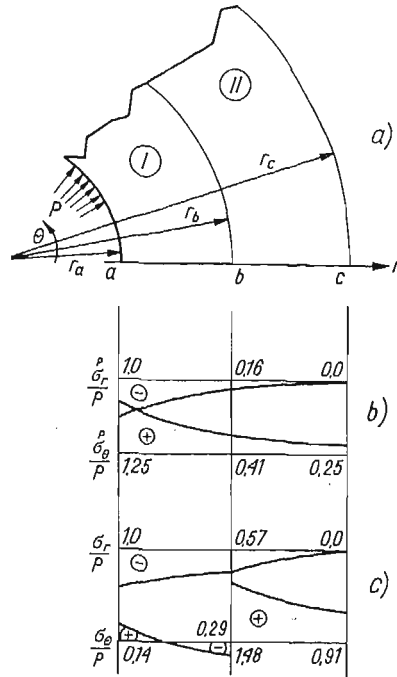
Jako szczególny przypadek sprężania powierzchniowego traktować można sprężanie wywoływane przemieszczeniami pierwotnymi \dot{u} wymuszonymi na części brzegu ustroju A_u (por. [10]).

Traktując brzeg A_u jako powierzchnię S kontaktu faz zauważamy, że stany $\overset{L}{\sigma}'_u, \overset{L}{\epsilon}'_u$ definiowane związkami (4.14) nie istnieją w tym przypadku. Wynika stąd wniosek, że sprężanie ze względu na minimalizację energii wewnętrznej ustroju prowadzi do uzyskania efektu pełnego utwierdzenia $u = 0$ na brzegu A_u w stanie końcowym. Jest to zbieżne z wnioskiem o ortogonalności części stanów użytkowych wywołanych obciążeniem siłowym oraz przemieszczeniami podpór. Optymalne sprężanie ruchami podpór redukuje do zera drugą z wymienionych części stanów użytkowych.

5. Przykład sprężania powierzchniowego

O ile rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania (4.3), (4.5) dla ośrodka o dwu przenikających się fazach jest intuicyjnie oczywiste, o tyle celowe jest zilustrowanie przykładem rozwiązania zagadnienia sprężania powierzchniowego (4.23), (4.21).

Rozważmy przykład rury ciśnieniowej dwuwarstwowej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu p (rys. 3a). Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w rurze niesprężonej [8] pokazany został na rys. 3b. Stosując sprężanie powierzchniowe polegające na odpowiednim wpsowaniu rozszerzonej względem stanu naturalnego (np. przez ogrzanie) rury zewnętrznej na nienapężoną rurę wewnętrzną, uzyskajmy efekt minimalizacji energii sprężystej (wytężenia) zmagazynowanej w fazie I.



Rys. 3

Stan naprężeń dla rury niesprężonej opisany jest związkami Lamégo:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{pa^2}{c^2 - a^2} - \frac{pa^2c^2}{r^2(c^2 - a^2)}, \\ \sigma_\theta &= \frac{pa^2}{c^2 - a^2} + \frac{pa^2c^2}{r^2(c^2 - a^2)}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia rozwiązania optymalnego sprężania (4.23)₁ należy skonstruować powierzchniowy funkcjonal konstytutywny \mathcal{B}^s .

Wyznamy w tym celu, dla samej rury wewnętrznej, przemieszczenia u' na powierzchni rozdzielającej fazy ($r = b$) wywołane obciążeniem zewnętrznym p' działającym na tę powierzchnię, przy warunku swobodnego brzegu wewnętrznego ($r = a$). Dostosowując

rozwiązanie (5.1) do opisu stanu naprężeń w pierścieniu wewnętrznym oraz wykorzystując związki

$$(5.2) \quad \frac{u'}{r} = \frac{1}{E'} (\sigma'_\theta - \nu' \sigma'_r)$$

otrzymujemy

$$(5.3) \quad u' = \frac{b}{E'} \frac{(1-\nu')b^2 + (1+\nu')a^2}{b^2 - a^2} p'.$$

Analogicznie wyznaczyć można, dla samej rury zewnętrznej, przemieszczenia u'' na powierzchni rozdzielającej fazy wywołane obciążeniem zewnętrznym p'' działającym na tę powierzchnię, przy warunku swobodnego brzegu zewnętrznego ($r = c$)

$$(5.4) \quad u'' = \frac{b}{E''} \frac{(1-\nu'')b^2 + (1+\nu'')c^2}{c^2 - b^2} p''.$$

Związki (5.3) i (5.4) definiują liniowe, powierzchniowe funkcjonały konstytutywne \mathcal{B}' i \mathcal{B}'' dla każdej z faz. Konstruując symetryczny konstytutywny funkcjonał powierzchniowy \mathcal{B}^s otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania (4.23)₁ w postaci

$$(5.5) \quad \dot{u}'' = -b \left[\frac{(1-\nu')b^2 + (1+\nu')a^2}{E'(b^2 - a^2)} + \frac{(1-\nu'')b^2 + (1+\nu'')c^2}{E''(c^2 - b^2)} \right] p_2^L,$$

gdzie p_2^L jest, zgodnie z definicją (4.16)₂, różnicą pomiędzy oddziaływaniem rury zewnętrznej na wewnętrzną w stanie użytkowym a oddziaływaniem sztywnego podłoża na brzeg zewnętrzny ($r = b$) rury wewnętrznej obciążonej ciśnieniem p (na brzegu $r = a$)

$$(5.6) \quad p_2^L = p' - p_1^L = - \frac{a^2(c^2 - b^2)}{b^2(c^2 - a^2)} + \frac{2a^2p}{(1-\nu')b^2 + (1+\nu')a^2}.$$

W przypadku, gdy materiał obu faz jest jednorodny, otrzymujemy z (5.5) i (5.6) wartość

$$(5.7) \quad \dot{u}'' = - \frac{2pa^2b}{E(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{2b^2(c^2 - a^2)}{(c^2 - b^2)[(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2]} - 1 \right\},$$

o którą należy zmniejszyć promień wewnętrznej powierzchni brzegowej ($r = b$) rury zewnętrznej (w jej stanie naturalnym), aby po wciśnięciu jej na rurę wewnętrzną otrzymać efekt optymalnego sprężenia.

Wykorzystując znajomość pola przemieszczeń w stanie użytkowym oraz fakt, że punkty powierzchni rozdzielającej obie fazy ($r = b$) nie ulegają, w stanie końcowym, przemieszczeniom (por. wnioski po rozwiązaniu (4.23)), można wyznaczyć obciążenia brzegów ($r = b$) obu faz w stanie wstępnym

$$(5.8) \quad p^R = -p^{R'} = - \frac{(b^2 - a^2)[(1-\nu)b^2 + (1+\nu)c^2]}{(c^2 - cb^2)[(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2]} p.$$

Znajomość obciążeń wstępnych (5.8) pozwala wyznaczyć wstępne stany naprężenia, a następnie, po dodaniu rozwiązania (5.1), stany końcowe. Na rys. 3c pokazano efekt redystrybucji stanu naprężeń wywołanej sprężeniem optymalnym (w przypadku $\nu = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$) i związanej z ok. 24%-owym odciążeniem rury wewnętrznej (mierzone globalnym wyężeniem całej fazy I).

Literatura cytowana w tekście

1. L. D. HOFMEISTER, L. P. FELTON, *Prestressing in structural synthesis*, AIAA Journal, 2, 8, (1970).
2. L. P. FELTON, *On optimum design of prestressed beam structures*, AIAA Journal, 3, 14 (1976).
3. J. E. TAYLOR, *Optimal prestress against buckling. An energy approach*, Int. J. Solid. Struct., 2, 7 (1971).
4. Z. MRÓZ, J. E. TAYLOR, *Prestress for maximum strength*, Int. J. Solid Struct., 9 (1973) 1535 - 1541.
5. J. C. NAGTEGAAL, *On optimal design of prestressed elastic structures*, Int. J. Mech. Sci., 14 (1972) 779 - 871.
6. J. HOLNICKI-SZULC, *Theory of prestressing I*, Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., 1, 24 (1976).
7. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, §§ 4, 8, PWN, Warszawa 1970.
8. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, § 14. McGraw-Hill, 1951.
9. E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Ergeb. angew. Math., 5 (1958).
10. Z. MRÓZ, G. I. N. ROZVANY, *Optimal design of structures with variable support conditions*, J. Opt. The Appl., 1, 15 (1975).

Резюме

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В ДВУХФАЗОВЫХ СРЕДАХ

В работе проведен анализ состояний предварительного напряжения и деформации, вызванных в упругой двухфазовой среде путем введения в обеих фазах независимых, произвольных, неподчиняющихся ни статическим ни геометрическим связям полей дисторсий. Сущностью внешнего сжатия является введение таких полей дисторсий в обеих фазах, чтобы поля предварительных напряжений и деформаций, возбужденные в одной из фаз (в сжимаемой фазе), выгодным образом регулировали в ней окончательное распределение напряжений и деформаций. Эти состояния являются суммой соответствующих предварительных состояний и состояний вызванных нагрузкой. Вторая фаза выполняет роль сжимающей фазы.

Решены некоторые задачи оптимального регулирования окончательных состояний напряжений и деформаций.

Summary

ON THE PRESTRESSING IN DIPHASE MEDIA

We analyze initial states of stress and deformation produced in an elastic diphase medium by forcing independent, arbitrary distortion fields, which do not necessarily fulfil the static or geometric constraints in both phases. External prestressing consists mainly in introducing the both phases such distortion fields that the fields of initial stress and deformation induced in one (prestressed) phase cause a desirable adjustment of the distribution of the final states of stress and deformation in this phase. These states are a sum of the corresponding initial states and states caused by external load. The other phase plays a role of the prestressing one. Some examples of an optimal control of the final states of stresses in the prestressed phase are discussed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1977 r.