

NOŚNOŚĆ ROZDZIELCZA PIERŚCIENIOWEJ TARCZY KOŁOWO-SYMETRYCZNEJ ZE SZTYWNĄ INKLUZJĄ

KRZYSZTOF SZUWAŃSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

W teorii plastyczności często mamy do czynienia z powierzchniami, na których naprężenia bądź przemieszczenia, czy ich prędkości, zmieniają się w sposób skokowy. Powierzchnie te nazywane powierzchniami nieciągłości (dla zagadnień płaskich będą to linie nieciągłości), odgrywają szczególnie dużą rolę w zagadnieniach nośności granicznej. Szczegółową analizę warunków, które mają być spełnione na powierzchniach nieciągłości podają w swoich pracach m.in. IWLEW [2], PRAGER [4], THOMAS [9].

Wykazali oni, że na powierzchni nieciągłości naprężeń musi zostać zachowana ciągłość wszystkich składowych stanu naprężenia działających w kierunku prostopadłym do tej powierzchni. Skokowo mogą zmieniać się tylko składowe równoległe do powierzchni nieciągłości. Niespełnienie tego warunku oznaczałoby naruszenie warunków równowagi wewnętrznej. Podobne warunki muszą być zachowane na powierzchni (linii) nieciągłości przemieszczeń.

Z warunku ciągłości ośrodka wynika, że w punktach leżących na tej powierzchni spośród wszystkich składowych wektora przemieszczenia, lub wektora prędkości ruchu punktu, ciągłość muszą zachować składowe normalne do powierzchni nieciągłości. Gdyby ten warunek nie został zachowany, wówczas dwie części materiału musiałyby zachodzić na siebie, lub musiałyby się tworzyć lokalne pustki.

Nieco odmienne podejście zaproponował HILL [1] wprowadzając „złagodzone” warunki ciągłości w których dopuścił możliwość skokowej zmiany prędkości normalnych. Jednakże można stosować takie podejście tylko do opisu zjawisk na końcu procesu, natomiast jeśli ma on być kontynuowany to prowadzi ono do niedopuszczalnych nieciągłości przemieszczeń, przynajmniej na gruncie teorii małych odkształceń.

Okazuje się, że nie zawsze jest możliwe uzyskanie rozwiązania problemu nośności granicznej, bez przyjęcia pewnych niedopuszczalnych nieciągłości pola przemieszczeń. Przykłady tego typu zagadnień podał SHOEMAKER [5, 6]. SZUWAŃSKI i ŻYCZKOWSKI [7], analizowali przypadki w których nośność graniczna układu była poprzedzona pojawieniem się lokalnych nieciągłości przemieszczeń w kierunku normalnym, Prowadziło to w efekcie do rozdzielenia się dwóch części układu-dekohezji, a zatem obciążenie przy którym do tego dochodziło określało kres pracy układu jako całości. Zostało ono nazwane nośnością rozdzielczą układu.

Szczególne znaczenia nabiera nośność rozdzielcza w przypadku obciążeń termicznych [13], kiedy stanowi ona jedyną możliwość określenia krytycznej wartości tych ob-

ciążeń wobec braku nośności granicznej. Przykłady obliczania nośności rozdzielczej belek statycznie niewyznaczalnych podali TRAN-LE BINH i SZUWALSKI [9]. Takie podejście umożliwiło wyjaśnienie znanego paradoksu STÜSSI-KOLLBRUNNEAR, co uczynili w swojej pracy TRAN-LE BINH i ŻYCKOWSKI [10].

2. Tarcza pierścieniowa ze sztywną inkluzją

W rzeczywistych materiałach proces plastyczny zawsze prowadzi do dekohezji. Jest to oddzielne zjawisko fizyczne, rządzone oddzielnymi prawami. Jednakże nawet przy założeniu nieskończenie długiego wykresu $\sigma - \varepsilon$, bez żadnego fizycznego kryterium dekohezji może czasami wystąpić kres istnienia rozwiązania ciągłego. Wśród przykładów ilustrujących to zjawisko podanych w pracy [7] omówiono także nieograniczoną tarczę z kołową sztywną inkluzją, rozciąganą równomiernym obciążeniem p w nieskończoności. W tarczy tej przy pewnej wartości obciążenia powodującej powstawanie stosunkowo niewielkiej (dla materiału nieściśliwego zmierzającej do zera) strefy plastycznej, odkształcenia promieniowe w miejscu styku tarczy z inkluzją zmierzają do nieskończoności. Oznacza to pojawienie się w tym miejscu niedopuszczalnej nieciągłości przemieszczenia promieniowego, co w efekcie prowadzi do oddzielenia się tarczy od inkluzji. Tarcza taka pracując jako swobodna jest w stanie dalej przenosić wzrastające obciążenie, lecz układ jako całość przestaje istnieć.

Inaczej może ten proces przebiegać w przypadku tarczy ograniczonej. Jeżeli będzie ona dostatecznie wąska, to obciążenie powodujące uwolnienie tarczy od inkluzji (nośność rozdzielcza), może wystarczyć do jej całkowitego uplastycznienia jako tarczy swobodnej (wyczerpanie nośności granicznej).

Wówczas nawet część układu nie będzie w stanie przenieść obciążeń przekraczających nośność rozdzielczą. Sprawdzimy, kiedy to zjawisko będzie mieć miejsce. Zajmiemy się tarczą pierścieniową z kołową sztywną inkluzją (rys. 1.) poddaną równomiernemu rozciąganiu obciążeniem p na promieniu zewnętrznym b . Tarcza o stałej grubości jest wykonana z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Przyjmujemy, że tarcza jest połączona ze sztywną inkluzją w sposób uniemożliwiający przemieszczenie w kierunku promieniowym, lecz dopuszczający możliwość zmiany grubości tarczy w miejscu połączenia. Zagadnienie będzie rozwiązywane we współrzędnych biegunowych $r - \theta$ pod założeniem płaskiego stanu naprężenia.

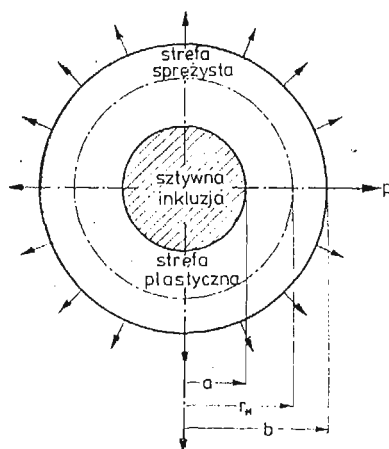
Jak wykazano w pracy [7] tarcza taka nie będzie mogła się całkowicie uplastyczyć w wyniku mieszanych warunków brzegowych. Jedynie w przypadku tarczy o brzegach swobodnych, czyli jednorodnych naprężeniowych warunków brzegowych możliwy będzie do osiągnięcia stan plastyczny w każdym punkcie tarczy. Zagadnienie to zostanie omówione w punkcie 4.

Analizować będziemy zakres sprężysto-plastycznej pracy tarczy przedstawionej na rys. 1. Zakładamy zatem, że obciążenie tarczy jest większe od jej nośności sprężystej:

$$(2.1) \quad \bar{q} = \frac{\bar{p}}{\sigma_0} = \frac{(1-\nu)\beta^2 + 1 + \nu}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$$

gdzie σ_0 — oznacza granicę plastyczności,
 ν — liczbę Poissona,
 β — parametr charakteryzujący szerokość tarczy:

$$(2.2.) \quad \beta = \frac{a}{b}$$



Rys. 1

w strefie sprężystej dla $r_* \leq r \leq b$ obowiązują znane wzory Lamégo określające rozkład naprężeń:

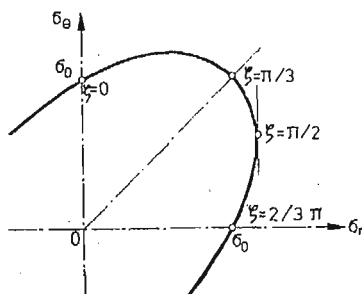
$$(2.3.) \quad \sigma_r = A + \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2},$$

oraz przemieszczenia promieniowego:

$$(2.4.) \quad u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu)Ar - (1+\nu) \frac{B}{r} \right].$$

W strefie plastycznej dla $a \leq r \leq r_*$ wykorzystamy trygonometryczną parametryzację warunku plastyczności Hubera-Misesa-Henckyego typu Nadai-Sokołowskiego:

$$(2.5.) \quad \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \cdot \sin \zeta; \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \cdot \sin \left(\zeta + \frac{\pi}{3} \right),$$



Rys. 2

gdzie ζ jest parametrem, który wobec dodatniości obu naprężeń przy warunku że $\sigma_r > \sigma_\theta$ przyjmuje wartości z przedziału od $\pi/3$ do $2\pi/3$ (rys. 2).

Z równania równowagi wewnętrznej można określić rozkład tego parametru w formie funkcji odwrotnej:

$$(2.6.) \quad r = \frac{C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{3}\right)}}$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania.

Ponieważ warunek brzegowy dla strefy plastycznej określony jest dla przemieszczeń należy wyznaczyć funkcje określające rozkład przemieszczeń i odkształceń w strefie plastycznej. Przyjmując prawo podobieństwa dewiatorów odkształceń i naprężeń oraz zakładając sprężystą zmianę objętości otrzymamy: [7]:

$$(2.7.) \quad u = \frac{C_1 \sigma_0 \sin \zeta \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{3\sqrt{3}K \sqrt{\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{3}\right)}} + C_1 C_2 \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{3}\right)}}$$

$$(2.8.) \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}K} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{C_2}{\cos \zeta} \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{6}\right) \exp(-\sqrt{3}\zeta),$$

$$(2.9.) \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}K} \sin \zeta + C_2 \exp(-\sqrt{3}\zeta),$$

gdzie K oznacza moduł ściśliwości, a C_2 jest kolejną stałą całkowania.

Przystąpimy teraz do zszywania obu stref: sprężystej i plastycznej. Wykorzystamy w tym celu następujące warunki brzegowe:

$$(2.10.) \quad \text{dla } r = a \quad \zeta = \zeta_a; \quad u^{(p)} = 0,$$

$$(2.11.) \quad \text{dla } r = r_* \quad \zeta = \zeta_*; \quad u^{(e)} = u^{(p)}; \quad \sigma_r^{(e)} = \sigma_r^{(p)}; \quad \sigma_i^{(e)} = \sigma_0;$$

$$(2.12.) \quad \text{dla } r = b \quad \sigma_r^{(e)} = p,$$

w których indeks (p) u góry oznacza wielkości w strefie plastycznej, a indeks (e) wielkości w strefie sprężystej, natomiast:

$$(2.13.) \quad \sigma_i^{(e)} = \sqrt{A^2 + 3 \frac{B^2}{r^2}}$$

oznacza intensywność naprężeń według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego. Powyższe siedem warunków brzegowych umożliwia wyznaczenie czterech stałych całkowania: A i B w strefie sprężystej oraz C_1 i C_2 w strefie plastycznej, promienia rozgraniczającego te strefy r_* , oraz wartości parametru ζ_a i ζ_* odpowiadające promieniom a i r_* .

Po wykorzystaniu wszystkich warunków brzegowych otrzymamy stałe w strefie plastycznej:

$$(2.14.) \quad C_1 = a \sqrt{\sin\left(\zeta_a - \frac{\pi}{3}\right)} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_a\right),$$

$$C_2 = -\frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}K} \sin \zeta_a \exp(\sqrt{3}\zeta_a),$$

identyczne jak dla tarczy nieograniczonej [7], co wynika z faktu, że dla strefy plastycznej obowiązują te same warunki brzegowe.

Inne są natomiast stałe w strefie sprężystej:

$$(2.15.) \quad \begin{aligned} A &= \sigma_0 \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right), \\ B &= b^2 \left[p - \sigma_0 \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

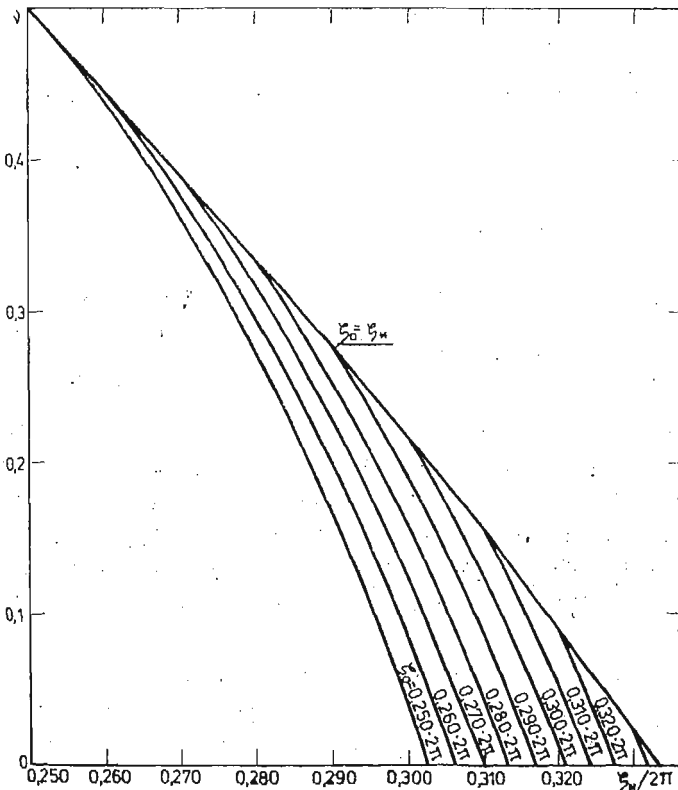
Stałe te są wyrażone poprzez parametry ζ_a i ζ_* które są ze sobą oraz z liczbą Poissona powiązane równaniem przestępnym

$$(2.16.) \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos \zeta_*}{\sin \zeta_a} \exp[\sqrt{3}(\zeta_* - \zeta_a)]$$

analogicznym jak dla tarczy nieograniczonej [7]. Rozwiązanie tego równania zostało przedstawione graficznie na wykresie 3.

Parametry ζ_a i ζ_* są uzależnione od wielkości bezwymiarowego obciążenia zewnętrznego $q = \frac{p}{\sigma_0}$ poprzez związek:

$$(2.17.) \quad q = \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \beta^2 \sin\left(\zeta_a - \frac{\pi}{3}\right) \exp[\sqrt{3}(\zeta_* - \zeta_a)].$$



Rys. 3

Poszukiwać będziemy kresu ciągłego rozwiązania, wyznaczonego przez zmierzanie do nieskończoności pochodnej funkcji przemieszczania u , czyli odkształcenia promieniowego ε_r . Jak wykazał ŻYCKOWSKI [11] zachodzi to w punkcie w którym naprężenia promieniowe są dwa razy większe od obwodowych. Jak łatwo sprawdzić warunek ten jest spełniony w punkcie w którym parametr ζ osiąga wartość $\frac{\pi}{2}$.

W strefie plastycznej parametr ζ jest rosnącą funkcją promienia i najmniejszą możliwą wartość $\frac{\pi}{2}$ może osiągnąć dla promienia wewnętrznego tarczy a , w miejscu gdzie jest ona połączona ze sztywną inkluzją, co wykazano w pracy [7].

Oznacza to w tym miejscu skokową zmianę przemieszczenia promieniowego u , czyli dekohezję. Wielkość obciążenia przy którym to nastąpi, czyli nośność rozdzielczą można więc wyznaczyć z równania (2.17.) po podstawieniu $\zeta_a = \frac{\pi}{2}$:

$$(2.18.) \quad \hat{q} = \cos\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\beta^2 \exp\left[\sqrt{3}\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Wartość ζ_{*0} którą należy podstawić do tego wzoru odczytujemy z wykresu 3 dla ustalonej wartości ν przy $\zeta_a = 0,25 \cdot 2\pi$ lub obliczamy z (2.16.) przy podstawieniu $\zeta_a = \frac{\pi}{2}$:

$$(2.19.) \quad \sqrt{3} \cos \zeta_{*0} \exp\left[\sqrt{3}\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\nu - 1.$$

Widać, że nośność rozdzielcza tarczy pierścieniowej jest wyższa niż tarczy nieograniczonej ($\beta = 0$).

3. Tarcza pracująca po całkowitym uplastycznieniu

Przeprowadzone w poprzednim punkcie rozważania są słuszne jedynie wtedy, gdy w chwili dekohezji w tarczy występują dwie strefy: sprężysta i plastyczna. Dla bardzo wąskich pierścieni może okazać się, że zanim parametr ζ_a osiągnie wartość $\frac{\pi}{2}$, czyli zanim dojdzie do dekohezji strefa plastyczna może już objąć całą tarczę, czyli promień graniczny r_* zrówna się z b . Aby to się zdarzyło promień zewnętrzny tarczy musi być mniejszy od promienia granicznego w chwili dekohezji. Jak wynika z przytoczonych powyżej rozwiązań, dla materiału o tej samej liczbie Poissona rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczenia w strefie plastycznej, jak również jej wielkość określona promieniem r_* w chwili dekohezji są takie same, bez względu na wielkość promienia zewnętrznego b (może on również zmierzać do nieskończoności).

Zatem krytyczne wartości stosunku promieni β równe stosunkowi promienia a do promienia r_* w chwili dekohezji dla różnych wartości ν można wyliczyć w oparciu o wyniki otrzymane w pracy [7], (wykres 6). Wahać się one będą od 0,911 dla $\nu = 0$ do 1,0 dla $\nu = 0,5$ kiedy to nie dochodzi do rozwinięcia się strefy plastycznej w chwili dekohezji.

Dla tarcz, dla których stosunek promieni β jest większy od krytycznego obciążenie przy którym nastąpi pełne uplastycznienie określa wzór:

$$(3.1.) \quad q_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{b1}$$

w którym ζ_{b1} oznacza wartość parametru ζ_* wyliczoną z układu równań (2.16.) oraz (2.17.) po podstawieniu (3.1.). Drugą niewiadomą w tym układzie jest odpowiadający ζ_{b1} parametr ζ_a .

Okazuje się, że całkowite uplastycznienie tarczy nie oznacza jeszcze kresu jej pracy. Podobny przykład układu w którym całkowite uplastycznienie nie pokrywa się z jego nośnością graniczną przytacza ŻYCZKOWSKI [12].

Tarcza będzie w stanie przenosić obciążenia wzrastające powyżej q_1 (3.1.). Będzie już ona wtedy pracowała w zakresie plastycznym, a zatem obowiązywać będzie w niej rozwiązanie (2.5 - 2.9.) przy warunkach brzegowych (2.10.) na brzegu wewnętrznym oraz warunkach:

$$(3.2.) \quad \text{dla } r = b \quad \zeta = \zeta_b, \quad \sigma_r = p,$$

na brzegu zewnętrznym. Parametry ζ_a i ζ_b są ze sobą powiązane równaniem przestępnym.

$$(3.3.) \quad \beta \sqrt{\frac{\sin\left(\zeta_a - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\zeta_b - \frac{\pi}{3}\right)}} \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\zeta_b - \zeta_a)\right] = 1.$$

O tym, że proces będzie w dalszym ciągu przebiegał można się przekonać obliczając przemieszczenie przykładowo na promieniu b :

$$(3.4.) \quad u_b = \frac{\sigma_0 b}{3\sqrt{3}K} \left\{ \sin \zeta_b - \sin \zeta_a \exp\left[\sqrt{3}(\zeta_a - \zeta_b)\right] \right\}.$$

Jest to funkcja określona jednoznacznie, zatem pomimo pełnego uplastycznienia nie występuje tutaj płynięcie plastyczne. Odkształcenia plastyczne, którym towarzyszą przegrupowania naprężeń będą wzrastały aż do chwili gdy parametr ζ_a osiągnie wartość $\frac{\pi}{2}$, co oznacza dekohezję na promieniu a .

Odpowiednią nośność rozdzielczą określa wzór:

$$(3.5.) \quad \hat{q} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{b0},$$

gdzie ζ_{b0} jest pierwiastkiem równania przestępnego:

$$(3.6.) \quad \beta \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\zeta_{b0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{2 \sin\left(\zeta_{b0} - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Wobec wcześniejszego całkowitego uplastycznienia tarczy nośność rozdzielcza tym razem nie zależy od liczby Poissona ν , a jedynie od β .

4. Tarcza swobodna (po dekohezji)

Gdy obciążenie zewnętrzne osiągnie wartość \hat{q} (2.18.) następuje oddzielenie się tarczy od inkluzji i staje się ona tarczą swobodną, z otworem kołowym. Tarcza ta będzie mogła dalej przenosić obciążenie pod warunkiem, że będzie ona dostatecznie szeroka — wykluczamy zatem z dalszych rozważań tarcze omówione w punkcie 3.

Zakładamy, że pod obciążeniem \hat{q} tarcza swobodna jeszcze nie uplastyczniała się całkowicie. W dalszej analizie pominiemy wpływ pierwotnych odkształceń plastycznych (przed dekohezją), co jest usprawiedliwione małymi rozmiarami pierwotnej strefy plastycznej.

W rozważanej swobodnej tarczy, w jej strefie sprężystej (zewnętrznej) obowiązują ogólne rozwiązania Lamégo (2.3.), a w strefie plastycznej (wewnętrznej) zastosujemy trygonometryczną parametryzację warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (2.5.). Należy zaznaczyć, że będziemy mieli tutaj do czynienia z innym niż w przypadku tarczy z inkluzją uszeregowaniem naprężeń. Oba naprężenia będą wprawdzie dodatnie, lecz tym razem $\sigma_\theta > \sigma_r$, co oznacza zgodnie z rys. 2, że parametr ζ przyjmuje wartości z przedziału od 0 do $\frac{\pi}{3}$.

Powoduje to inną postać odwrotnej funkcji rozkładu parametru ζ i zamiast (2.6.) otrzymamy:

$$(4.1.) \quad r = C_1 \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta + \frac{2}{3} \pi\right)}}$$

Rozważane zagadnienie jest statycznie wyznaczalne — warunki brzegowe, którymi dysponujemy są warunkami czysto naprężeniowymi. Nie ma potrzeby przeprowadzenia analizy odkształceń, czyli dalej otrzymane wyniki są niezależne od przyjętej teorii plastyczności.

Mamy tym razem do wyznaczenia sześć niewiadomych: stałe A i B w strefie sprężystej, stałą C_1 w strefie plastycznej, promień rozgraniczający strefy r_* oraz wartości parametru ζ_a i ζ_* odpowiadające promieniom a i r_* . Żądamy spełnienia przez rozwiązania (2.3.), (2.5.) i (3.1.) następujących warunków brzegowych:

$$(4.2.) \quad \text{dla } r = a \quad \zeta = \zeta_a \quad \sigma_r^{(p)} = 0,$$

$$(4.3.) \quad \text{dla } r = r_* \quad \zeta = \zeta_* \quad \sigma_r^{(p)} = \sigma_r^{(e)} \quad \sigma_\theta^{(e)} = \sigma_0,$$

$$(4.4.) \quad \text{dla } r = b \quad \sigma_r^{(e)} = p = q\sigma_0.$$

Z warunków (4.2.) wynika natychmiast, że:

$$(4.5.) \quad \zeta_a = 0 \quad \text{i} \quad C_1 = a \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Pozostałe niewiadome wyrażone poprzez parametr ζ_* są równe:

$$(4.6.) \quad A = \sigma_0 \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = -\frac{1}{2} \sigma_0 a^2 \exp(\sqrt{3} \zeta_*)$$

$$(4.6) \quad [cd] \quad r_* = a \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_*\right)}{\sqrt{\sin\left(\zeta_* + \frac{2}{3} \pi\right)}}$$

Parametr ζ_* jest uzależniony od obciążenia zewnętrznego i szerokości tarczy:

$$(4.7.) \quad q = \cos\left(\zeta_* - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \beta^2 \exp(\sqrt{3} \zeta_*).$$

Nośność sprężysta tarczy pierścieniowej będzie osiągnięta gdy $r_* = a$, czyli $\zeta_{*a} = 0$. Nastąpi to przy obciążeniu

$$(4.8.) \quad \bar{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta^2.$$

Obciążenie to jest wyraźnie mniejsze niż nośność rozdzielcza tarczy z inkluzją (2.18.), czyli że po dekohezji uwolniona tarcza będzie co najmniej częściowo uplastyczniona. Całkowite uplastycznienie nastąpi, gdy $r_* = b$ co odpowiada obciążeniu:

$$(4.9.) \quad \bar{q} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{*b}$$

gdzie ζ_{*b} jest pierwiastkiem równania przestępnego $f(\zeta_{*b}, \beta) = 0$. Z równania tego można wyliczyć funkcję odwrotną:

$$(4.10) \quad \beta^2 = \left(\cos \zeta_{*b} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \zeta_{*b} \right) \exp(-\sqrt{3} \zeta_{*b})$$

Parametr ζ_{*b} , a co za tym idzie i nośność graniczna tarczy swobodnej zależą więc od stosunku promieni tarczy β . Dla tarczy nieograniczonej, gdy $\beta \rightarrow 0$ parametr $\zeta_{*b} = \frac{\pi}{2}$, czyli $\bar{q} = 1$ co pokrywa się ze znanym rozwiązaniem NADAI'A [3].

5. Kryterium pracy tarcz po dekohezji

Fakt czy tarcza po dekohezji będzie w stanie przetrwać jeszcze większe obciążenie, będzie zależał od tego, czy nośność graniczna tarczy pracującej jako swobodna \bar{q} , będzie większa od nośności rozdzielczej \hat{q} . Jest to z kolei uzależnione od wymiarów tarczy, dokładniej od stosunku promieni β .

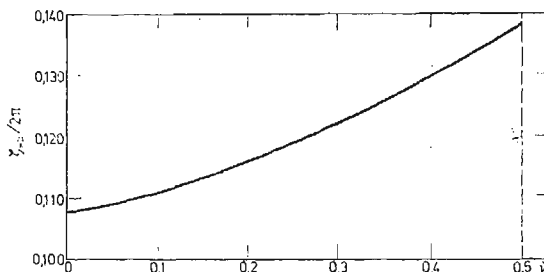
Wyznamy graniczną wartość β_{gr} , przy której z chwilą oddzielenia się tarczy od inkluzji dojdzie do jej całkowitego uplastycznienia. Nastąpi to gdy nośność rozdzielcza \hat{q} i nośność graniczna tarczy swobodnej \bar{q} będą sobie równe. Wykorzystujemy równania określające \hat{q} (2.18.) i (2.19.) oraz \bar{q} (4.9.) i (4.10.). Otrzymujemy łącznie z warunkiem $\hat{q} = \bar{q}$ układ pięciu równań z których po wyeliminowaniu \hat{q} , \bar{q} , ζ_{*0} i ζ_{*b} można wyliczyć wartość β_{gr} .

Ponieważ równania (2.19.) i (4.10.) są równaniami przestępnymi ze względu na niewiadome ζ_{*0} i ζ_{*b} nie udaje się uzyskać końcowego rozwiązania w formie zamkniętej.

Po przekształceniu otrzymamy:

$$(5.1.) \quad \cos\left(\zeta_{*0} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \hat{\zeta}_{*b} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \hat{\zeta}_{*b} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \hat{\zeta}_{*b} \exp\left[\sqrt{3}\left(\zeta_{*0} - \hat{\zeta}_{*b} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0.$$

Przez $\hat{\zeta}_{*b}$ oznaczono tutaj wartość jaką osiągnie parametr ζ po dekohezji na promieniu zewnętrznym b w tarczy dla której nośność rozdzielcza i graniczna pokrywają się ze sobą. Wartość tę można wyznaczyć z równania (5.1.), po podstawieniu za ζ_{*0} wartości odczy-

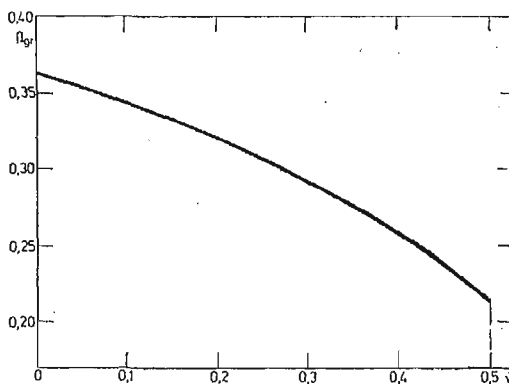


Rys. 4

tanej z wykresu 3 dla zadanej liczby Poissona ν na linii $\zeta_a = 0,250 \cdot 2\pi$ lub wartości wyliczonej z równania (2.19.). Obliczone w ten sposób wartości $\hat{\zeta}_{*b}$ dla różnych ν przedstawia wykres 4. Przez $\hat{\zeta}_{*b}$ wyraża się kwadrat granicznego stosunku promieni tarczy.

$$(5.2.) \quad \beta_{gr}^2 = \left(\cos \hat{\zeta}_{*b} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \hat{\zeta}_{*b} \right) \exp(-\sqrt{3} \hat{\zeta}_{*b}).$$

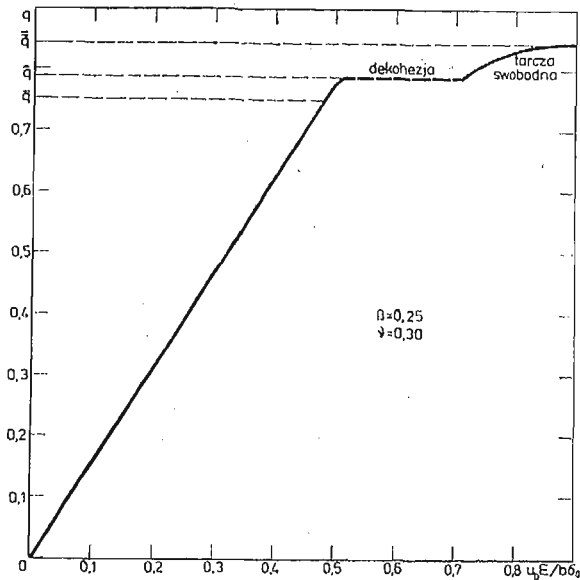
Dla tarcz szerszych — gdy $\beta < \beta_{gr}$ możliwa jest jeszcze praca tarczy po jej oddzieleniu się od inkluzji, natomiast w przypadku tarczy węższej $\beta > \beta_{gr}$ dekohezja prowadzi do natychmiastowego zniszczenia tarczy. W tym drugim przypadku nośność rozdzielcza \hat{q} określa faktyczną nośność układu. Inkluzja ma wówczas działanie „wzmacniające” tarczę, gdyż bez niej do zniszczenia doszłoby już przy mniejszym obciążeniu, $\bar{q} < \hat{q}$.



Rys. 5

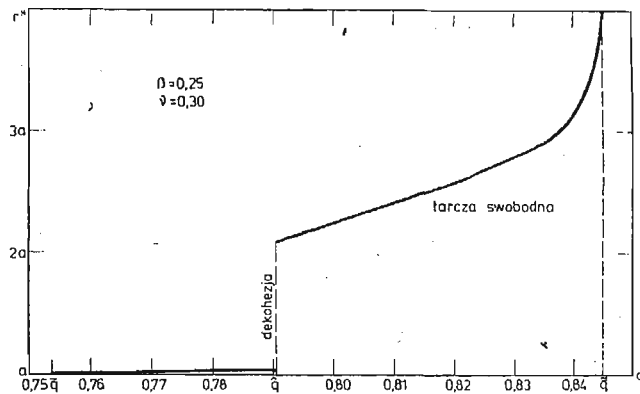
Na wykresie 5 przedstawiono zależność β_{gr} od jedynej wielkości od której ona zależy — współczynnika Poissona.

Przykładowo dla tarczy o promieniu zewnętrznym $b = 4a$ ($\beta = 0,25$) wykonanej z materiału o $\nu = 0,3$ sporządzono wykres ilustrujący zależność pomiędzy obciążeniem zewnętrznym q a przemieszczeniem zewnętrznego promienia tarczy u_b (rys. 6.).



Rys. 6

Dla obciążeń mniejszych od $\bar{q} = 0,7536$ tarcza doznaje odkształceń sprężystych, wykres jest więc linią prostą. Przy dalszym wzroście obciążenia zaczyna rozwijać się pierwotna strefa plastyczna i do wartości $\hat{q} = 0,7904$ wykres nieco się zakrzywia. Przy \hat{q} następuje oddzielenie się tarczy od inkluzji i przy większych obciążeniach będzie już ona pracować jako tarcza z otworem kołowym. Dekohezji odpowiada skokowe zwiększenie się wartości u_b — zaznaczone linią przerywaną. Zwiększanie się obciążenia powoduje dalsze



Rys. 7

powiększenie się strefy plastycznej, aż przy $\bar{q} = 0,8451$ obejmuje ona całą tarczę. Wartości \bar{q} odpowiadać będzie dowolnie duże u_b , co na wykresie obrazuje prosta pozioma.

Sporządzony został również wykres obrazujący rozwijanie się strefy plastycznej w tej tarczy w zależności od obciążenia.

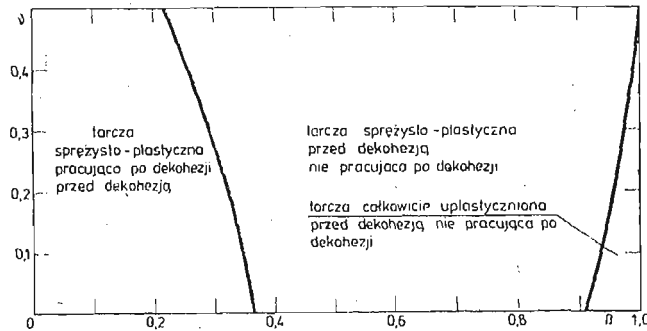
Wykres ten (rys. 7.) ilustruje na ile uzasadnione było pominięcie pierwotnego uplastycznienia, przy analizowaniu pracy tarczy swobodnej, po dekohezji. W momencie dekohezji (dla \hat{q}) następuje przeszło 40-krotny wzrost promienia granicznego r_* .

6. Uwagi końcowe

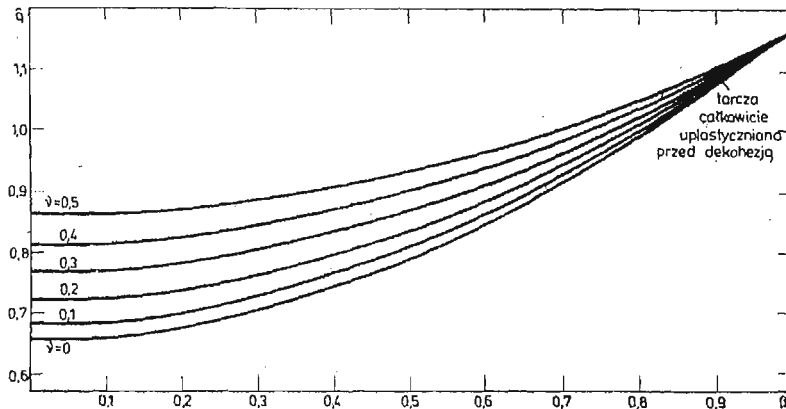
Omówione przykłady wykazały, że nie zawsze wystąpienie dekohezji oznacza kres pracy układu. Oddzielona część układu może niekiedy dalej przenosić nawet wzrastające obciążenia. Uzależnione jest to od szerokości tarczy, charakteryzowanej parametrem β oraz od liczby Poissona dla materiału, z którego tarcza została wykonana ν (rys. 8.)

Wydaje się jednak, że w każdym przypadku obciążenie powodujące rozdzielenie układu na dwie części będzie określało jego rzeczywistą nośność.

Nośność rozdzielcza tarczy w funkcji jej szerokości β dla różnych wartości ν została przedstawiona na wykresie 9. Dla tarcz, w których w chwili dekohezji występują zarówno

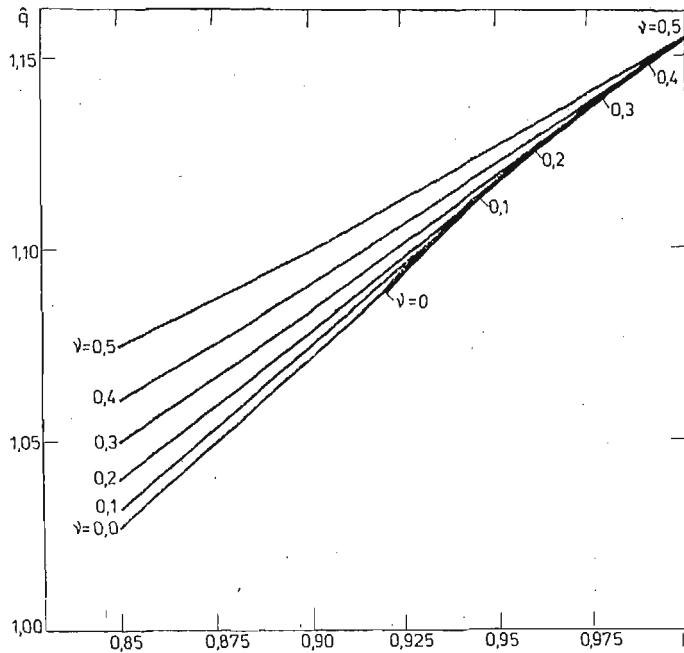


Rys. 8



Rys. 9

strefa uplastyczniona jak i jeszcze sprężysta, wykres ma przebieg paraboliczny zgodnie z (2.18.). Istnieje możliwość, że przed dekohezją tarcza zostanie już całkowicie uplastyczniona, wtedy nośność rozdzielcza staje się oczywiście niezależna od stałej sprężystej ν . Nośność rozdzielczą takich tarcz przedstawia na wykresie 10 linia grubsza. Krzywe dla różnych wartości ν dochodzą do tej linii stycznie, a punkty styczności mają współrzędną β odpowiadającą zasięgowi strefy uplastycznionej w chwili dekohezji dla tarczy wykonanej z materiału o danej wartości ν (rys. 10.).



Rys. 10

W obliczeniach posługiwano się teorią małych odkształceń co powodowało wewnętrzną sprężność, jako że badano stany powodujące zmierzanie odkształceń do nieskończoności. Jednakże stwierdzono [14], że uwzględnienie odkształceń skończonych, a przede wszystkim zmiany grubości tarczy w trakcie procesu nie wprowadza istotnych zmian jakościowych. Efekt dekohezji wówczas również wystąpi, a nośność rozdzielcza będzie nieco niższa.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *Discontinuity relations in mechanics of solids*. Prog. Solid Mech. 2, (1961), 247 - 276.
2. D. D. IWLEW, *Teoria idealnej plastyczności*. Nauka, Moskwa 1966.
3. A. NADAI, *Theory of flow and fracture of solids*, vol. 1. Mc Graw-Hill, 1950.
4. W. PRAGER, *Discontinuous fields of plastic stress and flow*. Proc. Sec. U. S. Congr. Appl. Mech. (1955) 21 - 34.
5. E. M. SHOEMAKER, *Some paradoxes associated with elastic-plastic limit load analysis*. Arch. Mech. Stos. (1968) 4. 20.

6. E. M. SHOEMAKER, *On velocity discontinuities in elastic-plastic boundary value problems*. Arch. Mech. Stos. (1974) 26.
7. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*. Int. J. Solids Structures, (1973) 9. 85 - 98.
8. T. Y. THOMAS, *Singular surfaces and lines in the theory of plasticity*. J. Ration. Mech. An. (1953) 2. 339 - 381.
9. TRAN-LE BINH, K. SZUWALSKI, *Nośność rozdzielcza idealnie sprężysto-plastycznych belek statycznie niewyznaczalnych*. Czas. Techn. 4-M (203) (1977).
10. TRAN-LE BINH, M. ŻYCZKOWSKI, *The Stüssi-Kollbrunner paradox in the light of the concept of decohesive carrying capacity*. Arch. Mech. Stos. 4, 24, (1976),
11. M. ŻYCZKOWSKI, *Certain general equations for plane circularly symmetrical plastic states*. Arch. Mech. Stos, (1958), 10, 463 - 478
12. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN 1973
13. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *Decohesive carrying capacity in thermal stress problems*. Trans. 3rd Int. Conf. „Structural Mechanics in Reactor Technology” vol. 5 part. paper L 2/4 London.
14. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *On the termination of the proces of finite plastic deformations*. Coll. „Finite deformations in plasticity” (Euromech. 54), Warszawa 1974.

R e z y o m e

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Нагрузку при которой непрерывное решение теряет смысл для систем из идеально упруго-пластического материала называем „несущей способностью распределения”. В работе [7], в качестве одного из примеров систем, в которой она выступает, приведен неограниченный диск с круговым жестким включением, растягиваемый в бесконечности равномерной нагрузкой.

Настоящая работа касается кольцевого диска с конечным внешним радиусом. Рассмотрена возможность дальнейшей работы диска после освобождения от включений. Дан критерий дальнейшей работы после распределения. Рассмотрен также случай очень узкого диска, который подвергается полной пластификации до расщепления. Для всех этих дисков определена их несущая способность, как функция размеров диска, а также числа Пуассона.

S u m m a r y

DECOHESIVE CARRYING CAPACITY OF ANNULAR AXIALLY-SYMMETRICAL DISC WITH RIGID INCLUSION

The loading at which the continuous solution breaks for systems made of ideally elastic — plastic material is called decohesive carrying capacity. In paper [7] as one of examples of systems in which it may occur, an infinite sheet with circular rigid inclusion, extended at infinity with uniform traction q was given. Here an annular disc with finite outer radius is considered. The possibility of its further work, after decohesion is discussed. The case of very narrow disc, which can be totally in plastic state before decohesion is also considered. For all types of discs their decohesive carrying capacity as a function of their dimensions and Poisson's ratio is determined.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1977 r., ponownie dnia 23 lutego 1979 r.