

SKRĘCANIE PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW JAKO CIAŁ Z WEWNĘTRZNYMI WIĘZAMI. II

KRYSTYNA MAZUR-ŚNIADY (WROCLAW)

W pierwszej części pracy przedstawione zostały ogólna teoria skręcania pryzmatycznych prętów oraz teoria skrupowanego skręcania prętów cienkościennych o otwartych przekrojach, wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1].

W 1 i 2 rozdziale niniejszej pracy narzuca się (podobnie jak w rozdziale 3 pracy [2]) na ruch pręta opisany więzami realizującymi nieodkształcalność rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny normalne do osi pręta dodatkowe więzy, co pozwala otrzymać inne szczególne teorie skręcania.

W pierwszej części rozdziału pierwszego dodatkowe więzy rozdzielają zmienne w funkcji spaczenia przekroju oraz przedstawiają sobą pewien układ równań różniczkowych (w postaci ogólnej). W ten sposób otrzymuje się teorię skrupowanego skręcania prętów o zwartym przekroju.

W celu ilustracji otrzymanej teorii w drugiej części rozdziału pierwszego przedstawia się równania otrzymane w przypadku wspornika o zwartym przekroju.

W rozdziale drugim dodatkowe więzy uniezależniają funkcję spaczenia od położenia przekroju poprzecznego pręta, co pozwala otrzymać techniczną teorię skręcania prętów o zwartych przekrojach.

Rozdział trzeci zawiera przykład, jego przedmiotem jest jednorodny, izotropowy, nieważki pręt o przekroju w kształcie elipsy, o poboczniczy wolnej od obciążeń zewnętrznych, skręcany w sposób statyczny parami sił działającymi w końcowych przekrojach.

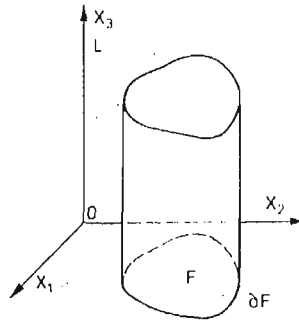
W celu uzyskania rozwiązania stosuje się najpierw ogólną teorię skręcania, przedstawioną w rozdziale drugim niniejszej pracy, obliczając przemieszczenia, naprężenia oraz siły reakcji więzów. Następnie stosuje się techniczną teorię skręcania prętów o przekroju zwartym, przedstawioną w rozdziale piątym, obliczając przemieszczenia, naprężenia oraz dodatkowe siły reakcji więzów.

Przeprowadza się analizę rozwiązań uzyskanych według obu teorii uwzględniając wielkość sił reakcji więzów, która, jak wiadomo, stanowi kryterium zakresu stosowalności teorii.

Ponadto rozdział szósty zawiera porównanie równań wraz z rozwiązaniami technicznej teorii skręcania prętów o zwartym przekroju w przypadku pręta będącego przedmiotem przykładu z równaniami i rozwiązaniami teorii swobodnego skręcania, otrzymanymi przez Saint-Venanta w ramach klasycznej teorii sprężystości ([3] s. 177 - 187, [4] s. 366 - 387).

1. Skręcanie skrępowane prętów o zwartych przekrojach¹

1.1. Ogólne równania Przedmiotem rozważań jest pryzmatyczny pręt o zwartym przekroju, ograniczonym krzywą odcinkami gładką (rys. 1.1). Gęstość masy pręta oznacza się jak poprzednio przez ρ_R i zakłada się, że dane są pola zewnętrznych obciążeń masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$ i zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.



Rys. 1.1

Równania teorii wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] przedstawiono w [5], ograniczając ruch pręta opisany w [2] za pomocą więzów (2.1) dodatkowymi więzami wewnętrznymi narzuconymi na funkcję spazenia

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \zeta - (1 + \varepsilon)\Phi &= 0, \\ \varepsilon &= \varepsilon(X_3, t), \\ \Phi &= \Phi(X_1, X_2, t), \end{aligned}$$

oraz układem równań różniczkowych

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} \gamma_{\nu'}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \varepsilon, \varphi_{,3}, \psi_{1,3}, \psi_{2,3}, \varepsilon_{,3}) &= 0 && \text{dla } 0 < X_3 < L, \nu' = 1, 2, \dots, p', \\ \gamma_{\nu''}(\Phi, \nabla\Phi) &= 0 && \text{dla } X_1, X_2 \in F, \nu'' = p'+1, p'+2, \dots, p'+p'', \end{aligned}$$

gdzie ∇ oznacza gradient materialny.

Uwzględnimy tu także istnienie geometrycznych więzów brzegowych w postaci układu równań różniczkowych

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} \beta_{\varrho'}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \varepsilon) &= 0 && \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \varrho' = 1, 2, \dots, l', \\ \beta_{\varrho''}(\Phi, \Phi_{,s}) &= 0 && \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \varrho'' = 1, 2, \dots, l'', \end{aligned}$$

gdzie $(\)_{,s}$ oznacza różniczkowanie po stycznej do brzegu ∂F .

Rozdzielając zmienne w funkcji spazenia przekroju za pomocą więzów (1.1.1) wprowadzono nowe współrzędne uogólnione ε i Φ , przy czym $\varepsilon(X_3, t)$ określa stopień skrępo-

¹⁾ Oznaczenia wzorowane są na pracy [1]. Literami półgrubymi oznaczono wektory i tensory. Wskaźniki i, j przebiegają ciąg 1, 2, 3, wskaźniki α, β , przebiegają ciąg 1, 2. Obowiązuje konwencja sumacyjna względem wszystkich wskaźników. Przecinek poprzedzający wskaźnik oznacza pochodną cząstkową względem odpowiedniej współrzędnej materialnej, kropka nad symbolem oznacza pochodną podług czasu a symbol ∇ oznacza gradient materialny.

wania skręcania na długości pręta, a $\Phi(X_1, X_2, t)$ zależy od kształtu przekroju poprzecznego w danej chwili t .

Więzy (1.1.2)₁ narzucone są na współrzędne uogólnione będące funkcjami zmiennych X_3 i t oraz na ich pochodne cząstkowe względem współrzędnej materialnej X_3 , więzy (1.1.2)₂ natomiast narzucone są na funkcję Φ oraz jej gradient materialny.

Blizsza interpretacja techniczna więzów (1.1.2) jest utrudniona z powodu ogólnej postaci opisujących je układów równań. Zaletą takiego sformułowania równań więzów wewnętrznych jest otrzymanie teorii w miarę ogólnej, zawierającej w sobie wiele teorii szczególnych, między innymi teorię swobodnego skręcania prętów o zwartych przekrojach, dla której równania (1.1.2)₁ można przedstawić w postaci

$$\gamma_1 = \varepsilon_{,3} = 0,$$

zaś lewe strony równań (1.1.2)₂ i (1.1.3) przyjąć tożsamościowo równe zeru. Inną szczególną teorią może być teoria, w której narzuca się z góry postać funkcji Φ , przyjmując ją np. jako wielomian.

Więzy brzegowe (1.1.3)₁ narzucone są na funkcje zależne od X_3 i t na końcach prętów natomiast (1.1.3)₂ na funkcję Φ i jej pochodną po stycznej do brzegu ∂F na pobocznicę pręta.

W drugiej części rozdziału pierwszego zostanie przedstawiony przykład więzów brzegowych (1.1.3), będą to więzy realizujące pełne utwierdzenie całego przekroju poprzecznego skręcanego wspornika.

W dalszych rozważaniach zawartych w omawianym podrozdziale pracy korzysta się z ogólnej postaci więzów (1.1.2) i (1.1.3), wprowadzając mnożniki Lagrange'a λ'' i λ''' odpowiadające układowi równań (1.1.2) oraz $\mu^{e''}$ i $\mu^{e'''}$ odpowiadające warunkom brzegowym (1.1.3).

W wyniku wprowadzenia dodatkowych więzów (1.1.1), (1.1.2) i (1.1.3) powstają dodatkowe siły reakcji więzów, które, analogicznie jak w rozdziale (3) pracy [2], wprowadza się do równań ruchu (2.5) w [2]:

$$\begin{aligned} T^{3j},_j + Q_R b_3 + R_\xi &= Q_R \ddot{\chi}_3, \\ Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F Q_R b_\alpha dF + R_{\nu\alpha} &= \int_F Q_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ (1.1.4) \quad M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F Q_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + R_\rho &= \\ &= \int_F Q_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF, \end{aligned}$$

oraz do warunków brzegowych (2.7) w [2]

$$\begin{aligned} T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33} n_3 - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ (1.1.5) \quad Q_\alpha n_\alpha - \int_F p_\alpha dF &= S_{\nu\alpha} \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_{\nu\alpha} \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \end{aligned}$$

gdzie Q_α i M_3 dane są równaniami konstytutywnymi (2.6) w [2].

Następnie korzysta się z zasady idealności więzów dla więzów dodatkowych, która po wprowadzeniu mnożników Lagrange'a i zastosowaniu twierdzenia o divergencji przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 (1.1.6) \quad & \int_0^L \left\{ \int_{\partial F} S_\xi \delta \zeta d(\partial F) + \int_F R_\xi \delta \zeta dF + R_{\psi_1} \delta \psi_1 + R_2 \delta \psi_2 + R_\varphi \delta \varphi - \right. \\
 & - \int_{\partial F} \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{,\alpha}^m} n_\alpha \delta \chi^m d(\partial F) - \int_F \left[\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \lambda^m} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{,k}^m} \right)_{,k} \right] \delta \chi^m dF - \\
 & \left. - \int_{\partial F} \mu^{\rho'} \frac{\partial \beta_{\rho'}}{\partial \chi_{,s}^3} \delta \chi^3 + \mu^{\rho''} \left(\frac{\partial \beta_{\rho''}}{\partial \chi_{,s}^3} \delta \chi_{,s}^3 \right) d(\partial F) \right\} dX_3 + \\
 & + \left| \int_F S_\xi \delta \zeta dF + S_{\psi_1} \delta \psi_1 + S_{\psi_2} \delta \psi_2 + S_\varphi \delta \varphi - \int_F \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{,3}^m} n_3 \delta \chi^m dF - \right. \\
 & \left. - \int_F \mu^{\rho'} \frac{\partial \beta_{\rho'}}{\partial \chi^m} \delta \chi^m dF \right|_{X_3=0, X_3=L} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie wskaźnik ν przebiega ciąg $1, 2, \dots, p', p'+1, p'+2, \dots, p'+p''$, zaś sumowanie należy wykonać po $\nu, \rho', \rho'', m, \alpha, k$.

Dzięki wprowadzeniu mnożników Lagrange'a można traktować wariacje funkcji $\varphi, \psi_\alpha, \varepsilon, \Phi$ jako niezależne. Podstawiając do (1.1.6) składowe przemieszczeń wirtualnych

$$\begin{aligned}
 (1.1.7) \quad & \delta \chi_1 = -\delta \varphi X_2 + \delta \psi_1, \\
 & \delta \chi_2 = \delta \varphi X_1 + \delta \psi_2, \\
 & \delta \chi_3 = \Phi \delta \varepsilon + (1 + \varepsilon) \delta \Phi
 \end{aligned}$$

stosując lemat du Bois-Reymonda otrzymuje się następujący układ równań

$$\begin{aligned}
 (1.1.8) \quad & \int_0^L \left[-R_\xi + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,k}} \right)_{,k} \right] (1 + \varepsilon) dX_3 + \left| \left(-S_\xi + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,3}} n_3 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu^{\rho'} \frac{\partial \beta_{\rho'}}{\partial \zeta} \right) (1 + \varepsilon) \right|_{X_3=0, X_3=L} = 0, \\
 & \int_F \left(-S_\xi + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,\alpha}} n_\alpha + \mu^{\rho''} \frac{\partial \beta_{\rho''}}{\partial \zeta} \right) \Phi d(\partial F) + \int_{\partial F} \mu^{\rho''} \frac{\partial \beta_{\rho''}}{\partial \zeta_{,s}} \Phi_{,s} d(\partial F) + \\
 & + \int_F \left[-R_\xi + \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \zeta_{,k}} \right)_{,k} \right] \Phi dF = 0, \\
 & -R_{\psi_1} + \int_F \left[\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_1} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{1,k}} \right)_{,k} \right] dF + \int_{\partial F} \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{1,\alpha}} n_\alpha d(\partial F) = 0, \\
 & -R_{\psi_2} + \int_F \left[\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_2} - \left(\lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{2,k}} \right)_{,k} \right] dF + \int_{\partial F} \lambda^\nu \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \chi_{2,\alpha}} n_\alpha d(\partial F) = 0,
 \end{aligned}$$

$$(1.1.8) \quad -R_\varphi + \int_F \left\{ \left[\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_2} - \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,k}} \right)_{,k} \right] X_1 - \left[\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_1} - \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,k}} \right)_{,k} \right] X_2 \right\} dF +$$

$$[cd] \quad + \int_{\partial F} \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,\alpha}} n_\alpha X_1 - \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,\alpha}} n_\alpha X_2 \right) d(\partial)F = 0,$$

oraz następujące warunki brzegowe

$$\int_0^L \left[-S_\xi + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi_{,\alpha}} n_\alpha + \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi} - \left(\mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi_{,s}} \right)_{,s} \right] (1 + \varepsilon) dX_3 = 0$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$,

$$\int_0^L \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi_{,s}} (1 + \varepsilon) dX_3 = 0 \quad \text{w miejscach połączenia gładkich płytów brzegu } \partial F,$$

$$(1.1.9) \quad \int_F \left(-S_\xi + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi_{,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \xi} \right) \Phi dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,$$

$$-S_{\varphi_1} + \int_F \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_1} \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,$$

$$-S_{\varphi_2} + \int_F \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_2} \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,$$

$$-S_\varphi + \int_F \left[\left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{2,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_2} \right) X_1 - \left(\lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_{1,3}} n_3 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \chi_1} \right) X_2 \right] dF = 0$$

dla $X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L$.

Równania (1.1.8) po podstawieniu sił reakcji więzów ze wzorów (1.1.4) i (1.1.5) oraz po zastosowaniu twierdzenia o divergencji przyjmują postać

$$(1.1.10) \quad \int_0^L \left[T^{3\alpha}_{,\alpha} (1 + \varepsilon) - T^{33} \varepsilon_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi} (1 + \varepsilon) \right] dX_3 + \left[\left(\mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \xi} + p_3 \right) (1 + \varepsilon) \right]_{X_3=0}^{X_3=L} +$$

$$+ \int_0^L \varrho_R b_3 (1 + \varepsilon) dX_3 = \int_0^L \varrho_R [(1 + \varepsilon) \ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon} \Phi] dX_3,$$

$$\int_F \left(T^{33}_{,3} \Phi - T^{3\alpha} \Phi_{,\alpha} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \xi} \Phi \right) dF + \int_{\partial F} \left(\mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi} \Phi + \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \xi_{,s}} \Phi_{,s} \right) d(\partial F) +$$

$$+ \int_{\partial F} p_3 \Phi d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_3 \Phi dF = \int_F \varrho_R [(1 + \varepsilon) \ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon} \Phi] dF,$$

$$\int_F \left(T^{13}_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_1} \right) dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_1 dF = \int_F \varrho_R (\ddot{\psi}_1 - \ddot{\psi} X_2) dF,$$

$$\int_F \left(T^{23}_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial \chi_2} \right) dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_2 dF = \int_F \varrho_R (\ddot{\psi}_2 + \ddot{\psi} X_1) dF,$$

$$(1.1.10) \quad \int_F \left[(T^{23}X_1 - T^{13}X_2)_{,3} + \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial X_2} X_1 - \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial X_1} X_2 \right] dF + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) +$$

$$[cd] \quad + \int_F q_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \int_F q_R [\ddot{\psi}_2 X_1 - \ddot{\psi}_1 X_2 + \ddot{\varphi} (X_1^2 + X_2^2)] dF,$$

gdzie

$$(1.1.11) \quad T^{ij} \equiv \bar{T}^{ij} - \lambda^v \frac{\partial \gamma_v}{\partial X_{i,j}}.$$

Po podstawieniu sił reakcji więzów (1.1.5) oraz zależności (1.1.11) do warunków brzegowych (1.1.9), otrzymuje się je w następującej postaci

$$\int_0^L \left[T^{3\alpha} n_\alpha - \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \zeta} + \left(\mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \zeta_{,s}} \right)_{,s} - p_3 \right] (1 + \varepsilon) dX_3 = 0$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$,

$$\int_0^L \mu^{e''} \frac{\partial \beta_{e''}}{\partial \zeta_{,s}} (1 + \varepsilon) dX_3 = 0 \text{ w punktach połączenia gładkich płatów brzegu } \partial F,$$

$$\int_F \left(T^{33} n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial \zeta} - p_3 \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

$$(1.1.12) \quad \int_F \left(T^{13} n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_1} - p_1 \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

$$\int_F \left(T^{23} n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_2} - p_2 \right) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

$$\int_F \left[(T^{23}X_1 - T^{13}X_2) n_3 - \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_2} X_1 + \mu^{e'} \frac{\partial \beta_{e'}}{\partial X_1} X_2 - p_2 X_1 + p_1 X_2 \right] dF = 0$$

dla $X_3 = 0$ i $X_3 = L$.

Występujące w dynamicznych warunkach brzegowych (1.1.9) i (1.1.12) zewnętrzne siły powierzchniowe interpretuje się albo jako obciążenia zewnętrzne albo reakcje podparć.

Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych $s, \Phi, \psi_1, \psi_2, \varphi$ dla danego materiału opisanego równaniem konstytutywnym (1.3) w [2], z równań ruchu (1.1.10), dynamicznych warunków brzegowych uwzględniających sposób podparcia pręta (1.1.12) oraz warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha^s(X, t)$ z (2.3) w [2] i $u_3(X, t)$ z (1.1.1), składowe stanu naprężenia T^{kl} oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (1.1.4) i (1.1.5).

Oprócz dodatkowych sił reakcji więzów występują takie siły reakcji więzów (2.11) w [2], dla których T^{ij} oblicza się z (2.9) w [2], a współrzędne uogólnione $\zeta, \psi_1, \psi_2, \varphi$ stanowią rozwiązanie układu równań (2.10) w [2] wraz z warunkami brzegowymi (2.12) w [2] i warunkami początkowymi.

Stosując kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych przedstawione w pracy [2] za pomocą wzoru (1.8) należy zwrócić uwagę na fakt, że więzami modelowymi są tylko więzy (2.1) w [2] oraz (1.1.1), natomiast więzy (1.1.2) i (1.1.3) są więzami fizycznymi.

1.2. Równania skrępowanego skręcania wspornika Przedmiotem rozważań jest pręt o dowolnym zwartym przekroju ograniczonym krzywą odcinkami gładką (rys. 1.1) utwierdzony w przekroju $X_3 = 0$. Utwierdzenie uniemożliwia przemieszczenie punktów przekroju podporowego (przekrój podporowy nie pacy się, nie wykonuje obrotu i nie przesuwa się w płaszczyźnie OX_1X_2).

Gęstość pręta oznaczmy przez $\rho_R(X)$, pole zewnętrznych obciążeń masowych przez $b = (b_1, b_2, b_3)$, pole zewnętrznych obciążeń powierzchniowych przez $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.

Obowiązują więzy (2.1) w [2] i (1.1.1), lewe strony (1.1.2) są różnicami równe zeru

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{r'}(\varphi, \varepsilon, \psi_1, \psi_2, \varphi_{,3}, \psi_{1,3}, \psi_{2,3}, \varepsilon_{,3}) &= 0 \quad \text{dla } X_3 \in (0, L), \\ \gamma_{r''}(\Phi, \nabla\Phi) &\equiv 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in F, \end{aligned}$$

natomiast geometryczne więzy brzegowe (1.1.3) przyjmują postać

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= (1 + \varepsilon) = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_2 &= \varphi = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_3 &= \psi_1 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_4 &= \psi_2 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\ \beta_{e'}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \varepsilon) &\equiv 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\ \beta_{e''}(\Phi, \Phi_s) &\equiv 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (1.2.1) i (1.2.2) równania (1.1.10) przyjmują postać

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} \int_0^L [T^{3\alpha}_{, \alpha}(1 + \varepsilon) - T^{33}_{, 3}\varepsilon_{, 3}]dX_3 + |p_3(1 + \varepsilon)|_{X_3=L} + \int_0^L \rho_R b_3(1 + \varepsilon)dX_3 &= \\ &= \int_0^L \rho_R [(1 + \varepsilon)\ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon}\Phi]dX_3, \\ \int_F (T^{33}_{, 3}\Phi - T^{3\alpha}_{, \alpha}\Phi) dF + \int_{\partial F} p_3\Phi d(\partial F) + \int_F \rho_R b_3\Phi dF &= \int_F \rho_R [(1 + \varepsilon)\ddot{\Phi} + \ddot{\varepsilon}\Phi]dF, \\ \int_F T^{13}_{, 3} dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \rho_R b_1 dF &= \int_F \rho_R (\ddot{\psi}_1 - \ddot{\varphi}X_2) dF, \\ \int_F T^{23}_{, 3} dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \rho_R b_2 dF &= \int_F \rho_R (\ddot{\psi}_2 + \varphi X_1) dF, \\ \int_F (T^{23}X_1 - T^{13}X_2)_{, 3} dF + \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) d(\partial F) + \int_F \rho_R (b_2X_1 - b_1X_2) dF &= \\ &= \int_F \rho_R [\ddot{\psi}_2X_1 - \ddot{\psi}_1X_2 + \ddot{\varphi}(X_1^2 + X_2^2)] dF. \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymuje się warunki brzegowe (1.1.12)

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} \int_0^L (T^{3\alpha}_{, \alpha}n_\alpha - p_3)(1 + \varepsilon)dX_3 &= 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ \int_F (-T^{33} - p_3)\Phi dF - \mu_1 F &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_F (T^{33} - p_3) \Phi dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& \int_F (-T^{13} - p_1) dF + \mu_2 \int_F \frac{1}{X_2} dF - \mu_3 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \int_F (T^{13} - p_1) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
(1.2.4) \quad & \int_F (-T^{23} - p_2) dF - \mu_2 \int_F \frac{1}{X_1} dF - \mu_4 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
[\text{cd}] \quad & \int_F (T^{23} - p_2) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& \int_F (-T^{23} X_1 + T^{13} X_2 - p_2 X_1 + p_1 X_2) dF - \mu_2 2F - \mu_4 S_2 + \mu_3 S_1 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2 - p_2 X_1 + p_1 X_2) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L.
\end{aligned}$$

W dalszym ciągu ogranicza się rozważania do przypadku jednorodnych marteiałów liniowo-sprężystych, dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej, co po uwzględnieniu (2.9) w [2] i (1.1.1) prowadzi do

$$\begin{aligned}
(1.2.5) \quad & T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = C^{\alpha\beta 33} \varepsilon_{,3} \Phi, \\
& T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = C^{\alpha 313} [\Phi_{,1}(1+\varepsilon) + \psi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2] + C^{\alpha 323} [\Phi_{,2}(1+\varepsilon) + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1], \\
& T^{33} = C^{3333} \Phi_{,3}.
\end{aligned}$$

Podstawiając (1.2.5) do (1.2.3) otrzymuje się następujący układ pięciu równań różniczkowo-całkowych

$$\begin{aligned}
(1.2.6) \quad & (C^{1313} \Phi_{,11} + 2C^{1323} \Phi_{,12} + C^{2323} \Phi_{,22}) \int_0^L (1+\varepsilon)^2 dX_3 - C^{3333} \Phi \int_0^L \varepsilon_{,3}^2 dX_3 + \\
& + [p_3(1+\varepsilon)]_{X_3=L} + \varrho_R \int_0^L b_3(1+\varepsilon) dX_3 = \varrho_R \ddot{\Phi} \int_0^L (1+\varepsilon) dX_3 + \varrho_R \Phi \int_0^L \ddot{\varepsilon} dX_3, \\
& C^{3333} \varepsilon_{,33} \int_F \Phi^2 dF - \left(C^{1313} \int_F \Phi_{,1}^2 dF + 2C^{1323} \int_F \Phi_{,1} \Phi_{,2} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2}^2 dF \right) \\
& (1+\varepsilon) - \left(C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) \psi_{1,3} - \left(C^{1323} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) \psi_{2,3} - \\
& - \left[-C^{1313} \int_F \Phi_{,1} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\Phi_{,1} X_1 - \Phi_{,2} X_2) dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} X_1 dF \right] \varphi_{,3} + \\
& + \int_{\partial F} p_3 \Phi d(\partial F) + \varrho_R \int_F b_3 \Phi dF = \varrho_R (1+\varepsilon) \int_F \ddot{\Phi} dF + \varrho_R \ddot{\varepsilon} \int_F \Phi dF, \\
& \left(C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) \varepsilon_{,3} + C^{1313} F \psi_{1,33} + C^{1323} F \psi_{2,33} + \\
& + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \varrho_R \int_F b_1 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_1 - S_1 \ddot{\Phi}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(C^{1323} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) \varepsilon_{,3} + C^{1323} F \psi_{1,33} + C^{2323} F \psi_{2,33} + \\
& + (-C^{1323} S_1 + C^{2323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_2 d(\partial)F + \varrho_R \int_F b_2 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_2 + S_2 \ddot{\varphi}), \\
(1.2.6) \quad & - \left[C^{1313} \int_F \Phi_{,1} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\Phi_{,2} X_2 - \Phi_{,1} X_1) dF - C^{2323} \int_F \Phi_{,2} X_1 \right] \varepsilon_{,3} - \\
[cd] \quad & - (C^{1313} S_1 - C^{1323} S_2) \psi_{1,33} - (C^{1323} S_1 - C^{2323} S_2) \psi_{2,33} + (C^{1313} J_1 - \\
& - 2C^{1323} J_{12} + C^{2323} J_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial)F + \varrho_R \int_F (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \\
& = \varrho_R (-S_1 \ddot{\psi}_1 + S_2 \ddot{\psi}_2 + J_0 \ddot{\varphi}).
\end{aligned}$$

Podobnie, podstawiając (1.2.5) do (1.2.4) otrzymuje się warunki brzegowe w następującej postaci

$$\begin{aligned}
& [C^{1313} \Phi_{,1} n_1 + C^{1323} (\Phi_{,2} n_1 + \Phi_{,1} n_2) + C^{2323} \Phi_{,2} n_2] \int_0^L (1+\varepsilon)^2 dX_3 + \\
& + [-C^{1313} X_2 n_1 + C^{1323} (X_1 n_1 - X_2 n_2) + C^{2323} X_1 n_2] \int_0^L \varphi_{,3} (1+\varepsilon) dX_3 + \\
& + (C^{1313} n_1 + C^{1323} n_2) \int_0^L \psi_{1,3} (1+\varepsilon) dX_3 + (C^{1323} n_1 + C^{2323} n_2) \int_0^L \psi_{2,3} (1+\varepsilon) dX_3 - \\
& - \int_0^L p_3 (1+\varepsilon) dX_3 = 0 \quad \text{dla } X_1 X_2 \in \partial F, \\
& -C^{3333} \varepsilon_{,3} \int_F \Phi^2 dF - \int_F p_3 \Phi dF - \mu_1 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
(1.2.7) \quad & C^{3333} \varepsilon_{,3} \int_F \Phi^2 dF - \int_F p_3 \Phi dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& -C^{1313} F \psi_{1,3} - C^{1323} F \psi_{2,3} - \int_F p_1 dF + \mu_2 \int_F \frac{1}{X_2} dF - \mu_3 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \left(C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) (1+\varepsilon) + C^{1313} F \psi_{1,3} + C^{1323} F \psi_{2,3} + \\
& + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi - \int_F p_1 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L, \\
& -C^{1323} F \psi_{1,3} - C^{2323} F \psi_{2,3} - \int_F p_2 dF - \mu_2 \int_F \frac{1}{X_1} dF - \mu_4 F = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
& \left(C^{1323} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF \right) (1+\varepsilon) + C^{1323} F \psi_{1,3} + C^{2323} F \psi_{2,3} + \\
& + (-C^{1323} S_1 + C^{2323} S_2) \varphi - \int_F p_2 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\psi_{1,3} - (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,3} - \\
 & \quad - (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,3} - \int_F (p_2X_1 - p_1X_2)dF - \\
 & \quad - 2F\mu_2 + S_1\mu_3 + S_2\mu_4 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0, \\
 (1.2.7) \quad & \text{[cd]} \quad \left[-C^{1313} \int_F \Phi_{,1}X_2dF + C^{1323} \int_F (\Phi_{,1}X_1 - \Phi_{,2}X_2)dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2}X_1dF \right] \\
 & (1 + \varepsilon) + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\psi_{1,3} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,3} + \\
 & \quad + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,3} - \int_F (p_2X_1 - p_1X_2)dF = 0 \\
 & \quad \text{dla } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu układu równań (1.2.6) z uwzględnieniem warunków brzegowych (1.2.7) i (1.2.2) oraz warunków początkowych ze względu na niewiadome współrzędne uogólnione Φ , ε , ψ_1 , ψ_2 , φ , można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha(X, t)$ z (2.3) w [2] i $u_3(X, t)$ z (1.1.1), składowe stanu naprężenia T^{kl} z (1.2.5) oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (1.1.4) i (1.1.5).

Należy uwzględnić także siły reakcji więzów przedstawione w [2] za pomocą (2.13), gdzie T^{ij} oblicza się z (2.9) w [2] natomiast współrzędne uogólnione ξ , ψ_1 , ψ_2 , φ z układu równań (2.10) w [2] z warunkami brzegowymi (2.12) w [2] i odpowiednimi warunkami początkowymi.

Stosując kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych przedstawione w pracy [2] za pomocą wzoru (1.8) należy zwrócić uwagę na fakt, że więzami modelowymi są tylko więzy (2.1) w [2] oraz (1.1.1), natomiast więzy (1.2.1) i (1.2.2) są więzami fizycznymi.

2. Techniczna teoria skręcania prętów o zwartych przekrojach

Rozważa się pręt pryzmatyczny o dowolnym zwartym jednorodnym przekroju poprzecznym (rys. 1.1) i o swobodnych końcach. Przyjmuje się, że obciążenie zewnętrzne dane jest w postaci sił masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$ i sił powierzchniowych $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.

Ruch pręta ogranicza się, oprócz więzów opisanych w pracy [2] za pomocą zależności (2.1), więzami dodatkowymi:

$$(2.1) \quad u_3 = \xi = \Phi,$$

gdzie $\Phi = \Phi(X_1, X_2, t)$ jest nową współrzędną uogólnioną.

W ten sposób uzyskuje się funkcję spaczenia przekroju stałą na całej długości pręta i zależną od kształtu przekroju poprzecznego pręta w danej chwili t .

Inaczej można by otrzymać równania omawianej teorii korzystając z teorii skręcania skrępowanego prętów o zwartych przekrojach jak to przedstawiono w rozdziale 1.

Sposób zastosowany w niniejszym rozdziale jest znacznie prostszy.

Wprowadzając dodatkowe więzy (2.1) należy uwzględnić powstanie dodatkowych sił reakcji więzów, które wprowadza się, analogicznie jak w rozdziałach 3 pracy [2] i 1 niniejszej pracy, do równań ruchu (2.5) w [2]

$$\begin{aligned}
 T^{3j},_j + \varrho_R b_3 + R_\zeta &= \varrho_R \ddot{\chi}_3, \\
 Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_\alpha dF + R_{\varphi\alpha} &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\
 (2.2) \quad M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + R_\varphi &= \\
 &= \int_F \varrho_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF,
 \end{aligned}$$

oraz do warunków brzegowych (2.7) w [2].

$$\begin{aligned}
 T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 T^{33} n_3 - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 (2.3) \quad Q_{\alpha} n_3 - \int_F p_\alpha dF &= S_{\varphi\alpha} \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_\varphi \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,
 \end{aligned}$$

gdzie Q_α i M_3 dane są równaniami konstytutywnymi (2.6) w [2].

Zasada idealności dla więzów dodatkowych przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \int_0^L \left[\int_{\partial F} S_\zeta \delta \zeta d(\partial F) + \int_F R_\zeta \delta \zeta dF + R_{\varphi 1} \delta \psi_1 + R_{\varphi 2} \delta \psi_2 + R_\varphi \delta \varphi \right] dX_3 + \\
 + \left[\int_F S_\zeta \delta \zeta dF + S_{\varphi 1} \delta \psi_1 + S_{\varphi 2} \delta \psi_2 + S_\varphi \delta \varphi \right]_{X_3=0 \text{ i } X_3=L} = 0.
 \end{aligned}$$

Podstawiając składowe przemieszczeń wirtualnych

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \delta \chi_1 &= -\delta \varphi X_2 + \delta \psi_1, \\
 \delta \chi_2 &= \delta \varphi X_1 + \delta \psi_2, \\
 \delta \chi_3 &= \delta \Phi.
 \end{aligned}$$

do równania (2.4) i korzystając z niezależności wariacji współrzędnych uogólnionych oraz z lematu du Bois-Reymonda otrzymuje się następujący układ równań

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad \int_0^L R_\zeta dX_3 + |S_\zeta|_{X_3=0 \text{ i } X_3=L} &= 0, \\
 R_{\varphi 1} &= 0, \\
 R_{\varphi 2} &= 0, \\
 R_\varphi &= 0,
 \end{aligned}$$

oraz odpowiadające mu warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad \int_0^L S_\zeta dX_3 &= 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 S_{\varphi 1} &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 S_{\varphi 2} &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 S_\varphi &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Równania (2.6) po podstawieniu sił reakcji więzów ze wzorów (2.2) i (2.3) oraz po zastosowaniu twierdzenia o divergencji przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L T^{3\alpha}{}_{,\alpha} dX_3 + p_3 \Big|_{X_3=L}^{X_3=0} + \int_0^L \varrho_R b_3 dX_3 = \int_0^L \varrho_R \ddot{\Phi} dX_3, \\
 & \int_F T^{13}{}_{,3} dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_1 dF = \int_F \varrho_R (-\ddot{\psi} X_2 + \ddot{\psi}_1) dF, \\
 (2.8) \quad & \int_F T^{23}{}_{,3} dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_2 dF = \varrho_R (\ddot{\psi} X_1 + \ddot{\psi}_2) dF, \\
 & \int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2)_{,3} dF + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \\
 & + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \int_F \varrho_R [\ddot{\psi} (X_1^2 + X_2^2) + \ddot{\psi}_2 X_1 - \ddot{\psi}_1 X_2] dF,
 \end{aligned}$$

natomiast warunki brzegowe (2.7) po analogicznych przekształceniach dane są przez

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L (T^{3\alpha} n_\alpha - p_3) dX_3 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 & \int_F (T^{13} n_3 - p_1) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 (2.9) \quad & \int_F (T^{23} n_3 - p_2) dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\
 & \int_F [(T^{23} X_1 - T^{13} X_2) n_3 - p_2 X_1 + p_1 X_2] dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Ograniczając rozważania do materiałów jednorodnych, liniowo-sprężystych, dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej i uwzględniając (2.9) w [2] i (2.1) otrzymuje się równania konstytutywne materiału w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = C^{\alpha 313} (\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \psi_{,3} X_2) + C^{\alpha 323} (\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1), \\
 & T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = T^{33} = 0.
 \end{aligned}$$

Podstawiając (2.10) do (2.8) otrzymuje się układ czterech równań różniczkowych dla czterech współrzędnych uogólnionych $\Phi, \psi_1, \psi_2, \varphi$:

$$\begin{aligned}
 & L(C^{1313} \Phi_{,11} + 2C^{1323} \Phi_{,12} + C^{2323} \Phi_{,22}) + p_3 \Big|_{X_3=L}^{X_3=0} + \varrho_R \int_0^L b_3 dX_3 = \varrho_R L \ddot{\Phi}, \\
 (2.11) \quad & C^{1313} F \psi_{1,33} + C^{1323} F \psi_{2,33} + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi_{,33} + \int_F p_1 d(\partial F) + \\
 & + \varrho_R \int_F b_1 dF = \varrho_R (F \psi_1 - S_1 \ddot{\psi}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C^{1323}F\psi_{1,33} + C^{2323}F\psi_{2,33} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \\
& \quad + \varrho_R \int_F b_2 dF = \varrho_R (F\ddot{\psi}_2 + S_2\ddot{\varphi}), \\
& -(C^{1313}S_1 - C^{1323}S_2)\psi_{1,33} - (C^{1323}S_1 - C^{2323}S_2)\psi_{2,33} + \\
& \quad + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,33} + \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) d(\partial F) + \\
& \quad + \varrho_R \int_F (b_2X_1 - b_1X_2) dF = \varrho_R (-S_1\ddot{\psi}_1 + S_2\ddot{\psi}_2 + J_0\ddot{\varphi}).
\end{aligned}$$

Analogicznie otrzymuje się warunki brzegowe, wstawiając (2.10) do (2.9)

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \{ [C^{1313}(\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3}X_2) + C^{1323}(\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3}X_1)]n_1 + \\
& \quad + [C^{1323}(\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3}X_2) + C^{2323}(\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3}X_1)]n_2 \} dX_3 - \\
& \quad - \int_0^L p_3 dX_3 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
& C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{1323} \int_F \Phi_{,2} dF + C^{1313}F\psi_{1,3} + C^{1323}F\psi_{2,3} + (-C^{1313}S_1 + \\
& \quad + C^{1323}S_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F p_1 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
(2.12) \quad & C^{1313} \int_F \Phi_{,1} dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2} dF + C^{1323}F\psi_{1,3} + C^{2323}F\psi_{2,3} + (-C^{1323}S_1 + \\
& \quad + C^{2323}S_2)\Phi_3 - n_3 \int_F p_2 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
& -C^{1313} \int_F (\Phi_{,1}X_2) dF - C^{1323} \int_F (\Phi_{,2}X_2 - \Phi_{,1}X_1) dF + C^{2323} \int_F \Phi_{,2}X_1 dF - \\
& \quad - (C^{1313}S_1 - C^{1323}S_2)\psi_{1,3} - (C^{1323}S_1 - C^{2323}S_2)\psi_{2,3} + \\
& \quad + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) dF = 0 \\
& \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L.
\end{aligned}$$

Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych Φ , φ , ψ_1 , ψ_2 z równań ruchu (2.11) i dynamicznych warunków brzegowych (2.12) oraz odpowiednich warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha(X, t)$ z (2.3) w [2] oraz $u_3(X, t)$ z (2.1), składowe stanu naprężenia $T^{kl}(X, t)$ z (2.10) oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (2.2) i (2.3).

Ponieważ zachodzą związki (2.6) i (2.7), różnymi od zera dodatkowymi siłami reakcji więzów są

$$(2.13) \quad R_t = -T^{3\alpha}_{, \alpha} - \varrho_R b_3 + \varrho_R \ddot{\Phi} = -C^{1313}\ddot{\Phi}_{,11} - 2C^{1323}\ddot{\Phi}_{,12} - C^{2323}\ddot{\Phi}_{,22} - \\
\quad - \varrho_R b_3 + \varrho_R \ddot{\Phi},$$

$$S_{\zeta} = -p_3 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,$$

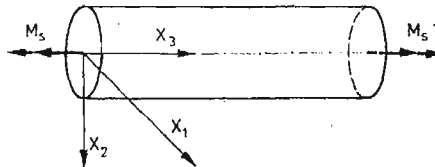
$$S_{\zeta} = T^{3\alpha} n_{\alpha} - p_3 = [C^{1313}(-\varphi_{,3} X_2 + \psi_{1,3} + \Phi_{,1}) + C^{1323}(\varphi_{,3} X_1 + \psi_{2,3} + \Phi_{,2}) + C^{1323}(-\varphi_{,3} X_2 + \psi_{1,3} + \Phi_{,1}) + C^{2323}(\varphi_{,3} X_1 + \psi_{2,3} + \Phi_{,2})] n_2 - p_3$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$.

Oprócz sił reakcji więzów (2.13) występują także siły reakcji więzów (2.13) w [2], dla których T^{ij} należy wyznaczyć z (2.9) w [2] a współrzędne uogólnione $\zeta, \psi_1, \psi_2, \varphi$ stanowią rozwiązanie układu równań (2.10) w [2] wraz z warunkami brzegowymi (2.12) w [2] i warunkami początkowymi.

3. Przykład

Rozpatruje się pryzmatyczny, jednorodny, izotropowy pręt o długości L i o przekroju poprzecznym w kształcie elipsy. Osie X_1 i X_2 układu współrzędnych kartezjańskich $OX_1 X_2 X_3$ są zarazem głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju. Przyjmuje się, że pręt obciążony jest w sposób statyczny parami sił działającymi w końcowych przekrojach pręta, natomiast powierzchnia boczna pręta jest wolna od obciążeń zewnętrznych. Pomija się wpływ sił masowych. Rys. 3.1 przedstawia pręt obciążony momentami skręcającymi $M_s > 0$ (zwrot wektora momentu przyjęto zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej).



Rys. 3.1

W celu uzyskania rozwiązania zastosujemy najpierw ogólną teorię skręcania, przedstawioną w rozdziale drugim pracy [2].

Uwzględniając izotropię materiału oraz sposób obciążenia pręta otrzymuje się układ równań (2.10) w [2] z niewiadomymi współrzędnymi uogólnionymi $\zeta(X_1, X_2, X_3), \psi_1(X_3), \psi_2(X_3), \varphi(X_3)$ w następującej postaci:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \zeta_{,11} + \zeta_{,22} + \zeta_{,33} &= 0, \\ \int_F \zeta_{,13} dF + F\psi_{1,33} &= 0, \\ \int_F \zeta_{,23} dF + F\psi_{2,33} &= 0, \\ \int_F (\zeta_{,23} X_1 - \zeta_{,13} X_2) dF + J_0 \varphi_{,33} &= 0, \end{aligned}$$

natomiast warunki brzegowe (2.12) w [2] w postaci

$$\begin{aligned}
 & (\zeta_{,1} + \varphi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2) n_1 + (\zeta_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1) n_2 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\
 & \zeta_{,3} = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 & \int_F \zeta_{,1} dF + F \psi_{1,3} = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 & \int_F \zeta_{,2} dF + F \psi_{2,3} = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\
 & C^{1313} \left[\int_F (\zeta_{,2} X_1 - \zeta_{,1} X_2) dF + J_0 \varphi_{,3} \right] = M_s \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

gdzie

$$M_s = n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF.$$

Ze względu na warunek brzegowy (3.2)₂ wykonuje się na równaniu (3.1)₁ skończoną cosinusową transformację Fouriera względem zmiennej X_3 , otrzymując

$$\bar{\zeta}_{n,11} + \bar{\zeta}_{n,22} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \bar{\zeta}_n = 0,$$

gdzie

$$\bar{\zeta}_n = \int_0^L \zeta \cos \left(\frac{n\pi X_3}{L} \right) dX_3,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Funkcji $\bar{\zeta}_n$ poszukuje się w postaci

$$\bar{\zeta}_n = A_n e^{\omega_n(x_1+x_2)}$$

Po podstawieniu (3.4) do równania (3.3) otrzymuje się

$$\omega_n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L},$$

stąd

$$\bar{\zeta}_n = A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)} + A_{2n} \kappa_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)},$$

gdzie A_{1n} , A_{2n} są dowolnymi stałymi, natomiast

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= \begin{cases} 1 & \text{gdy } X_1+X_2 \leq 0, \\ 0 & \text{gdy } X_1+X_2 > 0, \end{cases} \\
 \kappa_2 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } X_1+X_2 \leq 0, \\ 1 & \text{gdy } X_1+X_2 > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się

$$\zeta_1 = \frac{2}{L} \sum_{n=1} \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)} + A_{2n} \kappa_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1+X_2)} \right] \cos \left(\frac{n\pi}{L} X_3 \right).$$

Jak łatwo zauważyć, również funkcja

$$\zeta_2 = \tilde{A} X_1 X_2,$$

gdzie \tilde{A} jest dowolną stałą, niezależną od zmiennej X_3 spełnia równanie (3.1)₁.

Ostatecznie szukane rozwiązanie przyjmuje postać

$$(3.5) \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = \tilde{A} X_1 X_2 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} + \right. \\ \left. + A_{2n} \kappa_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} \right] \cos \left(\frac{n\pi}{L} X_3 \right).$$

Po podstawieniu funkcji (3.4) do równania (3.1)₂ otrzymuje się

$$\psi_1 = \tilde{B}_1 X_3 + \tilde{B}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{F} \frac{B_n}{(n\pi)^2} \sin \left(\frac{n\pi}{L} X_3 \right),$$

gdzie

$$B_n = -\frac{\sqrt{2}}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \int_F \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} - A_{2n} \kappa_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} \right] dF,$$

W podobny sposób z równania (3.1)₃ otrzymuje się

$$\psi_2 = \tilde{C}_1 X_3 + \tilde{C}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{F} \frac{B_n}{(n\pi)^2} \sin \left(\frac{n\pi}{L} X_3 \right),$$

natomiast z równania (3.1) otrzymuje się

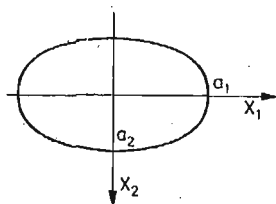
$$\varphi = \tilde{D}_1 X_3 + \tilde{D}_2 - \frac{L^2}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{(n\pi)^2} \sin \left(\frac{n\pi}{L} X_3 \right),$$

gdzie

$$K_n = -\frac{\sqrt{2}}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \int_F \left[A_{1n} \kappa_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} + A_{2n} \kappa_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n\pi}{L} (X_1 + X_2)} \right] (X_2 - X_1) dF$$

Z warunku brzegowego (3.2)₃ otrzymuje się $\tilde{B}_1 = 0$, z warunku (3.2)₄ $\tilde{C}_1 = 0$, a z warunku (3.2)₅

$$\tilde{D}_1 = \frac{M_s}{C^{1313} J_0} + \tilde{A} \frac{J_1 - J_2}{J_0}$$



Rys. 3.2

Jeżeli konturem przekroju jest elipsa (rys. 3.2) o równaniu

$$(3.6) \quad \frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} = 1$$

z warunku brzegowego (3.2)₁ wynika, że

$$\begin{aligned} A_{1n} &= 0, \\ A_{2n} &= 0, \\ \tilde{A} &= \frac{M_s(a_2^2 - a_1^2)}{2C^{1313}(J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2)}. \end{aligned}$$

Ostatecznie szukane funkcje przyjmują postać

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{M_s(a_2^2 - a_1^2)X_1 X_2}{2C^{1313}(J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2)}, \\ \psi_1 &= B_2, \\ \psi_2 &= C_2, \\ \varphi &= \frac{M_s(a_1^2 + a_2^2)X_3}{2C^{1313}(J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2)} + \tilde{D}_2. \end{aligned}$$

Następnie wyznacza się składowe stanu przemieszczenia podstawiając (3.7) do (2.3) w [2]

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u_1 &= \tilde{B}_2 - \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} - \tilde{D}_2 X_2, \\ u_2 &= \tilde{C}_3 + \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} + \tilde{D}_2 X_1, \\ u_3 &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_2^2 - a_1^2)X_1 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} \end{aligned}$$

oraz składowe stanu naprężenia (2.9) w [2], które po uwzględnieniu (3.7) przyjmują postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} T^{13} &= T^{31} = -\frac{M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{23} &= T^{32} = \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{11} &= T^{22} = T^{33} = 0. \end{aligned}$$

Spośród sił reakcji więzów (2.13) w [2] różnymi od zera są następujące:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} s_1 &= -\frac{M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3 - p_1 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ s_2 &= \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3 - p_2 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L. \end{aligned}$$

Jeżeli rozkład obciążeń zewnętrznych w przekrojach $X_3 = 0$ i $X_3 = L$ będzie dokładnie taki sam jak rozkład naprężeń $p_1 = -\frac{M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3$, $p_2 = \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2} n_3$, wówczas wszystkie siły reakcji więzów będą równe zeru.

Okazuje się, że dla pręta obciążonego w podany wyżej sposób więzy wewnętrzne (2.1) w [2] upraszczając matematyczny opis problemu, nie wywierają żadnego wpływu na fizyczny charakter tego problemu, tzn. ciało w sposób „naturalny” odkształca zgodnie z założeniem.

Następnie zastosujemy do omówionego na wstępie pręta techniczną teorię skręcania prętów o przekroju zwartym przedstawioną w rozdziale drugim. Po uwzględnieniu izotropii materiału i sposobu obciążenia pręta równania (2.11) przyjmują znacznie prostszą postać

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Phi_{,11} + \Phi_{,22} &= 0, \\ \psi_{1,33} &= 0, \\ \psi_{2,33} &= 0, \\ \varphi_{,33} &= 0. \end{aligned}$$

a ich rozwiązaniami są funkcje

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Phi &= AX_1X_2, \\ \psi_1 &= B_1X_3 + B_2, \\ \psi_2 &= C_1X_3 + C_2, \\ \varphi &= D_1X_3 + D_2. \end{aligned}$$

gdzie $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ oznaczają dowolne stałe.

Warunki brzegowe (2.12) przyjmują następującą postać

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \int_0^L [(\Phi_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3}X_2)n_1 + (\Phi_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3}X_1)n_2]dX_3 &= 0 \\ &\text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ F\psi_{1,3} + \int_F \Phi_{,1}dF &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ F\psi_{2,3} + \int_F \Phi_{,2}dF &= 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \\ C^{1313} \left[\int_F (\Phi_{,2}X_1 - \Phi_{,1}X_2)dF + J_0\varphi_{,3} \right] &= M_s \quad \text{dla } X_3 = 0 \quad \text{i} \quad X_3 = L, \end{aligned}$$

gdzie

$$M_s = n_3 \int_F (p_2X_1 - p_1X_2)dF$$

Jeżeli konturem przekroju jest elipsa (rys. 3.2) o równaniu (3.6), to po wyznaczeniu stałych z warunków brzegowych (3.13) współrzędne uogólnione (3.12) przyjmują postać

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_2^2 - a_1^2)X_1X_2}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2}, \\ \psi_1 &= B_2, \\ \psi_2 &= C_2, \\ \varphi &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} + D_2. \end{aligned}$$

Następnie można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia podstawiając (3.14) do (2.3) w [2] i (2.1)

$$(3.15) \quad \begin{aligned} u_1 &= B_2 - \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3X_2}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} - D_2X_2, \\ u_2 &= C_2 + \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_1^2 + a_2^2)X_3X_1}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} + D_2X_1, \\ u_3 &= \frac{M_s}{2C^{1313}} \frac{(a_2^2 - a_1^2)X_1X_2}{J_1a_1^2 + J_2a_2^2} \end{aligned}$$

oraz składowe stanu naprężenia (2.10), które po uwzględnieniu (3.14) przyjmują postać

$$(3.16) \quad \begin{aligned} T^{13} &= T^{31} = \frac{-M_s a_1^2 X_2}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{23} &= T^{32} = \frac{M_s a_2^2 X_1}{J_1 a_1^2 + J_2 a_2^2}, \\ T^{\alpha\beta} &= T^{\beta\alpha} = T^{33} = 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.16) do (2.13) okazuje się, że wszystkie dodatkowe siły reakcji więzów są równe zeru. Należy także uwzględnić istnienie sił reakcji więzów (2.13) w [2], które, jak to już przedstawiono przy omawianiu rozwiązania według ogólnej teorii skręcania, także są równe zeru, jeżeli rozkład obciążeń zewnętrznych w przekroju $X_3 = 0$ i $X_3 = L$ jest dokładnie taki sam jak rozkład naprężeń.

Analiza rozwiązań, otrzymanych dla omawianego pręta według teorii ogólnej i technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach wykazuje, że dodatkowe więzy wewnętrzne (2.1) upraszczając znacznie sposób rozwiązania także nie wywarły żadnego wpływu na fizyczny charakter problemu.

Współrzędne uogólnione (3.7) w teorii ogólnej są, z dokładnością do dowolnych stałych, takie jak współrzędne uogólnione (3.14) w technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach, podobnie jest z przemieszczeniami (3.8) i (3.15), co w rezultacie daje identyczność składowych stanu naprężenia, wyrażonych wzorami (3.9) i (3.15).

Okazuje się, że dla omawianego pręta wystarczy rozwiązanie równań technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach, ponieważ znikanie dodatkowych sił reakcji więzów pozwala stwierdzić, że będą zachodziły omówione wyżej zależności między przemieszczeniami i naprężeniami w obu teoriach, pozwalające na obliczenie sił reakcji więzów (2.13) w [2] korzystając z (3.16).

Porównajmy teraz otrzymane tu równania technicznej teorii skręcania prętów o zwartym przekroju w przypadku izotropowego, nieważkiego pręta poboczniczy wolnej od obciążeń, skręcanego statycznie parami sił, działającymi w końcowych przekrojach o momentach skręcających M_s , z równaniami wyprowadzonymi przez Saint-Venanta ([3] s. 177 - 187, [4] s. 366 - 387) dla swobodnie skręcanego pręta w ramach klasycznej teorii sprężystości.

Według teorii Saint-Venanta funkcja spaczenia przekroju $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(X_1, X_2)$ jest rozwiązaniem równania

$$(3.17) \quad \tilde{\varphi}_{,11} + \tilde{\varphi}_{,22} = 0,$$

z warunkiem brzegowym

$$(3.18) \quad (\tilde{\varphi}_{,1} - X_2)n_1 + (\tilde{\varphi}_{,2} + X_1)n_2 = 0$$

dla $X_1, X_2 \in \partial F$.

Dla przekroju poprzecznego w kształcie elipsy (rys. 3.2) o równaniu (3.6) funkcja spazczenia przekroju otrzymana przez Saint-Venanta przyjmuje postać

$$(3.19) \quad \tilde{\varphi} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_1 X_2,$$

składowe stanu przemieszczenia wyrażają się wzorami

$$(3.20) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\tilde{\omega} X_2 X_3, \\ u_2 &= \tilde{\omega} X_1 X_3, \\ u_3 &= \tilde{\omega} \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_1 X_2, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\omega} = \frac{M_s}{D_s}$,

$$D_s \equiv C^{1313} \int_F (X_1^2 + X_2^2 - X_2 \tilde{\varphi}_{,1} + X_1 \tilde{\varphi}_{,2}) dF = \frac{2C^{1313}(a_1^2 J_1 + a_2^2 J_2)}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{C^{1313} \pi a_1^3 a_2^3}{a_1^2 + a_2^2},$$

natomiast składowe stanu naprężenia są następujące

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \tau^{13} &= \tau^{31} = -\frac{2C^{1313} a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_2, \\ \tau^{23} &= \tau^{32} = \frac{2C^{1313} a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} X_1, \\ \sigma^{11} &= \sigma^{22} = \sigma^{33} = \tau^{12} = \tau^{21} = 0. \end{aligned}$$

Porównując równania (3.11) i (3.13) z (3.17) i (3.18) można stwierdzić, że zasadniczą różnicę stanowi postać warunków brzegowych (3.18) i (3.13). W teorii Saint-Venanta wektor naprężenia na powierzchni bocznej pręta musi być skierowany stycznie do brzegu ze względu na brak obciążeń zewnętrznych na poboczniczy, natomiast w wyprowadzonej w niniejszej pracy technicznej teorii skręcania prętów o zwartych przekrojach składową naprężenia wypadkowego prostopadłą do brzegu równoważą powierzchniowe siły reakcji więzów s_1 i s_2 .

Dla omawianego w przykładzie sposobu obciążenia pręta pochodne współrzędnych uogólnionych Φ , ψ_1 , ψ_2 , φ (3.13) nie zależą od współrzędnej X_3 i w rezultacie otrzymuje się równość (z dokładnością do dowolnych stałych) składowych stanu przemieszczenia (3.15) i (3.20) oraz identyczność składowych stanu naprężenia (3.16) i (3.21).

Zauważmy jeszcze, że w przypadku szczególnym, gdy $a_1 = a_2$ mamy do czynienia z przekrojem kołowym i, zgodnie z oczekiwaniem, przekrój pręta nie doznaje spazczenia, a największe naprężenia styczne występują na obwodzie koła.

4. Podsumowanie

Dotychczasowe prace poświęcone analizie skręcania prętów zakładały zawsze jakąś z góry przyjętą hipotezę, co powodowało trudności w porównywaniu różnych teorii — wyniki trzeba było weryfikować doświadczalnie.

Podejście do zagadnień skręcania zastosowane w niniejszej pracy jest jednolite i pozwala na przejście od teorii ogólnej do teorii szczególnych przez narzucenie na ruch pręta dodatkowych ograniczeń.

Ponadto równania opisujące zagadnienie brzegowe pozwalają oszacować błąd rozwiązania brzegowego w stosunku do rozwiązania ścisłego.

Rozpatrywany w pracy model matematyczny skręcanych prętów pryzmatycznych nie był dotychczas badany.

Literatura cytowana w tekście

1. CZ. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, (w:) Dynamika układów sprężystych (praca zbiorowa), Wrocław 1976.
2. K. MAZUR-ŚNIADY, *Skręcanie pryzmatycznych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami*. I. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 4, 17, 1979
3. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
4. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
5. K. MAZUR-ŚNIADY, *Skręcanie pryzmatycznych prostych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami*, *Prace Nauk. Inst. Inż. Łąd. Polit. Wrocł.*, Konferencje, 20, 1976.

Резюме

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ КАК ТЕЛ
С ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ. II.

Темой работы является вывод некоторых технических теорий кручения призматических стержней на основе механики тел с внутренними связями [1]. Получается теория стесненного кручения сплошных стержней и техническую теорию сплошных стержней, которая более общая чем теория Сен-Венанта. В примере рассматривается свободно крутящийся стержень с поперечным сечением в виде эллипса, а задача решается по общей теории и технической теории, после этого приведен анализ результатов.

Summary

TORSION OF PRISMATIC RODS AS BODIES WITH INTERNAL CONSTRAINTS. II.

The aim of the present work is to derive some technical theories of torsion of prismatic rods on the basis of the theory of bodies with internal constraints [1]. We obtain theory of constrained torsion of rods with compact cross-sections and technical theory of rods with compact cross-sections, which is more general than the Saint-Venant theory. In an example we study the rod with elliptic cross-section exposed to unconstrained torsion, obtaining solutions of general theory presented in Sec. 2 in [2] and of technical theory of torsion of rods with compact cross-sections and the analysis of the results.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1978 r.