MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 17 (1979)

NIEUSTALONE POLE TEMPERATURY I NAPRĘŻEŃ W NIESKOŃCZENIE DŁUGIM, WYDRĄŻONYM WALCU OGRZEWANYM NA ZEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI I CHŁODZONYM NA WEWNĘTRZNEJ

JAN TALER (KRAKÓW)

W pracy wyznaczono ścisłe i przybliżone zależności określające nieustalone pole temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu wywołane skokowym wzrostem strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni walca i chłodzonym konwekcyjnie na wewnętrznej. Rozwiązanie ścisłe otrzymano stosując przekształcenie Laplace'a po czasie, natomiast przybliżone za pomocą metody bilansu cieplnego.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

a — promień wewnętrzny walca

$\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha \cdot a}{\lambda}$ — liczba Biota

b — promień zewnętrzny walca

c — ciepło właściwe

E — moduł sprężystości wzdłużnej

$\mathrm{Fo} = \dfrac{\varkappa \cdot t}{a^2}$ — liczba Fouriera

$J_n(x)$ — funkcja Bessela I-go rodzaju n-tego rzędu rzeczywistego argumentu

$k = \dfrac{b}{a}$ — stosunek promienia zewnętrznego walca do wewnętrznego

q — strumień cieplny

r — promień

$T = \Theta - \Theta_{cz}$

$T^* = \dfrac{T \cdot \lambda}{q \cdot b}$ — temperatura bezwymiarowa

t — czas

$Y_n(x)$ — funkcja Bessela II-go rodzaju n-tego rzędu rzeczywistego argumentu

α — współczynnik wnikania ciepła od wewnętrznej powierzchni wydrążonego walca do czynnika wewnątrz walca

α_T — współczynnik rozszerzalności temperaturowej

γ_n — pierwiastek równania charakterystycznego

$\delta(t)$ — głębokość wnikania ciepła

$\varkappa = \dfrac{\lambda}{c \cdot \varrho}$ — współczynnik przewodzenia temperatury

λ — współczynnik przewodzenia ciepła
ν — współczynnik Poissona
ϱ — gęstość materiału
Θ — temperatura
Θ_{cz} — temperatura czynnika wewnątrz walca
σ — naprężenie
$\sigma^* = \dfrac{\sigma(1-\nu)\lambda}{\alpha_T E q b}$ — naprężenie bezwymiarowe
σ_{rr} — naprężenie promieniowe
$\sigma_{\theta\theta}$ — naprężenie obwodowe
σ_{zz} — naprężenie osiowe

1. Wstęp

Pole temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu analizowane było za pomocą metod analitycznych w wielu pracach [1 - 10]. Wadą rozwiązań otrzymanych w wymienionych pracach jest ich trudność praktycznego wykorzystania ze względu na ich złożoność.

W niniejszej pracy wyznaczone zostanie nieustalone pole temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu wywołane skokowym wzrostem strumienia cieplnego na zewnętrznej jego powierzchni i chłodzonym konwekcyjnie na wewnętrznej. Temperatura początkowa walca jest stała i niezależna od promienia.

Zagadnienie to zostanie rozwiązane równocześnie za pomocą analitycznej metody ścisłej i przybliżonej, co umożliwi ocenę dokładności rozwiązania przybliżonego oraz zalet i wad obydwóch rozwiązań.

1. Pole temperatury

Rozkład temperatury w walcu określony jest równaniem różniczkowym przewodzenia ciepła

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{T}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right], \tag{1.1}$$

warunkami brzegowymi

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=b} = q, \tag{1.2}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=b} = \alpha T\big|_{r=a} \tag{1.3}$$

i warunkiem początkowym

$$T|_{t=0} = 0 \tag{1.4}$$

Jak już wspomniano, przedstawione zostaną dwa rozwiązania sformułowanego wyżej zagadnienia: ścisłe i przybliżone.

1.1. **Rozwiązanie ścisłe.** Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1.1. - 1.4.) otrzymane z wykorzystaniem całkowego przekształcenia Laplace'a po czasie t ma postać

$$(1.5)\qquad T(r,t)=\frac{q\cdot b}{\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\ln\frac{r}{a}\right)+$$

$$+\frac{\pi q a}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[N_0\cdot J_0\left(\frac{r}{a}\cdot\gamma_n\right)-L_0\cdot Y_0\left(\frac{r}{a}\cdot\gamma_n\right)\right]e^{-\gamma_n^2\mathrm{Fo}}}{\gamma_n\left[\frac{L_0}{J_1(k\cdot\gamma_n)}-(\mathrm{Bi}^2+\gamma_n^2)\frac{J_1(k\cdot\gamma_n)}{L_0}\right]}$$

gdzie

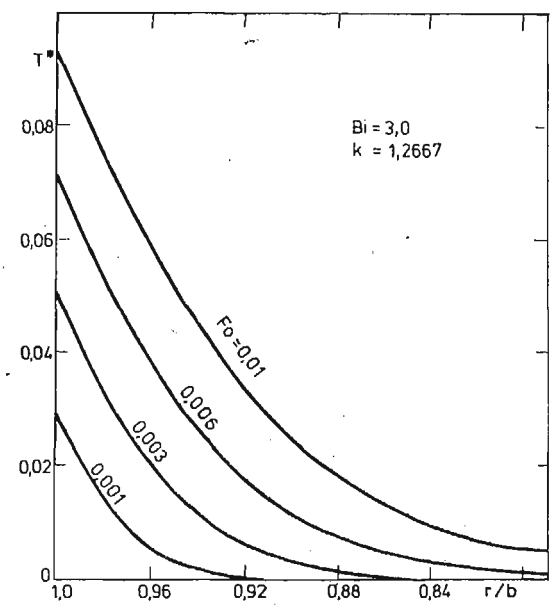
$$(1.6)\qquad \begin{aligned} N_0&=\gamma_n Y_1(\gamma_n)+\mathrm{Bi}\,Y_0(\gamma_n),\\ L_0&=\gamma_n J_1(\gamma_n)+\mathrm{Bi}\,J_0(\gamma_n),\\ \mathrm{Bi}&=\frac{\alpha a}{\lambda},\qquad \mathrm{Fo}=\frac{\varkappa\cdot t}{a^2}, \end{aligned}$$

γ_n — pierwiastki następującego równania charakterystycznego

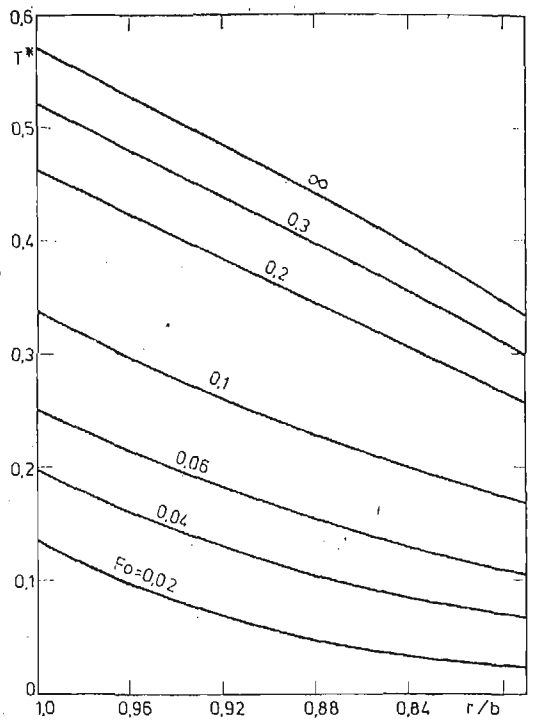
$$(1.7)\qquad \mathrm{Bi}[J_0(\gamma_n)Y_1(k\cdot\gamma_n)-J_1(k\cdot\gamma_n)Y_0(\gamma_n)]+$$
$$+\gamma_n[J_1(\gamma_n)Y_1(k\cdot\gamma_n)-J_1(k\cdot\gamma_n)Y_1(\gamma_n)]=0.$$

Rozkład temperatury (1.5) jest szczególnym przypadkiem rozwiązań przedstawionych w pracach [2, 11].

Zmiany temperatury T w ściance wydrążonego cylindra w zależności od liczby Fouriera Fo dla $k=\frac{19}{15}$ i Bi = 3 przedstawiono na rysunkach 1 i 2. Obliczając $T(r,t)$ wg wzoru



Rys. 1. Rozkład temperatury w ściance wydrążonego walca dla małych liczb Fouriera; Bi = 3, $k=\frac{19}{15}$



Rys. 2. Rozkład temperatury w ściance wydrążonego walca dla większych liczb Fouriera; Bi = 3, $k = \frac{19}{15}$

(1.5) uwzględniono 8 wyrazów szeregu. Z rysunku 1 wynika, że w pierwszych chwilach od momentu skokowego wzrostu strumienia cieplnego nagrzewają się powierzchniowe warstwy cylindra, podczas gdy temperatura wewnętrznej powierzchni jest równa początkowej.

1.2. Rozwiązanie przybliżone. Przybliżony rozkład temperatury w cylindrze zostanie wyznaczony za pomocą metody bilansu cieplnego. Temperatura w I i II-giej fazie wnikania ciepła zostanie przybliżona wielomianem II-go stopnia, co zmniejsza dokładność rozwiązania przybliżonego [12]. Jednakże dzięki aproksymacji pola temperatury wielomianem, wyrażenia określające naprężenia są bardzo proste i jak wynika z pracy [12] dokładność ich jest niewiele mniejsza od wyrażeń otrzymanych przy zastosowaniu zmodyfikowanego profilu temperatury gdy stosunek promienia zewnętrznego rury do wewnętrznego nie jest zbyt duży $k < \sim 3$.

W pierwszej fazie wnikania ciepła nagrzewanie wydrążonego cylindra przebiega identycznie jak nagrzewanie pełnego cylindra, gdyż „front temperatury" nie dociera do jego wewnętrznej powierzchni i opisane jest zależnościami [12].

$$T_{II}^* = \frac{T \cdot \lambda}{q \cdot b} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{b}\left(1 - \frac{b-r}{\delta}\right)^2; \quad (b-\delta) \leqslant r \leqslant b, \tag{1.8}$$

$$T_I^* = 0 \qquad a \leqslant r \leqslant (b-\delta),$$

gdzie głębokość wnikania ciepła wyznacza się z równania

$$\mathrm{Fo} = k^2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 - \frac{1}{24}\left(\frac{\delta}{b}\right)^3\right]. \tag{1.9}$$

W drugiej fazie wnikania ciepła pole temperatury przybliżone zostanie wielomianem

$$T_{II}^{*} = a+br+cr^2 \qquad \mathrm{Fo} \geqslant \mathrm{Fo}_1 \tag{1.10}$$

Liczbę Fouriera Fo_1 odpowiadającą zakończeniu pierwszej fazy wnikania ciepła otrzymuje się podstawiając w (1.9) $\delta = b-a$. Po wyznaczeniu stałych a, b i c z warunków (1.2) i (1.3) oraz z warunku

$$T_{II}|_{r=a} = a = u(t) \tag{1.11}$$

i ponownym ich podstawieniu do (1.10) oraz zapisaniu temperatury w postaci bezwymiarowej otrzymuje się

$$T_{II}^{*} = \frac{T_{II}\cdot\lambda}{q\cdot b} = \frac{1}{2k(k-1)} + \frac{u^{*}(2k-2-2\mathrm{Bi}k+\mathrm{Bi})}{2(k-1)} - \tag{1.11}$$

$$- \frac{1-\mathrm{Bi}\,k^2\cdot u^{*}}{k(k-1)}\frac{r}{a} + \frac{1-\mathrm{Bi}\,ku^{*}}{2k(k-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^2; \qquad \mathrm{Fo} \geqslant \mathrm{Fo}_1.$$

gdzie

$$u^{*} = \frac{u\cdot\lambda}{qb}.$$

Temperaturę wewnętrznej powierzchni walca $u(t)$ wyznacza się z równania bilansu cieplnego, które otrzymuje się mnożąc przez r równanie (1.1), a następnie całkując je po dr w granicach od b do a:

$$\frac{d\psi_{II}}{dt} = \alpha\cdot au(t) - b\cdot q, \tag{1.13}$$

gdzie

$$\psi_{II} = \int_b^a c\cdot\varrho\cdot r\cdot T_{II}(r,t)\,dr. \tag{1.14}$$

Po podstawieniu T_{II} z (1.12) do (1.13) otrzymuje się równanie różniczkowe dla określenia $u(t)$, które po scałkowaniu przy warunku początkowym $u(t=t_1)=0$ prowadzi do wyniku

$$u^{*} = \frac{1}{\mathrm{Bi}}\{1-\exp[-\mu^2(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_1)]\} \tag{1.15}$$

gdzie: $\mathrm{Fo}_1 = \dfrac{\varkappa t_1}{a^2}$

$$\mu^2 = 54\,\mathrm{Bi}(k-1)\,[12\,k^3-12\,k^2-12\,\mathrm{Bi}\,k^3+6\,\mathrm{Bi}\,k^2-12\,k+12+4\,\mathrm{Bi}\,k- \tag{1.16}$$

$$-3\,\mathrm{Bi}+5\,\mathrm{Bi}\,k^4]^{-1}$$

Porównanie wartości temperatur obliczonych wg wzoru ścisłego (1.5) i przybliżonego (1.12) przedstawiono w tablicy 1.1. Z analizy tablicy wynika, że dokładność wzorów przybliżonych jest dobra.

Porównując strukturę (1.5) dla $r = a$ i dla większych $F_0(F_0 \gg F_{01})$ — gdy w (1.5) można ograniczyć się do $n = 1$, gdyż pozostałe wyrazy można pominąć z uwagi na ich małą war-

Tablica 1.1.* Porównanie przybliżonych (1.12) i dokładnych (1.5) wartości temperatury T* dla wybranych liczb Fouriera

Fo	r/b						
	1,0	0,96	0,92	0,88	0,84	0,8	0,789
0,02	0,1361	0,0996	0,0700	0,0474	0,0318	0,0231	0,0220
	0,1334	0,0973	0,0689	0,0478	0,0337	0,0255	0,0244
0,04	0,1989	0,1618	0,01303	0,1045	0,0843	0,0698	0,0669
	0,1975	0,1605	0,1294	0,1042	0,0848	0,0705	0,0677
0,06	0,2527	0,2150	0,1819	0,1533	0,1292	0,1097	0,1053
	0,2512	0,2136	0,1808	0,1528	0,1295	0,1103	0,1059
0,1	0,3382	0,2996	0,2638	0,2308	0,2005	0,1731	0,1664
	0,3364	0,2979	0,2626	0,2302	0,2006	0,1734	0,1668
0,2	0,4647	0,4247	0,3850	0,3455	0,3061	0,2669	0,2567
	0,4626	0,4229	0,3836	0,3447	0,3059	0,2670	0,2568
0,3	0,5227	0,4822	0,4407	0,3982	0,3546	0,3053	0,2982
	0,5205	0,4802	0,4391	0,3973	0,3543	0,3100	0,2982
0,45	0,5566	0,5158	0,4732	0,4289	0,3829	0,3352	0,3224
	0,5544	0,5137	0,4716	0,4280	0,3826	0,3351	0,3224

* — w dolnych wierszach podano wartości temperatury obliczone wg wzoru ścisłego (1.5)

Tablica 1.2.* Porównanie przybliżonych (1.16) i dokładnych [7] wartości pierwszego pierwiastka równania charakterystycznego (1.7)

Bi	k							
	1,1*	1,2*	1,26667	1,4*	1,6*	1,8*	2,0*	3,0*
3	5,094	3,365	2,791	2,100	1,534	1,201	0,980	0,480
	—	3,363	2,79	—	1,541	—	—	—
5	6,383	4,117	3,369	2,479	1,765	1,359	1,090	0,608
	6,376	4,106	3,357	2,47	1,766	1,366	1,108	—
10	8,439	5,198	4,156	2,953	2,028	1,521	1,202	
	8,3998	5,15	4,106	2,92	2,01	1,522	1,217	
20	10,665	6,202	4,835	3,322	2,214	1,630	1,2734	
	10,516	6,059	4,710	3,24	2,178	1,62	1,283	
60	13,747	7,319	5,531	3,659	2,370	1,718	1,328	
	13,203	6,97	—	3,51	2,305	1,695	1,333	

* — w dolnych wierszach podano wartości dokładne wg pracy [7]

tość — z rozwiązaniem przybliżonym (1.15) widać, że zachodzą związki

$$\frac{qb}{\lambda\,\mathrm{Bi}} \approx -\frac{\pi q a}{\lambda}\,\frac{J_0(\gamma_1)Y_1(\gamma_1)-J_1(\gamma_1)Y_0(\gamma_1)}{\dfrac{L_0(\gamma_1)}{J_0(k\gamma_1)}-(\mathrm{Bi}^2+\gamma_1^2)\dfrac{J_1(k\gamma_1)}{L_0(\gamma_1)}}$$

i $\gamma_1 \approx \mu$

W tablicy 1.2. porównano dokładne wartości pierwszego pierwiastka równania (1.7) z przybliżonymi obliczonymi wg (1.16). Wartości przybliżone nieznacznie różnią się od dokładnych [5], co świadczy o dobrej dokładności rozwiązania przybliżonego.

2. Pole naprężeń

Naprężenie cieplne wywołane kołowo — symetrycznym polem temperatury, przy założeniu, że E, α_T i ν nie zależą od temperatury i położenia określone są wzorami [1]:

$$\sigma_{rr} = \frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)(\bar{T}-\bar{T}_r), \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\Theta\Theta} = \frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\bar{T}+\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\bar{T}_r-2T\right] \tag{2.2}$$

oraz naprężenia osiowe dla przypadku swobodnych końców cylindra

$$\sigma_{zz} = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}(\bar{T}-T) = \sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}, \tag{2.3}$$

gdzie

$$\bar{T}_r = \frac{2}{r^2-a^2}\int_a^r T r\,dr, \tag{2.4}$$

$$\bar{T} = \frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b T\cdot r\,dr \tag{2.5}$$

Podstawiając do powyższych wzorów ścisły i przybliżony rozkład temperatury łatwo określić naprężenia.

2.1. Ścisły rozkład naprężeń. Po podstawieniu (1.5) do (2.1) — (2.3), po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$\sigma_{rr}^{*} = \frac{\sigma_{rr}\cdot(1-\nu)\cdot\lambda}{\alpha_T\cdot E\cdot q\cdot b} = \frac{1}{2}k^2\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2-1}{k^2-1}\ln k-\frac{1}{2}\ln\frac{r}{a}+ \tag{2.6}$$

$$+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{N_0(\gamma_n)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2-1}{k^2-1}J_1(k\cdot\gamma_n)-\frac{1}{k}\left(\frac{a}{r}\right)J_1\left(\frac{r}{a}\cdot\gamma_n\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{a}{r}\right)^2\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{k^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{k^2-1}J_1(\gamma_n)\right]-L_0(\gamma_n)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2-1}{k^2-1}Y^1(k\gamma_n)-\frac{1}{k}\left(\frac{a}{r}\right)Y_1\left(\frac{r}{a}\cdot\gamma_n\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{k}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{k^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{k^2-1}Y_1(\gamma_n)\right]\right\}e^{-\gamma_n^2 Fo}\cdot\frac{1}{M},$$

gdzie $M = \gamma_n^2\left[\frac{L_0}{J_1(k\cdot\gamma_n)} - (\mathrm{Bi}^2+\gamma_n^2)\frac{J_1(k\cdot\gamma_n)}{L_0}\right]$

$$(2.7)\quad \sigma^*_{\Theta\Theta} = \frac{\sigma_{\Theta\Theta}(1-\nu)\lambda}{\alpha_T E q b} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1}{k^2-1}\ln k - \frac{1}{2}\ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2} +$$

$$+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{N_0(\gamma_n)\left[\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1}{k^2-1}\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_1(k\gamma_n) - \frac{k^2+\left(\frac{r}{a}\right)^2}{k^2-1}\left(\frac{a}{r}\right)^2\cdot\frac{1}{k}J_1(\gamma_n) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{r}\right)\cdot J_1\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) - L_0(\gamma_n)\right]\left[\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1}{k^2-1}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^2 Y_1(k\cdot\gamma_n) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{k^2+\left(\frac{r}{a}\right)^2}{k^2-1}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{1}{k}Y_1(\gamma_n) + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{r}\right)Y_1\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)\right]\right\}\cdot\frac{1}{M}e^{-\gamma_n^2\mathrm{Fo}} -$$

$$-\frac{\pi}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left[N_0(\gamma_n)J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) - L_0(\gamma_n)Y_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)\right]\cdot\frac{1}{M}e^{-\gamma_n^2\mathrm{Fo}},$$

oraz σ^*_{zz}

$$(2.8)\quad \sigma^*_{zz} = \frac{\sigma_{zz}(1-\nu)\lambda}{\alpha_T E q b} = \frac{k^2}{k^2-1}\ln k - \ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2} +$$

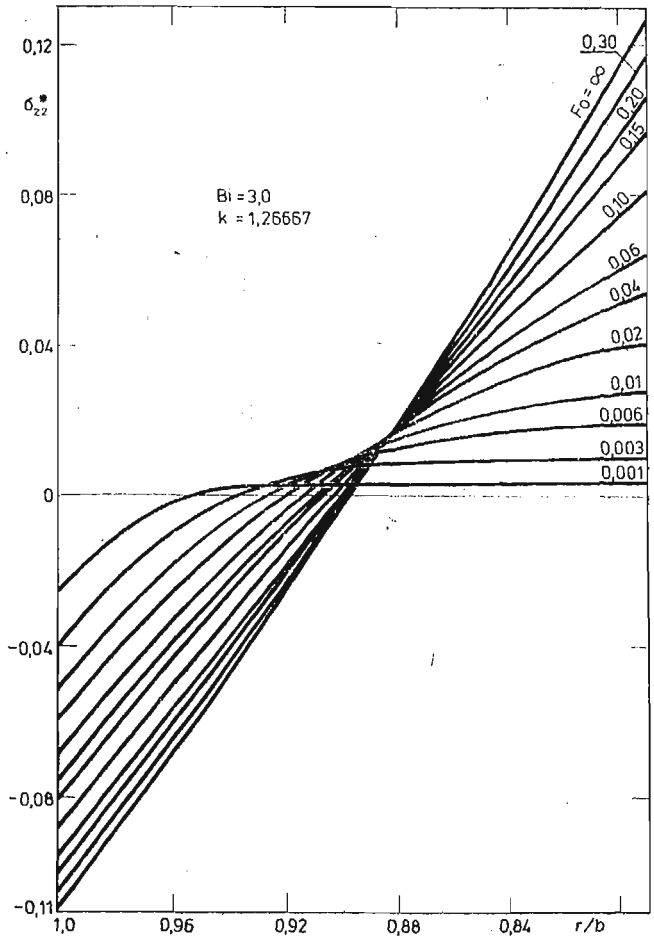
$$+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{N_0(\gamma_n)\left[\frac{1}{k^2-1}J_1(k\gamma_n) - \frac{1}{k(k^2-1)}J_1(\gamma_n)\right] - L_0(\gamma_n)\left[\frac{1}{k^2-1}Y_1(k\gamma_n) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{k(k^2-1)}Y_1(\gamma_n)\right]\right\}e^{-\gamma_n^2\mathrm{Fo}}\cdot\frac{1}{M} - \frac{\pi}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\cdot\left[N_0(\gamma_n)J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) - \right.$$

$$\left. - L_0(\gamma_n)Y_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)\right]\cdot\frac{1}{M}e^{-\gamma_n^2\mathrm{Fo}}.$$

Zmiany naprężeń osiowych w zależności od liczby Fouriera dla $k = \frac{19}{15}$ i $\mathrm{Bi} = 3$ przedstawiono na rysunku 3. Z analizy rysunku wynika, że dla małych liczb Fouriera Fo występuje koncentracja naprężeń ściskających w powierzchniowych warstwach walca, podczas gdy dla większych wartości Fo naprężenia ściskające na zewnętrznej powierzchni walca i rozciągające na wewnętrznej są tego samego rzędu (co do wartości bezwzględnej).

2.2. Przybliżony rozkład naprężeń. Zależności określające naprężenia w pierwszej fazie wnikania ciepła otrzymuje się podstawiając (1.8) do (2.1) — (2.3) [13]:



Rys. 3. Rozkład naprężeń osiowych w ściance wydrążonego walca w zależności od liczby Fouriera; Bi = $= 3$, $k = \frac{19}{15}$

$$(2.9)\qquad \sigma^*_{rr} = \frac{1}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2}\left\{\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{k}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[3-8\left(1-\frac{\delta}{b}\right)+6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4\right]-3\left(\frac{r}{b}\right)^4+8\left(\frac{r}{b}\right)^3\cdot\left(1-\frac{\delta}{b}\right)-$$

$$\left.-6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2\left(\frac{r}{b}\right)^2+\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4\right\},\qquad (b-\delta)\leqslant r\leqslant b$$

$$(2.10)\qquad \sigma_{rr}^{*}=\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{k}\right)^2}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{k}\right)^2\right]}\cdot\left[3-8\left(1-\frac{\delta}{b}\right)+6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4\right],\qquad a\leqslant r\leqslant(b-\delta)$$

$$(2\cdot11)\qquad \sigma_{\Theta\Theta}^{*}=\frac{1}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2}\left\{\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\left[3-8\left(1-\frac{\delta}{b}\right)+6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4\right]-9\left(\frac{r}{b}\right)^4+16\left(\frac{r}{b}\right)^3\left(1-\frac{\delta}{b}\right)-6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2\left(\frac{r}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4\right\};\qquad (b-\delta)\leqslant r\leqslant b$$

$$(2.12)\qquad \sigma_{\Theta\Theta}^{*}=\frac{1}{24\left(\frac{\delta}{b}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\left[3-8\left(1-\frac{\delta}{b}\right)+6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4\right],\qquad a\leqslant r\leqslant(b-\delta)$$

$$(2.13)\qquad \sigma_{zz}^{*}=\frac{3-8\left(1-\frac{\delta}{b}\right)+6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4}{12\left(\frac{\delta}{b}\right)\left[1-\left(\frac{1}{k}\right)^2\right]}-\frac{\left[\frac{r}{b}-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)\right]^2}{2\left(\frac{\delta}{b}\right)};\qquad (b-\delta)\leqslant r\leqslant b$$

$$(2.14)\qquad \sigma_{zz}^{*}=\frac{3-8\left(1-\frac{\delta}{b}\right)+6\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^4}{12\left(\frac{\delta}{b}\right)\left[1-\left(\frac{1}{k}\right)^2\right]};\qquad a\leqslant r\leqslant(b-\delta)$$

W drugiej fazie wnikania ciepła wzory określające naprężenia otrzymuje się podstawiając T_{II}(1.12) do (2.1)—(2.3):

$$(2.15)\qquad \sigma_{rr}^{*}=\frac{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-1\right](\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^{*}-1)(k^3-1)}{3k\left(\frac{r}{a}\right)^2(k-1)(k^2-1)}+$$

$$+\frac{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-1\right](1-\mathrm{Bi}\cdot k\cdot u^*)\,(k^4-1)}{8\left(\frac{r}{a}\right)^2 k\cdot(k-1)\,(k^2-1)}-\frac{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^3-1\right](\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^*-1)}{3k(k-1)\left(\frac{r}{a}\right)^2}-$$

$$-\frac{\mathrm{Bi}\cdot u^*\left[\left(\frac{r}{a}\right)^4-1\right]}{8k(k-1)\left(\frac{r}{a}\right)^2};\qquad \mathrm{Fo}\geqslant \mathrm{Fo}_1$$

$$(2.16)\qquad \sigma^*_{\theta\theta}=\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2}\left[\frac{(\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^*-1)\,(k^3-1)}{3k(k-1)\,(k^2-1)}+\frac{[1-\mathrm{Bi}\cdot k\cdot u^*](k^4-1)}{8k(k-1)\,(k^2-1)}\right]+$$

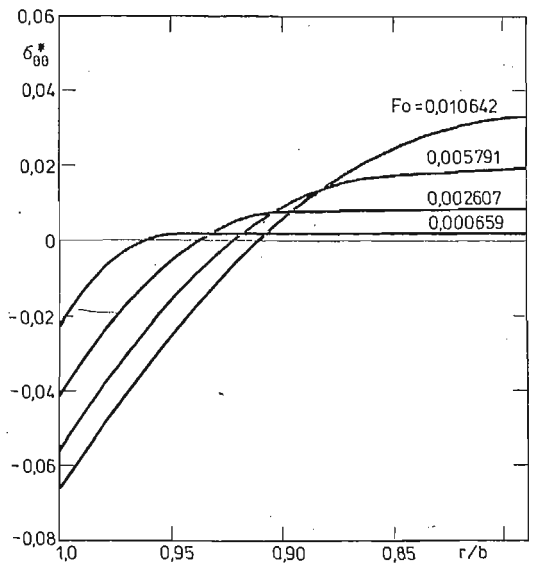
$$+\frac{\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^*-1}{3k(k-1)}\left[\frac{r}{a}-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]+\frac{(1-\mathrm{Bi}\cdot k\cdot u^*)}{8k(k-1)}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^*-1}{k(k-1)}\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{1-\mathrm{Bi}\cdot k\cdot u^*}{2k(k-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^2;\qquad \mathrm{Fo}\geqslant \mathrm{Fo}_1$$

oraz

$$(2.17)\qquad \sigma^*_{zz}=\frac{2\cdot(\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^*-1)\,(k^3-1)}{3k(k-1)\,(k^2-1)}+\frac{(1-\mathrm{Bi}\cdot k\cdot u^*)}{4(k-1)k}-\frac{1-\mathrm{Bi}\cdot k\cdot u^*}{2k(k-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^2-$$

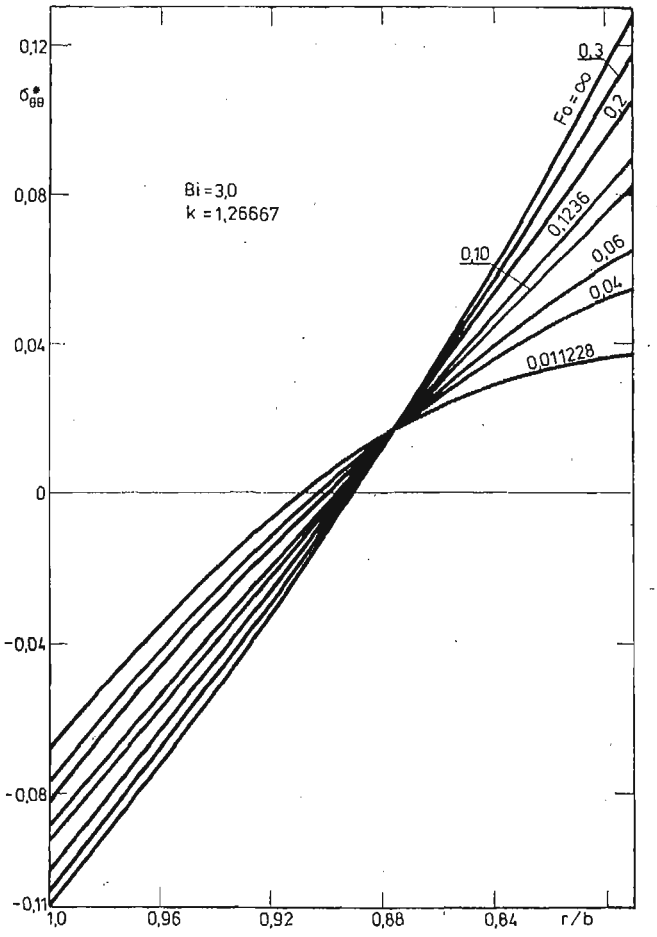
$$-\frac{\mathrm{Bi}\cdot k^2\cdot u^*-1}{k(k-1)}\left(\frac{r}{a}\right);\qquad \mathrm{Fo}\geqslant \mathrm{Fo}_1$$



Rys. 4. Przybliżony rozkład naprężeń obwodowych w ściance wydrążonego walca w pierwszej fazie wnikania ciepła; Bi = 3, $k=\frac{19}{15}$, $\mathrm{Fo}_1=0{,}010642$

Wyniki obliczeń naprężeń wg wyprowadzonych wyżej wzorów przedstawiono na rysunkach 4 - 6.

Rysunki 4 i 5 przedstawiają zmiany naprężeń obwodowych w zależności od liczby Fouriera odpowiednio w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła, natomiast rysunek 6 zmiany na-

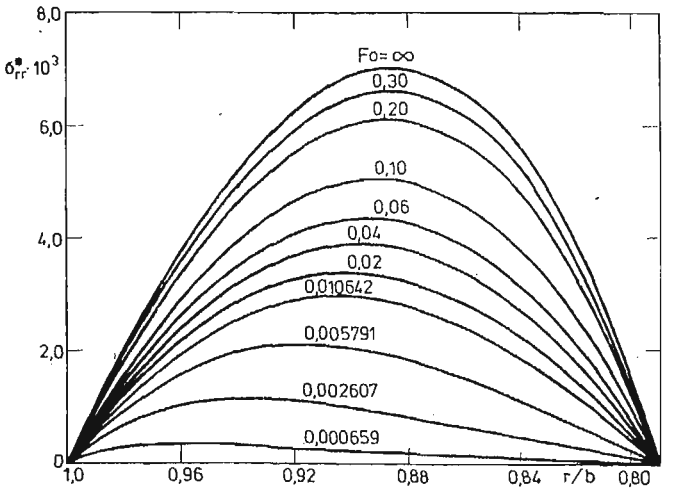


Rys. 5. Przybliżony rozkład naprężeń obwodowych w ściance wydrążonego walca w drugiej fazie wnikania ciepła: Bi = 3, $k = \frac{19}{15}$, $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}010642$

prężeń promieniowych w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła. Bezwymiarowy czas, po którym rozpoczyna się druga faza wnikania ciepła wynosi $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}010642$.

W celu oceny dokładności wzorów przybliżonych porównano w tablicy 2.1. wartość naprężeń osiowych obliczonych wg wzorów ścisłych (2.8) i przybliżonych (2.17) dla $k = \frac{19}{15}$ i Bi = 3.

Z analizy omawianej tablicy wynika, że dokładność przybliżonego wzoru jest dobra.



Rys. 6. Przybliżony rozkład naprężeń promieniowych w ściance wydrążonego walca w pierwszej i drugie fazie wnikania ciepła; Bi = 3, $k = \frac{19}{15}$, $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}010642$

Tablica 2.1. Porównanie przybliżonych (2.17) i dokładnych (2.8) wartości naprężeń osiowych σ^*_{zz} dla wybranych liczb Fouriera

Fo	r/b						
	1,0	0,96	0,92	0,88	0,84	0,8	0,78947
0,02	−0,0709 −0,0683	−0,0344 −0,0322	−0,0048 −0,0038	0,0178 0,0173	0,0334 0,0314	0,0421 0,0396	0,0432 0,0407
0,04	−0,0765 −0,0754	−0,0393 −0,0384	−0,0078 −0,0073	0,0180 0,0179	0,0382 0,0373	0,0526 0,0515	0,0555 0,0544
0,06	−0,0813 −0,0803	−0,0436 −0,0427	−0,0104 −0,0100	0,0182 0,0181	0,0422 0,0414	0,0617 0,0606	0,0661 0,0650
0,1	−0,0890 −0,0879	−0,0504 −0,0495	−0,0146 −0,0141	0,0184 0,0183	0,0487 0,0478	0,0761 0,0750	0,0828 0,0817
0,2	−0,1003 −0,0993	−0,0604 −0,0596	−0,0207 −0,0203	0,0188 0,0186	0,0582 0,0574	0,0973 0,0963	0,1076 0,1065
0,3	−0,1055 −0,1045	−0,0650 −0,0642	−0,0235 −0,0231	0,0190 0,0188	0,0626 0,0617	0,1071 0,1060	0,1190 0,1178
0,45	−0,1086 −0,1075	−0,0677 −0,0669	−0,0251 −0,0248	0,0191 0,0189	0,0651 0,0643	0,1128 0,1117	0,1257 0,1245
∞	−0,1099 −0,1089	−0,0689 −0,0681	−0,0259 −0,0255	0,0192 0,0189	0,0663 0,0654	0,1154 0,1142	0,1287 0,1275

* — w dolnych wierszach podano wartości obliczone wg wzoru ścisłego (2.8)

3. Uwagi końcowe

Wyznaczone w pracy przybliżone zależności pozwalają na ścisłe i przybliżone obliczanie pola temperatury i naprężeń w wydrążonym walcu, oraz ocenę wad i zalet obydwu rozwiązań. Z przeprowadzonego porównania wynika, że wzory przybliżone są stosunkowo proste a ich dokładność dostateczna dla obliczeń inżynierskich. Zależności przybliżone są szczególnie przydatne przy obliczeniu temperatury i naprężeń dla małych liczb Fouriera, kiedy to dla uzyskania dobrej dokładności w przypadku stosowania wzorów ścisłych należy uwzględniać dużą liczbę wyrazów w szeregach nieskończonych. Poza tym przy obliczaniu temperatury nie zachodzi konieczność wyznaczania pierwiastków równania charakterystycznego.

Podobne zależności można łatwo wyznaczyć dla przypadku zmiennego strumienia cieplnego stosując całkę Duhamela przy wyznaczaniu wzorów ścisłych, jak np. w pracach [3, 11]. Tok postępowania przy wyznaczaniu wzorów przybliżonych nie ulega zmianie.

Należy podkreślić, że przedstawione w pracy zależności nie obowiązują, gdy współczynnik wnikania ciepła od powierzchni cylindra do czynnika jest równy zero, tj. gdy Bi = = 0. Rozkład temperatury dla omawianego przypadku analizowany był w pracy [3].

Literatura cytowana w tekście.

1. G. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer Verlag, Wien, 1959.
2. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959
3. J. E. PHYTHIAN, *Cylindrical heat flow with arbirary heating rates*, AIAA Journal, 4, 1 (1963), str. 925—927.
4. S. BRUIN, W. A. BEVERLOO, *Transient temperature distributions in cylindrical shells*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11 (1968), str. 1653—1656.
5. R. C. PFAHL, *Transient radial temperature distributions in cylindrical shells*, Int. J. Heat Mass Transfer, 12 (1969), str. 1704—1706.
6. W. ALBRECHT, *Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern*, Konstruktion, 6, *18*, (1966), str. 224—231.
7. Д. П. Елизаров, *К вопросу о тепловом ударе в паропроводах* ТЭС, Теплоэнергетика, Nr 2, 1971, str. 78 - 82
8. П. В. Цой, *Теплопроводность и температурные напряжения в оболочках при несимметричных обогревах*, Теплофизика Высоких Температур 1, **16** (1978), str. 123 - 130
9. Г. Н. Третяченко, Б. С. Карпинос, *Тепловое состояние полых цилиндров при внутреннем одностороннем нагреве*, Проблемы прочности, Nr 5, 1977, str. 56 - 58
10. Г. Н. Третяченко, Б. С. Карпинос, *Термонапряженное состояние полых цилиндров при внутреннем одностороннем нагреве*, Проблемы прочности, Nr 9, 1977, str. 21 - 24.
11. J. TALER, *Nieustalone, kolowo — niesymetryczne pole temperatury w wydrążonym walcu ogrzewanym na zewnętrznej pobocznicy*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana (praca w recenzji).
12. J. TALER, *Aproksymacje nieustalonego pola temperatury w cialach walcowych i kulistych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 2, **16**, (1978) str. 247—263.
13. F. MŁYNARSKI, J. TALER, *Wpływ naprężeń pochodzących od udaru cieplnego na trwałość rur ekranowych konwertorowych kotłów odzyskiticowych*, Archiwum Energetyki, Nr 3, 1976, str. 115—127.

Резюме

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И НАПРЯЖЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ НАГРЕВАЕМЫМ НА ВНЕШНЕЙ И ОХЛАЖДАЕМЫМ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

Получены точные и приближенные формулы для определения нестационарных полей температуры и напряжений в бесконечном полом цилиндре при нулевой начальной температуре. В момент $t = 0$ тепловой поток на внешней поверхности повышается до постоянной величины. На внутренней поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

Точное распределение температуры определено с помощью преобразования Лапласа а приближенное решение получено используя интегральный метод теплового баланса.

Summary

UNSTEADY TEMPERATURE AND THERMAL STRESSES IN A HOLLOW CYLINDER HEATED ON THE OUTER AND COOLED ON THE INNER SURFACE

The purpose of this paper is to find temperature and thermal stresses distributions in a hollow cylinder with prescribed heat flux across the outer surface and cooled internally by fluid.

The cylinder is assumed to have zero initial temperature. Exact solution for the temperature distribution is obtained applying the Laplace transform with respect to time t and approximate solution by heat balance integral method.

Approximate temperature and thermal stresses profiles are compared with the exact solutions. The agreement is quite good.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT APARATURY
PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1978 r.