MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 17 (1979)

ANALIZA PASMA PŁYTOWEGO JAKO CIAŁA Z WIĘZAMI

MARIA MARKS (WARSZAWA)

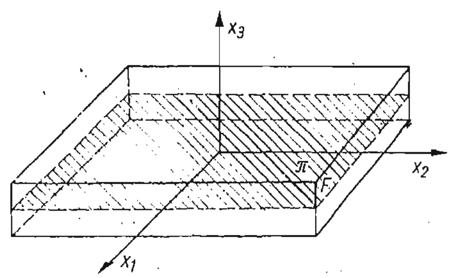
Wstęp

Ogólne sformułowanie mechaniki ośrodka ciągłego z więzami zostało przedstawione przez WOŹNIAKA w pracach [1], [3—7]. W oparciu o powyższe prace sformułowano zagadnienie płyt sprężystych, traktując jako więzy ograniczenia narzucone na funkcję deformacji. Przyjmując funkcję przemieszczeń w postaci szeregu potęgowego zmiennej pionowej, wyprowadzono podstawowy układ równań. Zagadnienie pasma płytowego rozwiązano przy trzech szczególnych postaciach funkcji przemieszczeń. W dwóch przypadkach otrzymano siły reakcyjne niezerowe, natomiast w trzecim przypadku, siły reakcyjne równe zeru. Jest to zatem rozwiązanie zgodne z rozwiązaniem klasycznej mechaniki continuum.

Różnice między składowymi naprężeń i przemieszczeń wyznaczonymi z rozwiązania mechaniki continuum z więzami i klasycznej mechaniki continuum nazwane są umownie „błędami". W pracy [2] wskazano na zależność między wielkościami średnich „błędów" a siłami reakcyjnymi i wprowadzono kryterium oceny „dokładności" rozwiązań na podstawie wielkości tych sił. Rozwiązane w niniejszym opracowaniu przypadki stanowią ilustrację powyższych zależności.

1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy płytę prostokątną sprężystą jako ciało z więzami, z narzuconymi ograniczeniami na funkcję deformacji. Płyta zajmuje obszar Ω, który można przedstawić w postaci $\Omega = F\times\pi$, gdzie π jest powierzchnią środkową, a F odcinkiem $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$ (rys. 1).



Rys. 1

Przyjęto funkcję przemieszczeń w następującej postaci

$$u(x_K, x_3 t) = \sum_{\alpha=0}^{l} \varphi_{(\alpha)}(x_K, t)\,(x_3)^\alpha, \tag{1.1}$$

przy czym $\varphi_{(\alpha)}$ są poszukiwanymi funkcjami różniczkowalnymi zależnymi od współrzędnych $x_K \in \pi$, $K = 1, 2$, współrzędnej czasowej $t \in R$, natomiast $x_3 \in F$.
Dla tak przyjętej funkcji przemieszczeń, zgodnie z [2], równania ruchu w układzie współrzędnych kartezjańskich są następujące

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK,K}dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho b_m dx_3 + \overset{(+)}{p_m} - \overset{(-)}{p_m} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \dot{\varphi}_{m(0)}}, \qquad \alpha = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m = 1, 2, 3\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK,K}(x_3)^\alpha dx_3 - \alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{m3}(x_3)^{\alpha-1}dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho b_m(x_3)^\alpha dx_3 + \overset{(+)}{p_m}\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha +\\
&\qquad - \overset{(-)}{p_m}\left(-\frac{h}{2}\right)^\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \dot{\varphi}_{m(\alpha)}}, \qquad \alpha = 1, \ldots, l.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie

$$x = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{l}\sum_{\beta=0}^{l}\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho(x_3)^\alpha(x_3)^\beta dx_3\right)\dot{\varphi}_{K(\alpha)}\dot{\varphi}_{K(\beta)},$$

$$\overset{(+)}{p_m} = \overset{(+)}{p_m}(x_K, t), \qquad \text{przy } x_3 = \frac{h}{2}$$

$$p_m = p_m(x_K, t), \qquad \text{przy } x_3 = -\frac{h}{2}.$$

Na brzegu o normalnej zewnętrznej $\mathbf{n}$ trzeba spełnić warunki brzegowe

$$\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK}(x_3)^\alpha dx_3\right)n_K = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_m(x_3)^\alpha dx_3 \qquad \alpha = 0, \ldots, l. \tag{1.3}$$

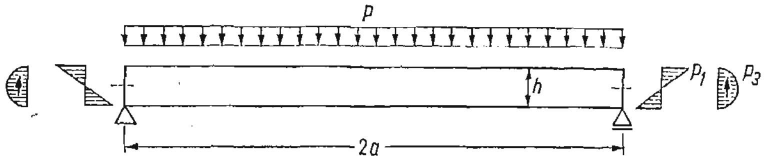
Jeśli przy $\alpha = \alpha_1$ w równaniu (1.1) $\varphi_{(\alpha_1)} = 0$ wtedy równania ruchu (1.2) i warunki brzegowe przy $\alpha = \alpha_1$ znikają. Po określeniu poszukiwanych funkcji $\varphi_{(\alpha)}$ można wyznaczyć siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe z następujących zależności

$$\begin{aligned}
r_m &= \varrho\ddot{\varphi}_m - (\varrho b_m + \sigma_{mK,K} + \sigma_{m3,3}) && \text{w } \Omega = F\times\pi,\ t \in R,\\
s_m &= \sigma_{mK}n_K - p_m && \text{przy } F\times\partial\pi,\ t \in R,\\
s_m &= \sigma_{m3}n_3 - p_m && \text{przy } \partial F\times\pi.\ t \in R.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Funkcje $\varphi_{(\alpha)}$ występujące w zależności (1.1) przy $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ mają prostą interpretację fizyczną. Funkcje $\varphi_{i(0)}$ opisują składowe przemieszczenia powierzchni środkowej.

Funkcje $\varphi_{1(1)}$ i $\varphi_{2(1)}$ opisują odpowiednio w kierunku x_1 i x_2 składowe wektora, który w konfiguracji odniesienia był wektorem normalnym do powierzchni środkowej; natomiast funkcja $\varphi_{3(1)}$ charakteryzuje wydłużenie w kierunku tego wektora.

W rozpatrywanych przykładach założono, że na pasmo płytowe o nieskończonej długości w kierunku x_2 działają następujące siły (rys. 2).



Rys. 2

$$
(1.5)\qquad
\begin{aligned}
& b_i = 0, \\
& \overset{(+)}{p}_K = 0, \quad \overset{(+)}{p}_3 = -p \qquad \text{przy } x_3 = \frac{h}{2}, \\
& p_i = 0 \qquad \text{przy } x_3 = -\frac{h}{2},
\end{aligned}
$$

oraz

$$
(1.6)\qquad
\begin{aligned}
p_1 &= \begin{cases} \left(\dfrac{12M}{h^3} + \dfrac{3p}{5h}\right)x_3 - \dfrac{4p}{h^3}x_3^3 & \text{przy } x_1 = a, \\ -\left(\dfrac{12M}{h^3} + \dfrac{3p}{5h}\right)x_3 + \dfrac{4p}{h^3}x_3^3 & \text{przy } x_1 = -a, \end{cases} \\
p_2 &= 0 \qquad \text{przy } x_1 = \pm a, \\
p_3 &= \frac{3p}{2h}a - \frac{6p}{h^3}ax_3^2 \qquad \text{przy } x_1 = \pm a.
\end{aligned}
$$

Przez $M = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2\tilde{p}}{h} x_3^2 dx_3$ oznaczono tu moment zginający przyłożony do krawędzi płyty $x_1 = a$. Założono ponadto, że funkcja przemieszczenia $\boldsymbol{u}$ jest niezależna od czasu.

Przy tych założeniach rozwiązano zagadnienie pasma płytowego przyjmując funkcje przemieszczeń w następującej postaci:

$$
(1.7)\qquad
\begin{aligned}
a)\quad & u_k = \varphi_{k(0)} + \varphi_{k(1)}x_3 \qquad k = 1, 3, \\
& u_2 = 0, \\
b)\quad & u_k = \varphi_{k(0)} + \varphi_{k(1)}x_3 + \varphi_{k(2)}x_3^2 \qquad k = 1, 3, \\
& u_2 = 0, \\
& u_1 = \varphi_{1(0)} + \varphi_{1(1)}x_3 + \varphi_{1(3)}x_3^3, \\
c)\quad & u_2 = 0, \\
& u_3 = \varphi_{3(0)} + \varphi_{3(1)}x_3 + \varphi_{3(2)}x_3^2 + \varphi_{3(4)}x_3^4,
\end{aligned}
$$

Przyjęcie funkcji przemieszczeń w postaci $(1.7)_a$ odpowiada uogólnionej teorii Reissnera. Natomiast założenie, że funkcja przemieszczeń zależy również od wyższych potęg x_3 umożliwia dokładniejsze wyznaczenie stanu naprężenia.

W wyniku przyjęcia funkcji przemieszczeń w postaci $(1.7)_a$ i $(1.7)_b$ otrzymano rozwiązanie zagadnienia z niezerowymi siłami reakcyjnymi określonymi zależnościami (1.4). Natomiast przyjmując funkcję przemieszczeń w postaci $(1.7)_c$, uzyskano rozwiązanie, w którym siły reakcyjne znikają czyli jest ono rozwiązaniem klasycznej teorii sprężystości.

Dysponując rozwiązaniem klasycznej teorii sprężystości można określić stopień dokładności rozwiązania uzyskanego wg teorii z więzami wprowadzając wielkości określające średnie i maksymalne błędy składowych naprężeń i przemieszczeń.

$$\eta_{ij} = \frac{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}|\, d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}|\, d\Omega},$$

(1.8)

$$\Theta_i = \frac{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}|\, d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |u_i^{(d)}|\, d\Omega},$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{\max\limits_{x\in\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}|\, d\Omega},$$

(1.9)

$$\varrho_i = \frac{\max\limits_{x\in\Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |u_i^{(d)}|\, d\Omega},$$

gdzie

$\sigma_{ij}^{(d)}$ — składowa naprężenia wyznaczona wg klasycznej teorii sprężystości
$\sigma_{ij}^{(p)}$ — składowa naprężenia wyznaczona wg teorii z więzami,
$u_i^{(d)}$ — składowa przemieszczenia wyznaczona wg klasycznej teorii sprężystości,
$u_i^{(p)}$ — składowa przemieszczenia wyznaczona wg teorii z więzami.

W celu oszacowania rozwiązań uzyskiwanych wg teorii ciał z więzami ($\mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) w oparciu o kryterium przedstawione w pracy [2] należy wyznaczyć cztery następujące wielkości

(1.10)
$$\gamma_\alpha = \frac{g_\alpha}{\sigma_0}, \quad \sigma_\alpha = \frac{f_\alpha}{\sigma_0}, \qquad \alpha = 1, 2$$

gdzie

(1.11)
$$g_1 = \frac{\beta_1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\sqrt{r_1^2+r_2^2}\,d\Omega+\frac{\beta_2}{|\pi|}\int\limits_{\pi}\sqrt{s_1^2+s_2^2}\,d\pi+\frac{\beta_3}{|S_b|}\int\limits_{S_b}\sqrt{s_1^2+s_2^2}\,dS_b,$$
$$g_2 = \frac{\beta_1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|r_3|d\Omega+\frac{\beta_2}{|\pi|}\int\limits_{\pi}|s_3|d\pi+\frac{\beta_3}{|S_b|}\int\limits_{S_b}|s_3|\,dS_b,$$
$$f_1 = \beta_1\sup_{x\in\Omega}\sqrt{r_1^2+r_2^2}+\beta_2\sup_{x\in\pi\times\delta F}\sqrt{s_1^2+s_2^2}+\beta_3\sup_{x\in F\times\delta\pi}\sqrt{s_1^2+s_2^2},$$
$$f_2 = \beta_1\sup_{x\in\Omega}|r_3|+\beta_2\sup_{x\in\pi\times\delta F}|s_3|+\beta_3\sup_{x\in F\times\delta\pi}|s_3|,$$

tu $S_b = \partial\pi\times F$

$|\Omega, |\pi|, |S_b|$ — miary odpowiednich obszarów

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — stałe dodatnie

σ_0 — maksymalne wytężenie płyty.

Znając wielkości γ_α można na podstawie zależności

(1.112)
$$\eta_{ij} = F_{ij}(\gamma_\alpha),\qquad \Theta_i = G_i(\gamma_\alpha),$$

ocenić średnie błędy składowych naprężenia i przemieszczenia uzyskane z rozwiązania wg teorii z więzami. Zależność (1.12) wyznaczamy na podstawie przykładów rozwiązanych przy założeniu różnych typów więzów i rozwiązań ścisłych.

Porównanie natomiast wielkości σ_α i γ_α, które charakteryzują średnie i maksymalne wartości poziomych i pionowych składowych sił reakcyjnych, pozwala na ocenę największych błędów składowych stanu naprężenia i przemieszczenia.

2. Rozwiązanie pasma płytowego przy $l = 1$

Przyjęto funkcję przemieszczeń odpowiadająca uogólnionej teorii Reissnera tzn. w następującej postaci

(2.1)
$$u_k = \psi_k+d_k x_3,\qquad u_2 = 0\qquad k = 1, 3.$$

W tym przypadku składowe tensora naprężenia wyrażają się następującymi zależnościami

$$\sigma_{11} = \frac{F}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu d_3+(1-\nu)\frac{\partial d_1}{\partial x_1}x_3\right],$$
$$\sigma_{22} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+d_3+\frac{\partial d_1}{\partial x_1}x_3\right],$$
$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)d_3+\nu\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial d_1}{\partial x_1}x_3\right],$$
$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{\partial d_3}{\partial x_1}x_3\right],$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0.$$

Warunki równowagi (1.2) przy $l = 1$ sprowadzają się do następującego układu równań

$$
(2.2)\qquad
\begin{aligned}
&(1-\nu)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial d_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial d_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1^2}-\frac{2(1+\nu)p}{Eh} = 0,\\
&\frac{(1-\nu)h^2}{6(1-2\nu)}\frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2}-d_1-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{h^2}{24}\frac{\partial^2 d_3}{\partial x_1^2}-\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}d_3-\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\frac{(1+\nu)p}{2E} = 0
\end{aligned}
$$

Są to dwa układy równań zawierające po dwie niewiadome. Z układu równań $(2.2)_2$ i $(2.2)_3$ wyznaczono niewiadome funkcje d_1, ψ_3, które mają następującą postać

$$
d_1 = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)Eh^3}(px_1^3+3C_1x_1^2)+C_2x_1+C_3,
$$

$$
\psi_3 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)Eh^3}(px_1^4+4C_1x_1^3)+\frac{1}{2}\left(\frac{2(1+\nu)p}{Eh}-C_2\right)x_1^2+\left(\frac{2(1+\nu)}{Eh}C_1-C_3\right)x_1+C_4.
$$

Natomiast z równań $(2.2)_1$ i $(2.2)_4$ wyznaczono pozostałe funkcje

$$
d_3 = A_2e^{\beta x_1}+A_3e^{-\beta x_1}-\frac{1+\nu}{E}\left(\nu A_1+\frac{(1-\nu)p}{2}\right),
$$

$$
\psi_1 = -\frac{\nu}{(1-\nu)\beta}(A_2e^{\beta x_1}-A_3e^{-\beta x_1})+\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)A_1+\frac{\nu p}{2}\right]x_1+A_4,
$$

gdzie

$$
\beta^2 = \frac{24}{(1-\nu)h^2}
$$

Przemieszczenie u_l musi być antysymetryczne względem x_l przy każdym $x_3 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$ co jest równoważne z antysymetrią funkcji ψ_1 i d_1. Funkcje ψ_1 i d_1 spełniają warunek antysymetrii, jeśli

$$
A_2 = A_3,\ A_4 = 0,\ C_1 = C_3 = 0
$$

Na powierzchni $x_1 = a$ o normalnej $\mathbf{n} = (1,0,0)$ oraz na powierzchni $x_1 = -a$ o $\mathbf{n} = (-1,0,0)$ powinny być spełnione warunki brzegowe (1.3) przy $l = 1$, gdzie p_m określone jest zależnością (1.6).

Warunki brzegowe (1.3) przy $l = 1$ po uwzględnieniu antysymetrii funkcji ψ_1 i d_1 sprowadzają się do następujących zależności

$$
\left[(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu d_3\right]_{(x_1=a)} = 0,
$$

$$
\left[\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)\right]_{(x_1=a)} = pa,
$$

$$\left[\frac{(1-\nu)Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial d_1}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)} = M,$$

$$\left(\frac{\partial d_3}{\partial x_1}\right)_{(x_1=a)} = 0.$$

Drugi warunek brzegowy spełniony jest tożsamościowo, a z pozostałych wynikają następujące relacje:

$$A_1 = 0,$$

$$C_2 = \frac{12(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)Eh^3}\left(M-\frac{p}{2}a^2\right),$$

$$A_2 = 0.$$

Stałą C_4 wyznaczamy z warunku, aby $u_3 = 0$ przy $x_1 = a$ i $x_3 = 0$. Jest ona równa

$$C_4 = -\frac{1+\nu}{Eh}\left[\frac{5(1-2\nu)p}{2(1-\nu)h^2}a^4+pa^2-\frac{6(1-2\nu)M}{(1-\nu)h^2}a^2\right]$$

Po uwzględnieniu wyznaczonych stałych, wyrażenia na moment zginający oraz po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych $\xi_1 = \frac{x_1}{a}$, $\xi_3 = \frac{x_3}{h}$ składowe przemieszczenia (2.1) mają następującą postać

$$u_1 = \frac{(1+\nu)a}{E}\left\{\frac{\nu p}{2}\xi_1+\frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\left[p\left(\frac{a}{h}\right)^2\xi_1^3+\tilde{p}\xi_1-3p\left(\frac{a}{h}\right)^2\xi_1\right]\xi_3\right\},$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = \frac{(1+\nu)a}{E}\left\{\left[\frac{(1-2\nu)p}{1-\nu}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\xi_1^4+3\xi_1^2-\frac{5}{2}\right)-p(1-\xi_1^2)+\frac{(1-2\nu)\tilde{p}}{1-\nu}(1-\xi_1^2)\right]\frac{a}{h}-\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\nu)p}{2}\frac{h}{a}\xi_3\right\},$$

składowe stanu naprężenia są następujące

$$\sigma_{11} = -2\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-\tilde{p}\right]\xi_3,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\nu p}{2}-\frac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{p}\right)^2(1-\xi_1^2)-\tilde{p}\right]\xi_3,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{p}{2}-\frac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-\tilde{p}\right]\xi_3, \tag{2.3}$$

$$\sigma_{13} = p\frac{a}{h}\xi_1,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0.$$

Znając składowe naprężenia można określić ze związku $(1.4)_1$ siły reakcyjne objętościowe

$$r_1 = -\frac{12p}{h}\frac{a}{h}\xi_1\xi_3,$$

(2.4)
$$r_2 = 0,$$

$$r_3 = -\frac{1}{h}\left\{p-\frac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-\tilde{p}\right]\right\},$$

ze związku $(1.4)_2$, po uwzględnieniu (1.6), siły reakcyjne powierzchniowe:

przy $\xi_1 = 1$

$$s_1 = p\left(-\frac{3}{5}+4\xi_3^2\right)\xi_3,$$

$$s_3 = \frac{p}{2}\frac{a}{h}(-1+12\xi_3^2),$$

(2.5) przy $\xi_1 = -1$

$$s_1 = p\left(\frac{3}{5}-4\xi_3^2\right)\xi_3,$$

$$s_3 = \frac{p}{2}\frac{a}{h}(-1+12\xi_3^2),$$

a ze związku $(1.4)_3$ po uwzględnieniu (1.5) siły reakcyjne powierzchniowe:

przy $\xi_3 = \frac{1}{2}$

$$s_1 = p\frac{a}{h}\xi_1$$

$$s_3 = \frac{1}{2}\left\{p-\frac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-\tilde{p}\right]\right\},$$

(2.6) przy $\xi_3 = -\frac{1}{2}$

$$s_1 = -p\frac{a}{h}\xi_1$$

$$s_3 = \frac{1}{2}\left\{p-\frac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-\tilde{p}\right]\right\}.$$

Na podstawie wzoru (1.11) obliczono

$$f_1 = h\sup_{x\in\Omega}|r_1|+\sup_{x\in\pi\times\partial F}|s_1|+\frac{h}{a}\sup_{x\in F\times\partial\pi}|s_1| = 7p\frac{a}{h}+0{,}2p\frac{h}{a}$$

$$f_2 = h\sup_{x\in\Omega}|r_3|+\sup_{x\in\pi\times\partial F}|s_3|+\frac{h}{a}\sup_{x\in F\times\partial\pi}|s_3|$$

gdy

$$p+\frac{2\nu}{1-\nu}\tilde{p}>0$$

$$f_2=\begin{cases}-\frac{1}{2}p+\frac{3\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2-\tilde{p}\right] & \text{przy } \frac{a}{h}\geqslant\sqrt{\frac{1-\nu}{3\nu}+\frac{2\tilde{p}}{3p}}\\ \frac{5}{2}p+\frac{3\nu}{1-\nu}\tilde{p} & \text{przy } \frac{a}{h}<\sqrt{\frac{1-\nu}{3\nu}+\frac{2\tilde{p}}{3p}}\end{cases}$$

gdy

$$p+\frac{2\nu}{1-\nu}\tilde{p}<0$$

$$f_2=-\frac{1}{2}p+\frac{3\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2-\tilde{p}\right]$$

$$g_1=\frac{h}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|r_1|\,d\Omega+\frac{1}{2|\pi|}\left(\int\limits_{\pi\times\left(\frac{h}{2}\right)}|s_1|\,d\pi+\int\limits_{\pi\times\left(-\frac{h}{2}\right)}|s_1|\,d\pi\right)+\frac{h}{a}\frac{1}{|S_b|}\int\limits_{S_b}|s_1|\,dS_b=$$

$$=2p\frac{a}{h}+\frac{13}{200}p\frac{h}{a},$$

$$g_2=\frac{h}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|r_3|\,d\Omega+\frac{1}{2|\pi|}\left(\int\limits_{\pi\times\left(\frac{h}{2}\right)}|s_3|\,d\pi+\int\limits_{\pi\times\left(-\frac{h}{2}\right)}|s_3|\,d\pi\right)+\frac{h}{a}\frac{1}{|S_b|}\int\limits_{S_b}|s_3|\,dS_b,$$

gdy

$$\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p}>0$$

$$g_2=\begin{cases}\frac{(27+4\sqrt{3})}{18}p-\frac{3\nu}{1-\nu}\left[2p\left(\frac{a}{p}\right)^2-\tilde{p}\right] & \text{przy } \frac{h}{a}\geqslant\sqrt{\frac{3}{\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p}}}\\ -3\left\{p-\frac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\mathring{\xi}_1^2\right)-\tilde{p}\right]\right\}\mathring{\xi}_1+\frac{(27+4\sqrt{3})p}{18}-\frac{3\nu}{1-\nu}\left[2p\left(\frac{a}{h}\right)^2-\tilde{p}\right] & \\ & \text{przy } 0<\frac{h}{a}<\sqrt{\frac{3}{\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p}}}\end{cases}$$

gdzie

$$\mathring{\xi}_1=\sqrt{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2};$$

gdy

$$\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p}<0;$$

$$g_2 = \frac{(-27+4\sqrt{3})p}{18}+\frac{3\nu}{1-\nu}\left[2p\left(\frac{a}{h}\right)^2-\tilde{p}\right].$$

Jako wytężenie σ_0 przyjęto maksymalne naprężenie σ_{11} czyli σ_{11} przy $\xi_1 = 0$ i $\xi_3 = -\frac{1}{2}$,

$$\sigma_0 = 3p\left(\frac{a}{h}\right)^2-\tilde{p}.$$

Wówczas

$$\sigma_1 = \frac{p\left[7+0{,}2\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]\frac{h}{a}}{3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2},$$

gdy

$$p+\frac{2\nu}{1-\nu}\tilde{p}>0$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \dfrac{-\frac{p}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2}{3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2}+\dfrac{3\nu}{1-\nu}, & \text{przy } \dfrac{a}{h} \geqslant \sqrt{\dfrac{1-\nu}{3\nu}+\dfrac{2\tilde{p}}{3p}} \\[2ex] \dfrac{\frac{5}{2}p\left(\frac{h}{a}\right)^2+\frac{3\nu}{1-\nu}\tilde{p}}{3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2}, & \text{przy } \dfrac{a}{h} < \sqrt{\dfrac{1-\nu}{3\nu}+\dfrac{2\tilde{p}}{3p}} \end{cases}$$

gdy

$$p+\frac{2\nu}{1-\nu}\tilde{p}<0$$

$$\delta_2 = \frac{-\frac{p}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2}{3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2}+\frac{3\nu}{1-\nu},$$

$$\gamma_1 = \frac{p\left[2+\frac{13}{200}\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]\frac{h}{a}}{3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2},$$

gdy

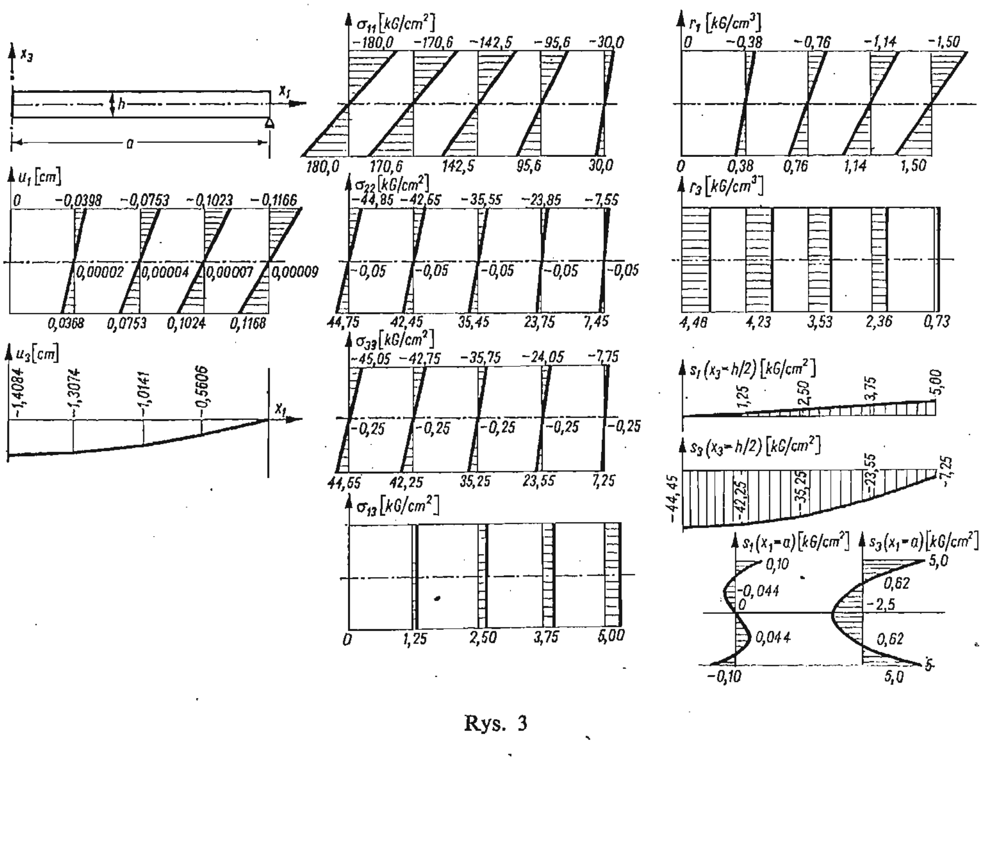
$$\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p}>0$$

$$
\gamma_2 = \begin{cases}
\dfrac{\dfrac{(27+4\sqrt{3})p}{18}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2 - \dfrac{3\nu}{1-\nu}\left[2p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2\right]}{3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}, & \text{przy } \dfrac{h}{a} \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{\dfrac{1-\nu}{2\nu}+\dfrac{\tilde{p}}{p}}}, \\[2ex]
-3\left\{\dfrac{p\left(\dfrac{h}{a}\right)^2 - \dfrac{2\nu}{1-\nu}\left[3p\left(1-\dfrac{1}{3}\mathring{\xi}_1^2\right)-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2\right]}{3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}\right\}\mathring{\xi}_1 + & \\[2ex]
+\dfrac{\dfrac{(27+4\sqrt{3})p}{18}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2 - \dfrac{3\nu}{1-\nu}\left[2p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2\right]}{3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}, & \text{przy } 0 < \dfrac{h}{a} < \sqrt{\dfrac{3}{\dfrac{1-\nu}{2\nu}+\dfrac{\tilde{p}}{p}}}
\end{cases}
$$

gdy

$$
\frac{1-\nu}{2\nu}+\frac{\tilde{p}}{p} < 0
$$

$$
\gamma_2 = \frac{\dfrac{(-27+4\sqrt{3})p}{18}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2 + \dfrac{3\nu}{1-\nu}\left[2p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2\right]}{3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}
$$



Rys. 3

Przykład liczbowy. Przyjmując dane $a = 200$ cm, $h = 20$ cm, $p = 0{,}5$ kG/cm^2, $M = 2000$ kGcm/cm ($\tilde{p} = -30$ kG/cm^2), $E = 200\,000$ kG/cm^2, $\nu = 0{,}2$ otrzymano następujące wielkości δ_α i γ_α

$$\delta_1 = 0{,}1945 \qquad \gamma_1 = 0{,}0556$$
$$\delta_2 = 0{,}7453 \qquad \gamma_2 = 0{,}5382$$

Na rys. 3 pokazano wykresy przemieszczeń, naprężeń i sił reakcyjnych w przekrojach ξ_1 równych $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

3. Rozwiązanie pasma płytowego przy $l = 2$

Przyjęto funkcję przemieszczeń według (1.1) przy $l = 2$ tzn. w następującej postaci

$$\begin{aligned} u_m &= \psi_m + d_m x_3 + k_m x_3^2 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \qquad m = 1, 3 \tag{3.1}$$

składowe stanu naprężenia wyrażone są następującymi związkami

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\left[(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3\right] + \left[(1-\nu)\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu k_3\right]x_3 + (1-\nu)\frac{\partial k_1}{\partial x_1}x_3^2\right\},$$

$$\sigma_{22} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + d_3\right) + \left(\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2k_0\right)x_3 + \frac{\partial k_1}{\partial x_1}x_3^2\right],$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\left[(1-\nu)d_3 + \nu\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right] + \left[2(1-\nu)k_3 + \nu\frac{\partial d_1}{\partial x_1}\right]x_3 + \nu\frac{\partial k_1}{\partial x_1}x_3^2\right\},$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[d_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + \left(2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1}\right)x_3 + \frac{\partial k_3}{\partial x_1}x_3^2\right],$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0.$$

Warunki równowagi (1.2) przy $l = 2$ sprowadzają się do następującego układu równań

$$\begin{aligned}
&(1-\nu)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial d_3}{\partial x_1} + \frac{(1-\nu)h^2}{12}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(d_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 k_3}{\partial x_1^2} - \frac{2(1+\nu)p}{Eh} = 0,\\
&\frac{h^2}{12(1-2\nu)}\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} - (1-6\nu)\frac{\partial k_3}{\partial x_1}\right] - d_1 - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{h^2}{24}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{1-2\nu}\left[\nu\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + (1-\nu)d_3 + \frac{\nu h^2}{12}\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right] - \frac{(1+\nu)p}{2E} = 0,\\
&(1-\nu)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial d_3}{\partial x_1} + \frac{3(1-\nu)h^2}{20}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} - (1-2\nu)\left(2k_1 + \frac{\partial d_3}{\partial x_1}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(d_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right) + \frac{3h^2}{20}\frac{\partial^2 k_3}{\partial x_1^2} - \frac{4}{1-2\nu}\left[\nu\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2(1-\nu)k_3\right] - \frac{6(1+\nu)p}{Eh} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

który można rozseparować na dwa układy niezależne. W wyniku przekształceń równań $(3.2)_2$, $(3.2)_3$ i $(3.2)_6$ wyznaczono funkcje ψ_3, d_1, k_3 w następującej postaci

$$
\begin{aligned}
k_3 &= D_1 e^{\beta x_1} + D_2 e^{-\beta x_1} - \frac{3\nu(1+\nu)}{Eh^3}(px_1^2 + 2A_1 x_1 + 2A_2) - \frac{(1-\nu^2)(10+\nu)p}{20Eh},\\
d_1 &= -\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{\beta}(D_1 e^{\beta x_1} - D_2 e^{-\beta x_1}) + \frac{2(1-\nu^2)}{Eh^3}(px_1^3 + 3A_1 x_1^2 + 6A_2 x_1) +\\
&\quad + \frac{\nu(1+\nu)(10+\nu)p}{10Eh}x_1 + D_3,\\
\psi_3 &= -\frac{(5-\nu)h^2}{60}(D_1 e^{\beta x_1} + D_2 e^{-\beta x_1}) - \frac{1-\nu^2}{Eh^3}\left(\frac{p}{2}x_1^4 + 2A_1 x_1^3 + 6A_2 x_1^2\right) +\\
&\quad + \frac{(1+\nu)(20-5\nu-\nu^2)}{20Eh}px_1^2 + \frac{(1+\nu)(4+\nu)}{2Eh}A_1 x_1 + D_3 x_1 +\\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)(10+\nu)ph}{240E} + \frac{\nu(1+\nu)}{2Eh}A_2 + D_4,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{120}{(1-\nu)h^2}.$$

Natomiast po przekształceniu równań $(3.2)_1$, $(3.2)_4$, $(3.2)_5$ wyznaczono funkcje ψ_1, d_3, k_1 w następującej postaci

$$
\begin{aligned}
k_1 &= C_1 e^{a_1 x_1}\cos b_1 x_1 + C_2 e^{-a_1 x_1}\cos b_1 x_1 + C_3 e^{a_1 x_1}\sin b_1 x_1 - C_4 e^{a_1 x_1}\sin b_1 x_1,\\
d_3 &= 2C_1 e^{a_1 x_1}\left[\frac{1}{\gamma}(a_1\cos b_1 x_1 - b_1 \sin b_1 x_1) - \frac{1}{(a_1^2+b_1^2)}(a_1\cos b_1 x_1 + b_1\sin b_1 x_1)\right] -\\
&\quad - 2C_2 e^{-a_1 x_1}\left[\frac{1}{\gamma}(a_1\cos b_1 x_1 + b_1\sin b_1 x_1) + \frac{1}{(a_1^2+b_1^2)}\times\right.\\
&\quad \left.\times(-a_1\cos b_1 x_1 + b_1 \sin b_1 x_1)\right] + 2C_3 e^{a_1 x_1}\left[\frac{1}{\gamma}(b_1\cos b_1 x_1 + a_1 \sin b_1 x_1) +\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{(a_1^2+b_1^2)}(b_1\cos b_1 x_1 - a_1\sin b_1 x_1)\right] - 2C_4 e^{-a_1 x_1}\left[\frac{1}{\gamma}(b_1\cos b_1 x_1 -\right.\\
&\quad \left. - a_1\sin b_1 x_1) + \frac{1}{(a_1^2+b_1^2)}(b_1\cos b_1 x_1 + a_1\sin b_1 x_1)\right] - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\beta_1 - \frac{(1-\nu^2)p}{2E},\\
\psi_1 &= C_1 e^{a_1 x_1}\left\{-\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{(a_1^2+b_1^2)}\left[\left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(a_1\cos b_1 x_1 + b_1\sin b_1 x_2) -\right.\right.\\
&\quad \left.\left. - \left(\frac{b_1}{\gamma} + \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(a_1\sin b_1 x_1 - b_1\cos b_1 x_1)\right] - \frac{h^2}{12}\cos b_1 x_1\right\} + C_2 e^{-a_1 x_1}\times\\
&\quad \times\left\{\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{a_1^2+b_1^2}\left[\left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(-a_1\cos b_1 x_1 + b_1\sin b_1 x_1) -\right.\right.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$-\left(\frac{b_1}{\gamma}+\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(a_1\sin b_1x_1+b_1\cos b_1x_1)\Big]-\frac{h^2}{12}\cos b_1x_1\Big\}+C_3e^{a_1x_1}\times$$

$$\times\Big\{-\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{a_1^2+b_1^2}\Big[\left(\frac{b_1}{\gamma}+\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(a_1\cos b_1x_1+b_1\sin b_1x_1)+$$

$$+\left(\frac{a_1}{\gamma}-\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(a_1\sin b_1x_1-b_1\cos b_1x_1)\Big]-\frac{h^2}{12}\sin b_1x_1\Big\}+C_4e^{-a_1x_1}\times$$

$$\times\Big\{\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{a_1^2+b_1^2}\Big[\left(\frac{b_1}{\gamma}+\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(-a_1\cos b_1x_1+b_1\sin b_1x_1)+$$

$$+\left(\frac{a_1}{\gamma}-\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}\right)(a_1\sin b_1x_1+b_1\cos b_1x_1)\Big]+\frac{h^2}{12}\sin b_1x_1\Big\}+$$

$$+\frac{1-\nu^2}{E}B_1x_1+\frac{\nu(1+\nu)p}{2E}x_1+B_2,$$

gdzie

$$a_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\alpha\gamma}\right)}$$

$$b_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\alpha\gamma}\right)}$$

$$\alpha=\frac{24}{(1-\nu)h^2}$$

$$\gamma=\frac{30(1-2\nu)}{(1-\nu)h^2}.$$

Funkcja u_1 określona wzorem (3.1) musi spełniać następujący warunek

$$\bigwedge_{x_3\in\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)} u_1(x_1=-\mathring{x}_1)=-u_1(x_1=\mathring{x}_1)\Leftrightarrow\psi_1(x_1=-\mathring{x}_1)=$$
$$=-\psi_1(x_1=\mathring{x}_1)\wedge d_1(x_1=-\mathring{x}_1)=d_1(x_1=\mathring{x}_1)\wedge k_1(x_1=$$
$$=-\mathring{x}_1)=-k_1(x_1=\mathring{x}_1)$$

stąd wynikają relacje:

$$A_1=D_3=0,\quad D_1=D_2,$$
$$C_1=-C_2\quad C_3=C_4,\quad B_2=0$$

Na powierzchni $x_1=a$ o normalnej $\mathbf{n}=(1,0,0)$ i na powierzchni $x_1=-a$ o $\mathbf{n}=(-1,0,0)$ powinny być spełnione warunki brzegowe zgodnie z (1.6) i (1.3) przy $l=2$. Po wykorzystaniu antysymetrii funkcji ψ_1, d_1, k_1 i symetrii funkcji ψ_3, d_3, k_3 warunki brzegowe sprowadzają się do następującego układu zależności

$$\left[(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu d_3+\frac{(1-\nu)h^2}{12}\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)}=0,$$
(3.5)
$$\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial k_3}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)}=\frac{2(1+\nu)pa}{Eh},$$

(3.5) [cd.]
$$\left[(1-\nu)\frac{\partial d_1}{\partial x_1}+2\nu k_3\right]_{(x_1=a)} = \frac{12(1+\nu)(1-2)M}{Eh^3},$$
$$\left[2k_1+\frac{\partial d_3}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)} = 0,$$
$$\left[(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu d_3+\frac{3(1-\nu)h^2}{20}\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)} = 0,$$
$$\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{3h^2}{20}\frac{\partial k_3}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)} = \frac{6(1+\nu)pa}{5Eh}.$$

Warunek $(3.5)_2$ spełniony jest tożsamościowo. Natomiast warunki $(3.5)_4$ i $(3.5)_5$ tworzą układ dwóch jednorodnych równań o wyznaczniku różnym od zera, zatem

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Z pozostałych warunków wynikają następujące relacje:

$$B_1 = 0,$$
$$A_2 = M-\frac{p}{2}a^2,$$
$$D_1 = -\frac{3(2-\nu)(1+\nu)pa}{Eh^3\beta\sinh(\beta a)}.$$

Po uwzględnieniu zależności (3.3) i (3.4) z wyznaczonymi stałymi oraz wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych, składowe przemieszczenia (3.1) mają następującą postać

$$u_1 = \frac{(1+\nu)a}{E}\left\{\frac{\nu p}{2}\xi_1+\left[\frac{\nu(2-\nu)p}{10\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)-6(1-\nu)p\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\xi_1^2\right)\xi_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2(1-\nu)\tilde{p}\xi_1+\frac{\nu(10+\nu)p}{10}\xi_1\right]\xi_3\right\},$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = \frac{(1+\nu)a}{E}\left\{-\frac{(5-\nu)(2-\nu)\sqrt{\frac{2}{15}(1-\nu)}\,p}{40\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}\left[\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)-\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)\right]+\right.$$
$$+(1-\nu)p\left(\frac{a}{h}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\xi_1^4+3\xi_1^2-\frac{5}{2}\right)+(1-\nu)\tilde{p}\frac{a}{h}(1-\xi_1^2)-\frac{(20-5\nu-\nu^2)p}{20}\frac{a}{h}(1-\xi_1^2)-$$
$$-\frac{(1-\nu)p}{2}\frac{h}{a}\xi_3+\left[-\frac{3(2-\nu)\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}}\,p}{2\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)+3\nu p\frac{a}{h}(1-\xi_1^2)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(10+\nu)(1-\nu)}{20}p\frac{h}{a}-\nu\tilde{p}\frac{h}{a}\right]\xi_3^2\right\},$$

gdzie

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{120}{1-\nu}}$$

Składowe stanu naprężenia są następujące

$$\sigma_{11} = -\left[6p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-2\tilde{p}\right]\xi_3,$$

$$\sigma_{22} = \nu\left\{-\frac{p}{2}-\left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}}p\frac{a}{h}\frac{\cos h\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+6p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\tilde{p}+\frac{10+\nu}{10}p\right]\xi_3\right\},$$

(3.6)
$$\sigma_{33} = -\frac{p}{2}-p\left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}}\frac{a}{h}\frac{\cos h\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\frac{10+\nu}{10}\right]\xi_3,$$

$$\sigma_{13} = p\left\{\frac{2-\nu}{4}\frac{a}{h}\frac{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\frac{4+\nu}{4}\frac{a}{h}\xi_1-\left[3(2-\nu)\frac{a}{h}\frac{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+3\nu p\frac{a}{h}\xi_1\right]\xi_3^2\right\},$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0.$$

Znając składowe naprężenia można określić ze związku $(1.4)_1$ siły reakcyjne objętościowe

$$r_1 = -\frac{6(2-\nu)}{h}p\frac{a}{h}\left[\xi_1-\frac{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}\right]\xi_3,$$

(3.7)
$$r_2 = 0,$$

$$r_3 = -\frac{3p}{h}\left[4(2-\nu)\sqrt{\frac{15}{2(1-\nu)}}\frac{a}{h}\frac{\cos h\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sin h\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\nu\right]\left(\frac{1}{20}-\xi_3^2\right);$$

ze związku $(1.4)_2$ po uwzględnieniu (1.6) siły reakcyjne powierzchniowe

$$
\begin{aligned}
&\text{przy } \xi_1 = 1\\
&s_1 = p\left(-\frac{3}{5}+4\xi_3^2\right)\xi_3;\\
&s_3 = 0\\
&\text{przy } \xi_1 = -1\\
&s_1 = p\left(\frac{3}{5}-4\xi_3^2\right)\xi_3,\\
&s_3 = 0;
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

a ze związku $(1.4)_3$ po uwzględnieniu (1.5) siły reakcyjne powierzchniowe

$$
\begin{aligned}
&\text{przy } \xi_3 = \frac{1}{2}\\
&s_1 = -\frac{2-\nu}{2}p\frac{a}{h}\left[\frac{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}-\xi_1\right],\\
&s_3 = -\frac{p}{2}\left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}}\frac{a}{h}\frac{\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\frac{\nu}{10}\right],\\
&\text{przy } \xi_3 = -\frac{1}{2}\\
&s_1 = \frac{2-\nu}{2}p\frac{a}{h}\left[\frac{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}-\xi_1\right],\\
&s_3 = -\frac{p}{2}\left[\frac{3(2-\nu)}{1-\nu}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}}\frac{a}{h}\frac{\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\xi_1\right)}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\frac{\nu}{10}\right].
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Jeżeli założymy, że na pasmo płytowe nie działa obciążenie pionowe p, a jedynie na powierzchni $\xi_1 = \pm 1$ siła

$$
p_1 = \begin{cases} 2\tilde{p}\,\xi_3 & \text{przy} \quad \xi_1 = 1,\\ -2\tilde{p}\,\xi_3 & \text{przy} \quad \xi_1 = -1,\end{cases}
$$

wtedy wszystkie siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe są równe zero, a otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym w sensie klasycznej teorii sprężystości.

Na podstawie wzoru (1.11) obliczono

$$f_1 = h\sup_{x\in\Omega}|r_1| + \sup_{x\in\pi\times\partial F}|s_1| + \frac{h}{a}\sup_{x\in F\times\partial\pi}|s_1| =$$

$$= p\left\{\frac{7}{2}(2-\nu)\frac{a}{h}\left[1-\frac{\ln\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}{\beta_1\frac{a}{h}}-\frac{1}{\beta_1\frac{a}{h}}\right]+0{,}2\frac{h}{a}\right\},$$

$$f_2 = h\sup_{x\in\Omega}|r_3| + \sup_{x\in\pi\times\partial F}|s_3| + \frac{h}{a}\sup_{x\in F\times\partial\pi}|s_3| = \frac{13}{5}p\left[(2-\nu)\sqrt{\frac{15}{2(1-\nu)}}\frac{a}{h}\frac{\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}+\frac{\nu}{4}\right],$$

$$g_1 = \frac{h}{|\Omega|}\int_\Omega |r_1|\,d\Omega + \frac{1}{2|\pi|}\left(\int_{\pi\times\left(\frac{h}{2}\right)}|s_1|\,d\pi + \int_{\pi\times\left(-\frac{h}{2}\right)}|s_1|\,d\pi\right) + \frac{h}{a}\frac{1}{|S_b|}\int_{S_b}|s_1|\,dS_b =$$

$$= p\left\{(2-\nu)\frac{a}{h} - \frac{2-\nu}{2}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{15}}\frac{\left[\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)-1\right]}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)} + \frac{13}{200}\frac{h}{a}\right\},$$

$$g_2 = \frac{h}{|\Omega|}\int_\Omega |r_3|\,d\Omega + \frac{1}{2|\pi|}\left(\int_{\pi\times\left(\frac{h}{2}\right)}|s_3|\,d\pi + \int_{\pi\times\left(-\frac{h}{2}\right)}|s_3|\,d\pi\right) + \frac{h}{a}\frac{1}{|S_b|}\int_{S_b}|s_3|\,dS_b = 0{,}479p.$$

Jako wytężenie σ_0 przyjęto maksymalne naprężenie σ_{11} czyli σ_{11} przy $\xi_1 = 0$ i $\xi_3 = -\frac{1}{2}$.

$$\sigma_0 = 3p\left(\frac{a}{h}\right)^2 - \tilde{p}.$$

Wówczas

$$\delta_1 = \frac{7(2-\nu)p\frac{h}{a}\left[1-\frac{\ln\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}{\beta_1\frac{a}{h}}-\frac{1}{\beta_1\frac{a}{h}}\right]}{2\left[3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]} + \frac{0{,}2p\left(\frac{h}{a}\right)^3}{3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2},$$

$$\delta_2 = \frac{13(2-\nu)\sqrt{\frac{15}{2(1-\nu)}}p\frac{h}{a}\frac{\cosh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}{\sinh\left(\beta_1\frac{a}{h}\right)}}{5\left[3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]} + \frac{13\left(\frac{h}{a}\right)^2\nu p}{20\left[3p-\tilde{p}\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]},$$

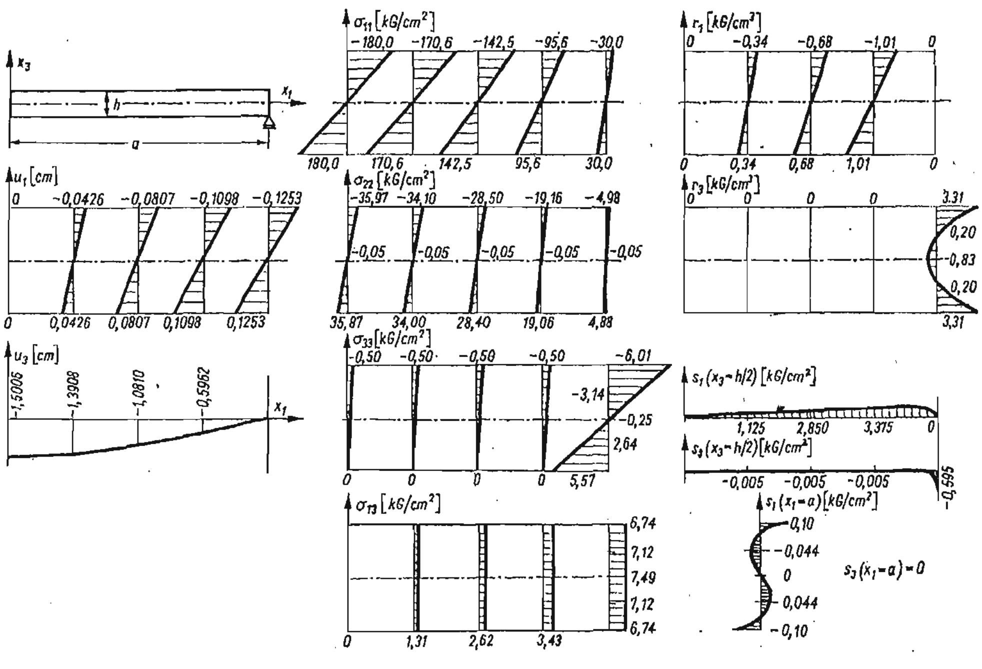
$$\gamma_1 = \frac{(2-\nu)p\dfrac{h}{a}}{3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2} - \frac{(2-\nu)\sqrt{\dfrac{2(1-\nu)}{15}p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2 \dfrac{\left[\cosh\left(\beta_1\dfrac{a}{h}\right)-1\right]}{\sinh\left(\beta_1\dfrac{a}{h}\right)}}{2\left[3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2\right]} + \frac{13p\left(\dfrac{h}{a}\right)^3}{200\left[3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2\right]},$$

$$\gamma_2 = \frac{0{,}479p\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}{3p-\tilde{p}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}.$$

Przyjmując dane $a = 200$ cm, $h = 20$ cm, $p = 0{,}5$ kG/cm², $M = -2000$ kGcm/cm $\left(\tilde{p} = -30\dfrac{\text{kG}}{\text{cm}^2}\right)$, $E = 200000$ kG/cm², $\nu = 0{,}2$ otrzymano następujące wielkości δ_α i γ_α

$$\delta_1 = 0{,}1668 \qquad \gamma_1 = 0{,}0492$$
$$\delta_2 = 0{,}3984 \qquad \gamma_2 = 0{,}0013$$

Na rys. 4 pokazano wykresy przemieszczeń, naprężeń i sił reakcyjnych w przekrojach ξ_1 równych $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.



Rys. 4

4. Rozwiązanie pasma płytowego przy $l = 4$

Przyjęto, że na pasmo płytowe działa obciążenie (1.5) i (1.6) a poszukiwane przemieszczenia mają następującą postać

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \psi_1 + d_1 x_3 + k_1 x_3^3, \\
u_2 &= 0, \\
u_3 &= \psi_3 + d_3 x_3 + l_3 x_3^2 + m_3 x_3^4.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Zgodnie z przyjętymi przemieszczeniami składowe tensora naprężenia wyrażają się następującymi zależnościami

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \nu d_3 + \left[(1-\nu)\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2\nu l_3\right]x_3 + \right. \\
&\qquad\left. + \left[(1-\nu)\frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4\nu m_3\right]x_3^3\right\}, \\
\sigma_{22} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + d_3 + \left(\frac{\partial d_1}{\partial x_1} + 2l_3\right)x_3 + \left(\frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4m_3\right)x_3^3\right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[d_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial d_3}{\partial x_1}x_3 + \left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right)x_3^2 + \frac{\partial m_3}{\partial x_1}x_3^4\right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)d_3 + \nu\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \left[2(1-\nu)l_3 + \nu\frac{\partial d_1}{\partial x_1}\right]x_3 + \right. \\
&\qquad\left. + \left[\nu\frac{\partial k_1}{\partial x_1} + 4(1-\nu)m_3\right]x_3^3\right\}, \\
\sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0
\end{aligned}
$$

Równania równowagi (1.2) sprowadzają się do następującego układu równań

$$
\begin{aligned}
&(1-\nu)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial d_3}{\partial x_1} = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(d_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right) + \frac{h^4}{80}\frac{\partial^2 m_3}{\partial x_1^2} - \frac{2(1+\nu)p}{Eh} = 0, \\
&(1-\nu)\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{h^2}{6}\frac{\partial l_3}{\partial x_1} + (1-\nu)\frac{h^4}{80}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{h^4}{20}\frac{\partial m_3}{\partial x_1} - \\
&\qquad - \frac{1-2\nu}{2}\left[d_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12}\left(3k_1 + \frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right) + \frac{h^4}{80}\frac{\partial m_3}{\partial x_1}\right] = 0, \\
&\frac{h^2}{24}\frac{\partial^2 d_3}{\partial x_1^2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}d_3 - \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{(1+\nu)p}{E} = 0, \\
&(1-\nu)\frac{h^2}{20}\frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{h^2}{10}\frac{\partial l_3}{\partial x_1} + (1-\nu)\frac{h^4}{112}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{h^4}{28}\frac{\partial m_3}{\partial x_1} -
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$-\frac{1-2\nu}{2}\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{3h^2}{20}\left(3k_1+\frac{3l_3}{\partial x_1}\right)+\frac{3h^4}{112}\frac{\partial m_3}{\partial x_1}\right]=0,$$

$$\frac{1-2\nu}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)+\frac{3h^2}{20}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(3k_1+\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right)+\frac{3h^4}{112}\frac{\partial^2 m_3}{\partial x_1^2}\right]-2(1-\nu)l_3-$$

(4.2) [cd.]

$$-\nu\frac{\partial d_1}{\partial x_1}-\frac{3h^2}{20}\left[4(1-\nu)m_3+\nu\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right]-\frac{3(1+\nu)(1-2\nu)p}{2Eh}=0,$$

$$\frac{1-2\nu}{8}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)+\frac{5h^2}{28}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(3k_1+\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right)+\frac{5h^4}{144}\frac{\partial^2 m_3}{\partial x_1^2}\right]-2(1-\nu)l_3-$$

$$-\nu\frac{\partial d_1}{\partial x_1}-\frac{5h^2}{28}\left[4(1-\nu)m_3+\nu\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right]-\frac{5(1+\nu)(1-2\nu)p}{4Eh}=0.$$

Równania (4.2) można rozseparować na dwa niezależne układy. Pierwszy obejmuje równania $(4.2)_1$ i $(4.2)_4$ zawierające niewiadome ψ_1, d_3. Jest on identyczny jak układ równań $(2.2)_1$ i $(2.2)_4$. Drugi układ stanowią pozostałe równania (4.2) zawierające niewiadome funkcje d_1, k_1, ψ_3, l_3, m_3.

Ogólne rozwiązanie układu równań (4.2), po uwzględnieniu antysymetrii składowej przemieszczenia u_1, otrzymano w następującej postaci:

$$\psi_1=-\frac{\nu}{(1-\nu)\beta}(e^{\beta x_1}-e^{-\beta x_1})D_2+\frac{1-\nu^2}{E}D_1x_1+\frac{\nu(1+\nu)p}{2E}x_1,$$

(4.3)

$$d_1=\frac{h^2}{10}\Bigg[\left[-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}\varkappa\alpha^2-\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}\alpha-\frac{3}{2}\varkappa\right]C_1(e^{\alpha x_1}-e^{-\alpha x_1})+$$

$$+\Bigg\{\left[-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}(d^2-b^2)-\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}(d\delta_1-b\delta_2)-\frac{3}{2}\right](e^{dx_1}-e^{-dx_1})\cos bx_1+$$

$$+\frac{h^2}{35(1-2\nu)}\left[\frac{\nu(1-\nu)}{2}bd+\nu^2(b\delta_1+d\delta_2)\right](e^{dx_1}+e^{-dx_1})\sin bx_1\Bigg\}M_1-$$

$$-\Bigg\{\frac{h^2}{35(1-2\nu)}\left[\frac{\nu(1-\nu)}{2}bd+\nu^2(b\delta_1+d\delta_2)\right](e^{dx_1}-e^{-dx_1})\cos bx_1+$$

$$+\left[\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}(d^2-b^2)+\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}(-b\delta_2+d\delta_1)+\frac{3}{2}\right]\times$$

$$\times(e^{dx_1}+e^{-dx_1})\sin bx_1\Bigg\}M_2\Bigg]+\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}A_2x_1+\frac{(1+\nu)p}{Eh}\left[\frac{2(1-\nu)}{h^2}x_1^2+\right.$$

$$\left.+\frac{3(2+3\nu)}{10}\right]x_1,$$

$$k_1=\varkappa C_1(e^{\alpha x_1}-e^{-\alpha x_1})+(e^{dx_1}-e^{-dx_1})\cos bx_1M_1+(e^{dx_1}-e^{-dx_1})\sin bx_1M_2-$$

$$-\frac{2(2-\nu)(1+\nu)p}{Eh^3}x_1,$$

(4.3) [c.d.]

$$\psi_3 = \frac{h^2}{10}\Bigg[\Bigg\{\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}\varkappa\alpha+\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}-\frac{\varkappa}{\alpha}-\frac{h^4}{12}\Bigg[\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)}\varkappa\alpha^3+$$

$$+\frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)}\alpha^2\Bigg]+\frac{h^2}{8}\Bigg\}(e^{\alpha x_1}+e^{-\alpha x_1})C_1+\Bigg\{\Bigg[\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}d+\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}\delta_1-$$

$$-\frac{d}{d^2+b^2}-\frac{h^4}{12}\Bigg(\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)}(d^3-3b^2d)+\frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)}(d^2\delta_1-b^2\delta_1-2bd\delta_2)\Bigg)+$$

$$+\frac{h^2}{8}\delta_1\Bigg](e^{dx_1}+e^{-dx_1})\cos bx_1+\Bigg[-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}b-\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}\delta_2-$$

$$-\frac{b}{b^2+d^2}+\frac{h^4}{12}\Bigg(\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)}(-3b^3+3bd^2)+\frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)}\times$$

$$\times(-b^2\delta_2+d^2\delta_2+2bd\delta_1)\Bigg)-\frac{h^2}{8}\delta_2\Bigg](e^{dx_1}-e^{-dx_1})\sin bx_1\Bigg\}M_1+$$

$$+\Bigg\{\Bigg[-\frac{\nu(1-2)h^2}{140(1-2\nu)}b+\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}\delta_2+\frac{b}{d^2+b^2}-\frac{h^4}{12}\Bigg(\frac{(1-\nu)^2}{280(1-2\nu)}\times$$

$$\times(3bd^2-b^3)+\frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)}(d^2\delta_2-b^2\delta_2+2bd\delta_1)\Bigg)+\frac{h^2}{8}\delta_2\Bigg](e^{dx_1}+e^{-dx_1})\times$$

$$\times\cos bx_1+\Bigg[\frac{\nu(1-\nu)h^2}{140(1-2\nu)}\frac{(3b^2d+d^3)}{(d^2+b^2)}+\frac{\nu^2h^2}{35(1-2\nu)}\delta_1-\frac{d}{d^2+b^2}+\frac{h^4}{12}\times$$

$$\times\Bigg(\frac{(1-2)^2}{280(1-2\nu)}(-d^3+3b^2d)+\frac{\nu(1-\nu)}{70(1-2\nu)}(b^2\delta_1-d^2\delta_1+2bd\delta_2)\Bigg)+$$

$$+\frac{h^2}{8}\delta_1\Bigg](e^{dx_1}-e^{-dx_1})\sin bx_1\Bigg\}M_2\Bigg]-\frac{(1+\nu)p}{2Eh}\Bigg(\frac{1-\nu}{h^2}x_1^2-\frac{3(8-3\nu)}{10}\Bigg)x_1^2-$$

$$-\frac{1+\nu}{2Eh}\Bigg(\frac{12(1-\nu)}{h^2}x_1^2-\nu\Bigg)A_2+A_1,$$

$$d_3 = D_2(e^{\beta x_1}-e^{-\beta x_1})-\frac{\nu(1+\nu)}{E}D_1-\frac{(1-\nu^2)p}{2E},$$

$$l_3 = \frac{h^2}{10}\Bigg[\Bigg[\frac{(1-\nu)^2h^2}{280(1-2\nu)}\varkappa\alpha^3+\frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)}\alpha^3-3\Bigg]C_1(e^{\alpha x_1}+e^{-\alpha x_1})+$$

$$+\Bigg\{\Bigg[\frac{(1-\nu)^2h^2}{280(1-2\nu)}(d^3-3b^2d)+\frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)}(d^2\delta_1-b^2\delta_1-2bd\delta_2)-3\delta_1\Bigg]\times$$

$$\times(e^{dx_1}+e^{-dx_1})\cos bx_1+\Bigg[-\frac{(1-\nu)^2h^2}{280(1-2\nu)}(-3b^3+3bd^2)-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)}\times$$

$$\times(-b^2\delta_2+d^2\delta_2+2bd\delta_1)+3\delta_2\Bigg](e^{dx_1}-e^{-dx_1})\sin bx_1\Bigg\}M_1+$$

$$+\Bigg\{\Bigg[\frac{(1-\nu)^2h^2}{280(1-2\nu)}(3bd^2-b^3)+\frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)}(d^2\delta_2-b^2\delta_2+2bd\delta_1)-3\delta_2\Bigg]\times$$

(4.3) [cd.]

$$\times (e^{dx_1}+e^{-dx_1})\cos bx_1 + \left[-\frac{(1-\nu)^2h^2}{280(1-2\nu)}(-d^3+3b^2d)-\frac{\nu(1-\nu)h^2}{70(1-2\nu)}\times\right.$$

$$\left.\times(b^2\delta_1-d^2\delta_1+2bd\delta_2)-3\delta_1\right](e^{dx_1}-e^{-dx_1})\sin bx_1\Big\}M_2\Big]-\frac{6\nu(1+\nu)}{Eh^3}A_2-$$

$$-\frac{3\nu(1+\nu)p}{Eh^3}x_1^2-\frac{3(5-3\nu)(1+\nu)p}{30Eh},$$

$$m_3 = C_1(e^{\alpha x_1}+e^{-\alpha x_1})+M_1[(e^{dx_1}+e^{-dx_1})\delta_1\cos bx_1-(e^{dx_1}-e^{-dx_1})\delta_2\sin bx_1]+$$

$$+M_2[(e^{dx_1}+e^{-dx_1})\delta_2\cos bx_1+(e^{dx_1}-e^{-dx_1})\delta_1\sin bx_1]+\frac{(1+\nu)^2p}{2Eh^3}.$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{24}{(1-\nu)h^2},$$

$$\varkappa = \frac{\dfrac{h^2}{(1-2\nu)}\left(-\dfrac{\nu(1-\nu)h^2}{60}\alpha^3+\alpha\right)}{\dfrac{(1-\nu)^2h^4}{240(1-2\nu)}\alpha^4-\dfrac{(1-\nu)h^2}{2(1-2\nu)}\alpha^2+5},$$

$$\chi = \frac{-\dfrac{(1-\nu)^2h^4}{240(1-2\nu)}[d^4-6b^2d^2+b^4+4bd(d^2-b^2)i]+\dfrac{(1-\nu)h^2}{2(1-2\nu)}[d^2-b^2+2bdi]-5}{\dfrac{h^2}{1-2\nu}\left\{\dfrac{\nu(1-\nu)h^2}{60}[d(d^2-3b^2)+b(3d^2-b^2)i]-d-bi\right\}},$$

$$\delta_1 = \mathrm{re}\,\chi,$$
$$\delta_2 = \mathrm{Im}\,\chi,$$

natomiast α, $-\alpha$, $d+ib$, $-(d+ib)$, $d-ib$, $-(d-ib)$ są pierwiastkami równania

$$\gamma^6-\frac{840}{(1-\nu)h^2}\gamma^4+\frac{1680(41-46\nu)}{(1-\nu)^2h^4}\Big|-\gamma^2\frac{4233600}{(1-\nu)h^6} = 0.$$

Warunki (1.3) i (1.6) na powierzchniach $x_l = a$ o normalnej $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ i $x_l = -a$ o $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ są równoważne następującym zależnościom

(4.4)

$$\left[(1-\nu)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu d_3\right]_{(x_1=a)} = 0,$$

$$\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{h^2}{12}\left(3k_1+\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right)+\frac{h^4}{80}\frac{\partial m_3}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)} = 0,$$

$$\left\{(1-\nu)\frac{\partial d_1}{\partial x_1}+2\nu l_3+\frac{3h^2}{20}\left[(1-\nu)\frac{\partial k_1}{\partial x_1}+4\nu m_3\right]\right\}_{(x_1=a)} = \frac{12(1+\nu)(1-2\nu)M}{Eh^3},$$

$$\left(\frac{\partial d_3}{\partial x_1}\right)_{(x_1=a)} = 0,$$

$$\left\{(1-\nu)\frac{\partial d_1}{\partial x_1}+2\nu l_3+\frac{5h^2}{28}\left[(1-\nu)\frac{\partial k_1}{\partial x_1}+4\nu m_3\right]\right\}_{(x_1=a)}=$$

(4.4) [cd.]

$$=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\left(\frac{12M}{h^3}-\frac{4}{35}\frac{p}{h}\right),$$

$$\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{3h^2}{20}\left(3k_1+\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right)+\frac{3h^4}{112}\frac{\partial m_3}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)}=\frac{6(1+\nu)pa}{5Eh},$$

$$\left[d_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{5h^2}{28}\left(3k_1+\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\right)+\frac{5h^4}{144}\frac{\partial m_3}{\partial x_1}\right]_{(x_1=a)}=\frac{6(1+\nu)pa}{7Eh}.$$

Warunek $(4.4)_2$ jest spełniony tożsamościowo. Z warunków $(4.4)_1$, $(4.4)_3$ i $(4.4)_4$ wynikają następujące relacje

$$E_1=0,$$

$$A_2=M-\frac{pa^2}{2},$$

$$E_2=0,$$

Natomiast zależności $(4.4)_5$, $(4.4)_6$ i $(4.4)_7$ tworzą układ trzech równań jednorodnych, których wyznacznik przy realnych stałych materiałowych i wymiarach jest różny od zera, zatem $C_1=M_1=M_2=0$.

Po uwzględnieniu wyznaczonych stałych i wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych, składowe przemieszczenia mają następującą postać:

$$u_1=\frac{(1+\nu)a}{E}\left\{\frac{\nu p}{2}\xi_1+\left[-6(1-\nu)p\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(1-\frac{\xi_1^2}{3}\right)\xi_1+2(1-\nu)\tilde{p}\,\xi_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3(2+3\nu)p}{10}\xi_1\right]\xi_3-2(2-\nu)p\xi_3^3\right\},$$

$$u_2=0,$$

$$u_3=\frac{(1+\nu)a}{E}\left\{\left[-\frac{3(8-3\nu)p}{20}(1-\xi_1^2)-\frac{(1-\nu)p}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2(\xi_1^4-6\xi_1^2+5)+\right.\right.$$
$$\left.+(1-\nu)\tilde{p}(1-\xi_1^2)\right]\frac{a}{h}-\frac{(1-\nu)p}{2}\frac{h}{a}\xi_3+\left[3\nu p\frac{a}{h}(1-\xi_1^2)-\nu\tilde{p}\frac{h}{a}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3(5-3\nu)p}{20}\frac{h}{a}\right]\xi_3^2+\frac{(1+\nu)p}{2}\frac{h}{a}\xi_3^4\right\}.$$

Składowe stanu naprężenia wyrażają się następującymi wzorami

(4.5)

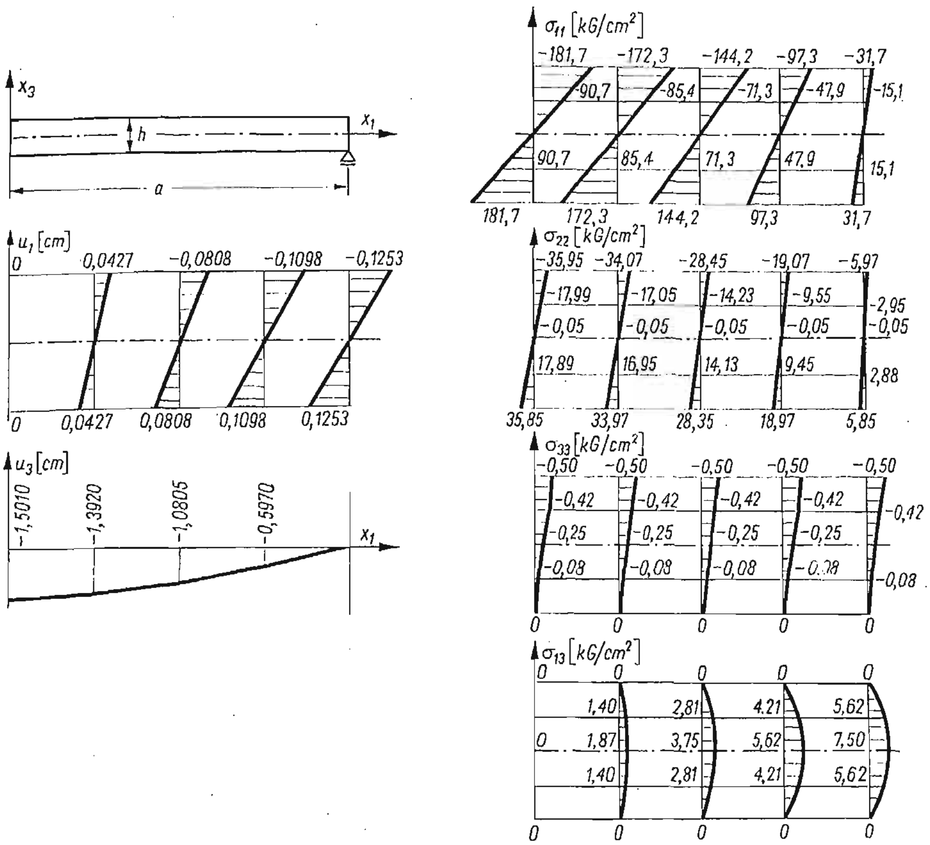
$$\sigma_{11}=-\left[6p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-2\tilde{p}-\frac{3}{5}p\right]\xi_3-4p\xi_3^3,$$

$$\sigma_{22}=-\nu\left\{\frac{p}{2}+\left[6p\left(\frac{a}{h}\right)^2(1-\xi_1^2)-2\tilde{p}+\frac{9}{10}p\right]\xi_3+2p\xi_3^3\right\},$$

$$\sigma_{33}=-\frac{p}{2}-\frac{3}{2}p\xi_3+2p\xi_3^3,$$

$$\sigma_{13}=3p\frac{a}{h}\left(\frac{1}{2}-2\xi_3^2\right)\xi_1,$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{23}=0.$$



Rys. 5

Siły reakcyjne objętościowe $(1.4)_1$ i powierzchniowe $(1.4)_2$ i $(1.4)_3$ są równe zero, a zatem uzyskano ścisłe rozwiązanie pasma płytowego w sensie klasycznej teorii sprężystości.

Na rys. 5 pokazano wykresy przemieszczeń i naprężeń w przekrojach ξ_1 równych: $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, przyjmując identyczne dane jak w przykładach liczbowych w rozdziałach 2 i 3.

5. Wnioski

Dysponując rozwiązaniem pasma płytowego w założeniach klasycznej teorii sprężystości i rozwiązaniami uzyskanymi wg teorii z więzami można określić zależności między γ_α i δ_α (1.10) a średnimi i maksymalnymi błędami w składowych naprężenia i przemieszczenia η_{ij}, Θ_i (1.8) oraz wielkościami $\varkappa_{ij}$, ϱ_i (1.9) [2].

W przypadku, gdy funkcja przemieszczeń przyjęta jest w postaci $u_i = \psi_i + d_i x_3$ wielkości γ_α i δ_α są następujące

$$\gamma_1 = 0{,}0556 \qquad \delta_1 = 0{,}1945$$
$$\gamma_2 = 0{,}5362 \qquad \delta_2 = 0{,}7453$$

Wielkościom tym odpowiadają następujące odchylenia zestawione w tablicy 5.1.

Tablica 5.1.

σ_{ij}, u_i	η_{ij}, Φ_i	χ_{ij}, ϱ_i
σ_{11}	0,0002	0,0015
σ_{22}	0,2456	0,6841
σ_{33}	64,08	178,20
σ_{13}	0,3849	2,00
u_1	0,0615	0,2086
u_3	0,0620	0,0976

W przypadku, gdy funkcja przemieszczeń przyjęta jest w postaci $u_i = \psi_i + d_i x_3 + k_i x_3^2$ wielkości γ_α i δ_α są następujące

$$\gamma_1 = 0{,}0492, \quad \delta_1 - 0{,}1694$$
$$\gamma_2 = 0{,}0013, \quad \delta_2 = 0{,}3710.$$

Wielkościom tym odpowiadają następujące błędy zestawione w tablicy 5.2.

Tablica 5.2.

σ_{ij}, u_i	η_{ij}, θ_i	χ_{ij}, ϱ_i
σ_{11}	0,0002	0,0015
σ_{22}	0,0077	0,0822
σ_{33}	2,1076	22,04
σ_{13}	0,3409	2,6960
u_1	0,0011	0,0163
u_3	0,0009	0,0020

Z powyższych zestawień wynika, że za pomocą uogólnionej teorii Reissnera $(l = 1)$ można wyznaczyć przemieszczenia oraz naprężenia normalne σ_{11} i σ_{22}, natomiast nie może ona służyć do wyznaczania naprężeń σ_{33}. Naprężenia styczne wyznaczone na podstawie tej teorii są stałe na całej wysokości płyty, podczas gdy wg rozwiązania klasycznej teorii sprężystości zmieniają się parabolicznie wzdłuż jej wysokości. Średnie naprężenia w obu rozwiązaniach są jednakowe a największe różnice występują na krawędziach płyty. Nie ma to jednak istotnego znaczenia ze względu na nieznaczne wartości tych naprężeń wobec naprężeń normalnych.

Wielkości γ_1 i δ_1 maleją do zera gdy stosunek wysokości płyty do jej szerokości dąży do zera. Natomiast wielkości γ_2 i δ_2 dążą wówczas do granicy różnej od zera. Wynika stąd, że uogólniona teoria Reissnera nie jest ścisła nawet dla płyt bardzo cienkich.

Rozwiązanie przy $l = 2$ jest znacznie dokładniejsze niż przy $l = 1$. Przemieszczenia oraz naprężenia normalne wyznaczone są w płycie w sposób prawie dokładny.

Jedynie na powierzchniach brzegowych $x_1 = \pm a$ naprężenia σ_{33} znacznie różnią się od wyznaczonych wg klasycznej teorii sprężystości. Naprężenia styczne σ_{13} zachowują się podobnie jak w rozwiązaniach przy $l = 1$.

Natomiast wszystkie wielkości γ_α i δ_α dążą do zera gdy stosunek wysokości do jej szerokości maleje do zera.

Literatura cytowana w tekście

1. W. GUTKOWSKI, W. NOWACKI, Cz. WOŹNIAK, *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum 1975.
2. M. MARKS, *Płyty w ujęciu mechaniki ciał z więzami* (w druku).
3. Cz. WOŹNIAK, *Nonlinear mechanics of the constrained and discreatized material continua*, wykłady w Udine 1973.
4. Cz. WOŹNIAK, *Constrained Continuous Media*, Part I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci, sci. techn., No 3, 4 — 1973.
5. Cz. WOŹNIAK, *Nonlinear mechanics of constrained material continua I*. Foundations of the theory, Archives of Mechanics, 26, 1 — 1974.
6. Cz. WOŹNIAK, *Elastics bodies, with constrains imposed on deformations stresses and momenta*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn. 22, 1974.
7. Cz. WOŹNIAK, *Analitical mechanics of elastic media*, wykłady w Udine, 1975.

Резюме

АНАЛИЗ ПОЛОСЫ КАК ТЕЛА СО СВЯЗЯМИ

В работе рассмотрена проблема анализа полосы с точки зрения механики тел со связями. Принимая функцию перемещений в виде степенного ряда относительно вертикальной переменной получено исходную систему уравнений. Задача полосы решена для трёх различных видов функции перемещений. В двух случаях силы реакции получены отличные от нуля, в одном равны нулю, значит решение в третим случае отвечает полученному методами классической механики сплошной среды. Силы реакции отличны от нуля допускают оценнить точность решения полученного методами механики среды со связями. Взаимозависимость сил реакции и точности решения проиллюстрирована численными примерами.

Summary

ANALYSIS OF THE BAND PLATE CONSIDERED AS A CONSTRAINED BODY

The elastic band plate is solved as a body with internal constrains. To obtain the basic equations the deformation function is assumed in the form of polynomial series. The problem of the band plate is solved for three cases of the deformation function. In two cases the reaction forces disappear. The nonvanishing reaction forces describe a degree of accuracy of the solutions. The relation between the reaction forces and the accuracy of the solutions is given and a general criterium is proposed.

IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 sierpnia 1978 r.