

## NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

STANISŁAW WOJCIECH (BIELSKO BIAŁA)

### 1. Wstęp

W pracy przedstawiono uzyskane metodą dyskretyzacji (prostych) rozwiązanie zagadnienia dużych ugięć ortotropowych płyt pierścieniowych z wygięciem wstępnym. Założono, że płyty są obciążone ściskającymi siłami promieniowymi, równomiernie rozłożonymi, szybko rosnącymi w czasie, działającymi na brzeg wewnętrzny i zewnętrzny płyty.

Przeprowadzono obliczenia umożliwiające zbadanie wpływu sposobów podparcia i obciążenia płyty, wartości promienia bezwymiarowego i współczynnika ortotropii na wartości krytyczne, przy założeniu że obciążenie rośnie liniowo w czasie. Zbadano wpływ ugięcia wstępnego i szybkości narastania obciążenia na przebieg ugięcia. Założono osiowosymetryczną postać wygięcia wstępnego płyty, a ponadto ograniczono się do przypadków, w których przy statycznym obciążeniu płyty idealnie płaskiej, jej powierzchnia po wyboczeniu jest powierzchnią obrotową [2].

Pozwala to przyjąć, że ugięcie płyty, przynajmniej do momentu zmiany znaku przez prędkość ugięcia, jest osiowosymetryczne. Potem może nastąpić utrata osiowosymetrycznej postaci ugięcia wskutek przeskoku. W rozwiązaniu pominięto zagadnienie rozchodzenia się fal sprężystych w kierunku promieniowym.

Rozwiązanie zagadnienia jest przedmiotem badań wielu autorów. Znane są jedynie rozwiązania, w których przyjmowano jednoparametrową funkcję ugięcia.

A. S. WOŁMIŃ w pracy [1] przedstawił rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt prostokątnych.

W pracy [3] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt kołowych, a w pracy [4] płyt pierścieniowych. Rozwiązania dotyczą płyt izotropowych i zostały uzyskane metodą Galerkinia.

### 2. Równania różniczkowe zagadnienia

**Warunki brzegowe i początkowe.** Równanie równowagi dynamicznej płyty i równanie nierozdzielności odkształceń, mają w rozważanym przypadku postać następującą [5]:

$$(2.1) \quad D_r \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \rho^3} - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \right) = \frac{h}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{\gamma}{g} h r_z^4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{k_1^2}{\rho_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{k_1^2 E_r}{2} \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{dw_0}{d\rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 \right],$$

gdzie

$w_0 = w_0(\varrho)$  — ugięcie wstępne płyty,  
 $w_1 = w_1(\varrho, t)$  — ugięcie wywołane działaniem sił zewnętrznych,  
 $w = w_0 + w_1$  — ugięcie całkowite,

$\varrho = \frac{r}{r_z}$  — promień bezwymiarowy,

$t$  — czas,

$\Phi = \Phi(\varrho, t)$  — funkcja naprężeń dobrana tak, aby

$$(2.2) \quad \sigma_r = \frac{1}{r_z^2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{r_z^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2},$$

$\sigma_r, \sigma_\theta$  — naprężenie w kierunku promieniowym i obwodowym,

$k, k_1$  — współczynniki ortotropii  $k^2 = \frac{D_\theta}{D_r}, k_1^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$ ,

$D_r, D_\theta$  — sztywności płytowe w kierunku promieniowym i obwodowym,

$E_r, E_\theta$  — moduły sprężystości podłużnej w kierunku promieniowym i obwodowym,

$\gamma$  — ciężar właściwy materiału płyty,

$g$  — przyspieszenie ziemskie,

$h$  — grubość płyty

W rozważanym w tej pracy przypadku ortotropii materiałowej ( $k = k_1$ ) sztywności płytowe  $D_r$  i  $D_\theta$  określone są wzorami:

$$(2.3) \quad D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad \nu_r, \nu_\theta \text{ — liczby Poissona.}$$

W pracy rozważane będą przypadki podparcia płyt będące dowolną kombinacją brzegu utwierdzonego i swobodnie podpartego. Z przyjętej postaci ugięcia całkowitego  $W = W_0 + W_1$  wynika, że ugięcie całkowite  $W$  spełni warunki podparcia, jeśli spełniać je będą ugięcia wstępne  $W_0$  i dodatkowe  $W_1$ .

W przypadku brzegu utwierdzonego ugięcie i kąt ugięcia muszą być zerem:

$$(2.4) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varrho} = 0.$$

Dla brzegu swobodnie podpartego, zerować się muszą ugięcie i promieniowy moment gnący:

$$(2.5) \quad w = 0, \quad M = -\frac{D_r}{r_z^2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} + \frac{\nu_\theta}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} \right) = 0$$

Warunki początkowe mające postać:

$$(2.6) \quad w|_{t=0} = W_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

można zapisać w następującej postaci:

$$(2.7) \quad w_1|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Z warunków obciążenia brzegów płyty, wynikają następujące zależności:

$$(2.8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_w} = -p_w r_z^2, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = -p_z r_z^2.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych:

$$(2.9) \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{h}, \quad \bar{w}_1 = \frac{\bar{w}_1}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h},$$

$$F = \frac{h}{D_r} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho},$$

$$p^* = \frac{h r_z^2}{D_r} p,$$

oraz przyjęciu, że:

$$(2.10) \quad p_w^* = \delta_1 p^*, \quad \delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu wewnętrznego obciążonego,} \\ 0 & \text{dla brzegu wewnętrznego nieobciążonego,} \end{cases}$$

$$p_z^* = \delta_2 p^*, \quad \delta_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu zewnętrznego obciążonego,} \\ 0 & \text{dla brzegu zewnętrznego nieobciążonego,} \end{cases}$$

$$p^* = a \cdot t \text{ — obciążenie na brzegach rośnie liniowo w czasie z prędkością } a,$$

$$t^* = \frac{p^*}{p_{kr}^*} = \frac{a}{p_{kr}^*} t \text{ — gdzie } p_{kr}^* \text{ jest wartością bezwymiarowego obciążenia, przy}$$

którym płyta bez wygięcia wstępnie traci stateczność w zagadnieniu statycznym,

równania (2.1) przyjmują postać:

$$(2.11) \quad \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 \bar{w}_1}{\partial \rho^3} - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \rho^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial F}{\partial \rho} \left( \frac{d\bar{w}_0}{d\rho} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} \right) + \right. \\ \left. + F \left( \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \rho^2} \right) \right] - \frac{S}{(p_{kr}^*)^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial t^{*2}},$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{k_1^2}{\rho^2} F = \frac{l_2}{\rho} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} \left( 2 \frac{d\bar{w}_0}{d\rho} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} \right),$$

gdzie: 
$$S = \frac{\gamma h r_z^4}{g D_r} a^2$$

$$l_2 = 6k_1^2(\nu_r \nu_0 - 1).$$

Warunki brzegowe i warunek początkowy po przyjęciu, że funkcja  $\bar{w}_0$  spełnia warunki podparcia płyty, mają postać następującą:

$$(2.13) \quad \bar{w}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} = 0 \quad \text{dla brzegu utwierdzonego,}$$

$$(2.14) \quad \bar{w}_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \rho^2} + \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \rho} = 0 \quad \text{dla brzegu swobodnie podpartego,}$$

$$(2.15) \quad F|_{\rho=\rho_w} = -\delta_1 \rho_w p_{kr}^* t^*, \quad F|_{\rho=1} = -\delta_2 p_{kr}^* \cdot t^*,$$

$$(2.16) \quad \bar{w}_1|_{t^*=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t^*} \Big|_{t^*=0} = 0.$$

## 3. Rozwiązanie zagadnienia

Przedstawione poprzednio równania różniczkowe zagadnienia, są równaniami różniczkowymi cząstkowymi o dwóch zmiennych  $\varrho$  i  $t^*$ . Większość znanych metod rozwiązywania takich równań polega na doprowadzeniu do zagadnienia rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych.

W tej pracy, w celu doprowadzenia zagadnienia (2.11)–(2.16) do zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych, zdyskretyzowano względem zmiennej  $\varrho$  i przybliżono pochodne funkcji  $\bar{w}_1$  i  $F$  względem zmiennej  $\varrho$  w punktach dyskretyzacji przez różnice skończone [8].

Niech  $n$  — przyjęta liczba przedziałów, na które dzieli się przedział  $\langle \varrho_w, 1 \rangle$ ,

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{1 - \varrho_w}{n}, \\
 \varrho_i &= \varrho_w + i \cdot b, \quad \text{dla } i = -1, 0, 1, \dots, n, n+1, \\
 (3.1) \quad \left. \frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= S_i, \\
 \left. \frac{d^2\bar{w}_0}{d\varrho^2} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= \bar{S}_i, \\
 \bar{w}_1(\varrho_i, t^*) &= X_i(t^*), \\
 F(\varrho_i, t^*) &= Y_i(t^*).
 \end{aligned}$$

Zgodnie z [6] przyjęto:

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \left. \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2b}, & \left. \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2b}, \\
 \left. \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \varrho^2} \right|_{\varrho_i=\varrho} &= \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{b^2}, & \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{b^2}, \\
 \left. \frac{\partial^3 \bar{w}_1}{\partial \varrho^3} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + 2x_{i-1} - x_{i-2}}{2b^3}, \\
 \left. \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \varrho^4} \right|_{\varrho=\varrho_i} &= \frac{x_{i+2} - 4x_{i+1} + 6x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2}}{b^4}.
 \end{aligned}$$

Wzory te dają błędy rzędu  $O(b^2)$ .

Po przyjęciu, że równania (2.11) i (2.12) są spełnione, jeśli są spełnione dla  $\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \dots, \varrho_{n-1}$  i wykorzystaniu (3.1) i (3.2), po przekształceniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \varepsilon_{i1} x_{i-2} + \varepsilon_{i2} x_{i-1} + \varepsilon_{i3} x_i + \varepsilon_{i4} x_{i+1} + \varepsilon_{i5} x_{i+2} &= b \left[ \frac{1}{4} a_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \cdot \right. \\
 &\left. \cdot (2s_i b + x_{i+1} - x_{i-1}) + a_i y_i (\bar{s}_i b^2 + x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \right] - \frac{Sb^4}{(p_{kr}^*)^2} \frac{d^2 x_i}{dt^{*2}},
 \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad f_{i1}y_{i-1} + f_{i2}y_i + f_{i3}y_{i+1} = \frac{l_2}{4b} a_i (4s_1 b + x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n-1,$

gdzie:  $a_i = \frac{b}{\rho_i},$

$$\varepsilon_{i1} = 1 - a_i, \quad \varepsilon_{i2} = -4 + 2a_i - k^2 a_i^2 - \frac{k^2}{2} a_i^3, \quad \varepsilon_{i3} = 6 + 2k^2 a_i^2,$$

$$\varepsilon_{i4} = -4 - 2a_i - k^2 a_i^2 + \frac{k^2}{2} a_i^3, \quad \varepsilon_{i5} = 1 + a_i,$$

$$f_{i1} = 1 - \frac{a_i}{2}, \quad f_{i2} = -2 - k^2 a_i^2, \quad f_{i3} = 1 + \frac{a_i}{2}.$$

Zagadnienie zostało więc sprowadzone do problemu rozwiązania układu  $n-1$  równań różniczkowych zwyczajnych, nieliniowych postaci (3.3). Sformułowane wcześniej warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia płyty, pozwalają określić wartości ugięć na warstwicach  $-1, 0, n, n+1$ :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x_0 &= x_n = 0, \\ x_{-1} &= \lambda_1 x_1, \\ x_{n+1} &= \lambda_2 x_{n-1}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu wewnętrznego utwierdzonego,} \\ \frac{2\rho_w + \nu_0 b}{\nu_0 b - 2\rho_w} & \text{dla brzegu wewnętrznego swobodnie podpartego,} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla brzegu zewnętrznego utwierdzonego,} \\ \frac{\nu_0 b - 2}{2 + \nu_0 b} & \text{dla brzegu zewnętrznego swobodnie podpartego.} \end{cases}$$

Z warunków obciążenia brzegów płyty (2.15) wynika, że:

$$(3.6) \quad y_0 = -\delta_1 \rho_w p_{kr}^* t^*, \quad y_n = -\delta_2 p_{kr}^* t^*.$$

Z warunku (2.16) otrzymuje się:

$$(3.7) \quad x_i|_{t^*=0} = 0, \quad \left. \frac{dx_i}{dt^*} \right|_{t^*=0} = 0.$$

Przez dyskretyzację względem zmiennej  $\rho$ , problem został sprowadzony do rozwiązania następującego zagadnienia początkowego:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{X}} = \frac{(p_{kr}^*)^2}{Sb^4} [b \cdot \mathbf{R} - \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}}], \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \\ \vdots \\ x_2(t^*) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t^*) \\ x_{n-1}(t^*) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} + \lambda_1 \varepsilon_{11} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & \varepsilon_{44} & \varepsilon_{45} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{n-2,1} & \varepsilon_{n-2,2} & \varepsilon_{n-2,3} & \varepsilon_{n-2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{n-1,1} & \varepsilon_{n-1,2} & \varepsilon_{n-1,3} + \lambda_2 \varepsilon_{n-1,5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} a_1 (y_2 + \delta_1 \varrho_w p_{kr}^* t^*) (2s_1 b + x_2) + a_1 y_1 (\bar{s}_1 b^2 + x_2 - 2x_1) \\ \frac{1}{4} a_2 (y_3 - y_1) (2s_2 b + x_3 - x_1) + a_2 y_2 (\bar{s}_2 b^2 + x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{4} a_i (y_{i+1} - y_{i-1}) (2s_i b + x_{i+1} - x_{i-1}) + a_i y_i (\bar{s}_i b^2 + x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ \frac{1}{4} a_{n-2} (y_{n-1} - y_{n-3}) (2s_{n-2} b + x_{n-1} - x_{n-3}) + a_{n-2} y_{n-2} (\bar{s}_{n-2} b^2 + x_{n-1} - 2x_{n-2} + x_{n-3}) \\ \frac{1}{4} a_{n-1} (\delta_2 p_{kr}^* t^* - y_{n-2}) (2s_{n-1} b - x_{n-2}) + a_{n-1} y_{n-1} (\bar{s}_{n-1} b^2 - 2x_{n-1} + x_{n-2}) \end{bmatrix}.$$

Składowe wektora  $\mathbf{Y} = [y_1(t^*), \dots, y_{n-1}(t^*)]^T$  oblicza się ze wzoru:

$$(3.9) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} f_{12} & f_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n-1,1} & f_{n-1,2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{4b} a_1 (4S_1 b + x_2) x_2 + \delta_1 \varrho_w p_{kr}^* t^* f_{11} \\ \vdots \\ \frac{l_2}{4b} a_i (4S_i b + x_{i+1} - x_{i-1}) (x_{i+1} - x_{i-1}) \\ \vdots \\ \frac{l_2}{4b} a_{n-1} (4S_{n-1} b - x_{n-2}) (-x_{n-2}) + \delta_2 p_{kr}^* t^* f_{n,3} \end{bmatrix},$$

4. Wyznaczenie wartości statycznego obciążenia krytycznego  $p_{kr}$

Wartości  $p_{kr}^*$  (których znajomość jest potrzebna przy rozwiązywaniu zagadnienia początkowego (3.8)) wyznacza się z równań (2.11) (2.12) po odrzuceniu członu bezwładnościowego i nieliniowego oraz przyjęciu  $w_0 = 0$ , otrzymując:

$$(4.1) \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d\varrho^4} + \frac{2}{\varrho} \frac{d^3 \bar{w}}{d\varrho^3} - \frac{k^2}{\varrho^2} \frac{d^2 \bar{w}}{d\varrho^2} + \frac{k^2}{\varrho^3} \frac{d\bar{w}}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \left[ \frac{dF}{d\varrho} \frac{d\bar{w}}{d\varrho} + F \frac{d^2 \bar{w}}{d\varrho^2} \right],$$

$$(4.2) \quad \frac{d^2 F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\varrho} - \frac{k_1^2}{\varrho^2} F = 0.$$

Rozwiązaniem zagadnienia tarczowego danego równaniem (4.2) z warunkami brzegowymi:

$$(4.3) \quad F|_{\varrho=\varrho_w} = -\delta_1 \varrho_w p^*, \quad F|_{\varrho=1} = -\delta_2 p^* \quad \text{jest funkcja}$$

$$(4.4) \quad F = p^*(l_1 \varrho^{k_1} + l_2 \varrho^{-k_1}), \quad \text{gdzie} \quad c_1 = \frac{\delta_2 \varrho_w^{-k_1} + \delta_1 \varrho_w}{\varrho_w^{k_1} - \varrho_w^{-k_1}}, \quad c_2 = \frac{\delta_1 \varrho_w - \delta_2 \varrho_w^{k_1}}{\varrho_w^{k_1} - \varrho_w^{-k_1}}.$$

Wstawiając tak wyznaczoną funkcję  $F$  do równania (4.1), po zastąpieniu pochodnych przez różnice skończone (podobnie jak to zrobiono w równaniu (2.11)) otrzymuje się:

$$(4.5) \quad \varepsilon_{i1} x_{i-2} + \varepsilon_{i2} x_{i-1} + \varepsilon_{i3} x_i + \varepsilon_{i4} x_{i+1} + \varepsilon_{i5} x_{i+2} = p^* \frac{b^2}{\varrho_i} [x_{i+1}(d_i + \bar{e}_i) - 2d_i x_i + (d_i - \bar{e}_i)x_{i-1}],$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,

gdzie  $\varepsilon_{ij}$  wyrażają się tak samo jak w (3.3),

$$x_i = \bar{w}(\varrho_i),$$

$$d_i = c_1 \varrho_i^{k_1} + c_2 \varrho_i^{-k_1},$$

$$\bar{e}_i = \frac{k_1 b}{2} (c_1 \varrho_i^{k_1-1} - c_2 \varrho_i^{-k_1-1}).$$

Równania (4.5) można zapisać w następującej, równoważnej macierzowej postaci:

$$(4.6) \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = p^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X},$$

gdzie  $\mathbf{B}$  jest macierzą określoną jak w (3.8)

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{12} & m_{13} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,1} & m_{n-1,2} \end{bmatrix}$$

$$m_{i1} = (d_i - \bar{e}_i) \frac{b^2}{\varrho_i},$$

$$m_{i2} = -2d_i \frac{b^2}{\varrho_i},$$

$$m_{i3} = (d_i + \bar{e}_i) \frac{b^2}{\varrho_i} \quad \text{fdla} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Układ (4.6) ma rozwiązanie nietrywialne, jeśli:

$$(4.7) \quad \det(\mathbf{B} - p^* \mathbf{M}) = 0.$$

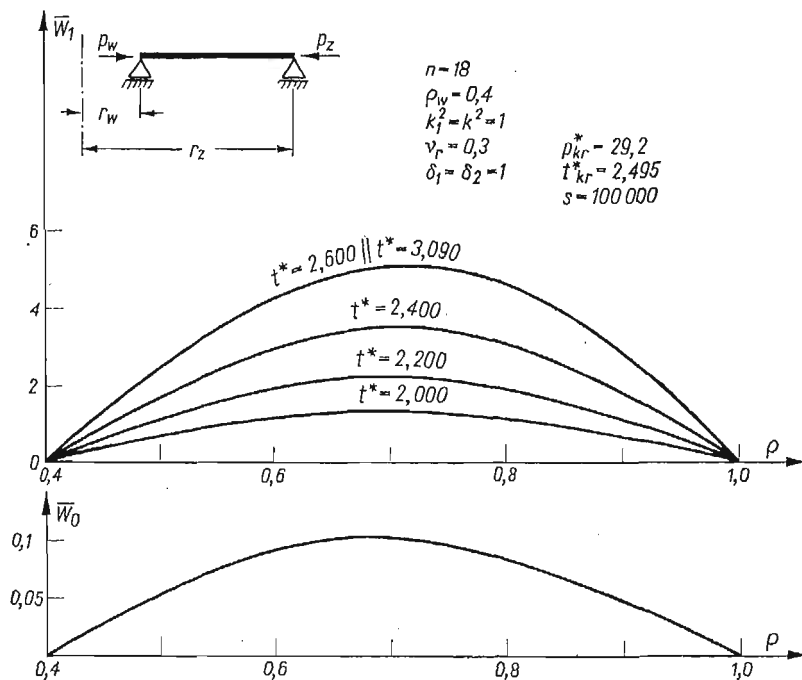
Z równania (4.7) będącego uogólnionym zagadnieniem wartości własnych, można otrzymać  $n-1$  wartości własnych macierzy  $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{M}$ , przy czym w dalszych obliczeniach przyjmowano  $p_{kr}^*$  równe najmniejszej z wartości własnych. Z rozwiązania równania (4.6) można bezpośrednio otrzymać wektory własne odpowiadające poszczególnym wartościom  $p_{kr}^*$ , a ich składowe określają ugięcie płyty w chwili utraty stateczności.

### 5. Obliczenia, wyniki

Podstawową trudność numeryczną stanowi rozwiązanie zagadnienia (3.8). Z uwagi na bardzo dużą liczbę działań koniecznych do wykonania przy liczeniu wartości wektora  $R$  w poszczególnych punktach osi  $t^*$ , do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę ekstrapolacyjno-interpolacyjną czwartego rzędu Adamsa-Bashfortha, z automatycznym doбором kroku całkowania. Przyjęto, że błędy obcięcia nie mogą co do wartości bezwzględnej przekroczyć  $10^{-5}$ .

Do rozwiązania zagadnienia wartości własnych (4.7) wykorzystano algorytm QR, po uprzednim sprowadzeniu macierzy  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{M}$  do górnej macierzy Hessenberga.

W celu wykonania obliczeń, napisano program w języku Fortran IV wykorzystując w programie podprogramy z grupy FSCE biblioteki Odry 1300. Obliczenia przeprowadzono na EMC ODRA 1305.



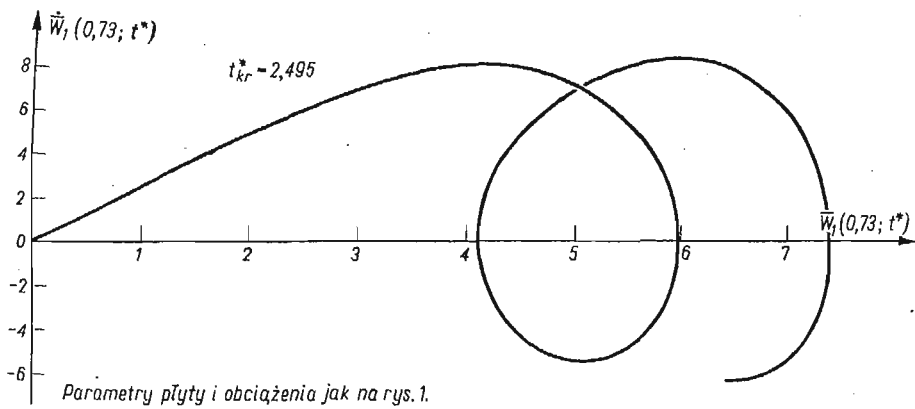
Rys. 1



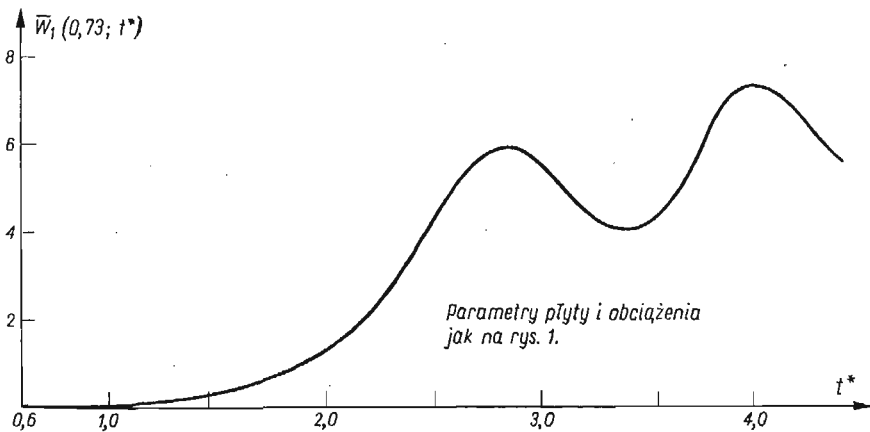
W dalszych rozważaniach przyjmuje się za Wolmirem [1], że płyta obciążona dynamicznie traci stateczność, gdy prędkość ugięcia osiąga pierwsze maksimum ( $\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial t^{*2}} = 0$ ), a odpowiadającą temu wartość obciążenia działającego na brzegu płyty nazywa krytycznym obciążeniem dynamicznym i oznacza  $p_{krd}^*$ . Stosunek krytycznych obciążeń: dynamicznego do statycznego oznacza się  $t_{kr}^* = \frac{p_{krd}^*}{p_{kr}^*}$ . Na rysunku 1 przedstawiono wpływ wielkości obciążenia na ugięcie płyty izotropowej, dwustronnie swobodnie podpartej, obciążonej na obu brzegach. Łatwo zauważyć, że przy różnych  $t^*$  ugięcie płyty jest maksymalne prawie zawsze przy tej samej wartości  $\varrho$ .

Podobnego spostrzeżenia dokonano we wszystkich rozważanych przypadkach. Spotykane przesunięcia punktu nie przekraczały długości 3 podprzedziałów (3b).

Na rysunku 2 i 3 przedstawiono przebieg ugięcia gdy  $\varrho = 0,73$  przy tej bowiem wartości ugięcie jest maksymalne. Na rysunku 2 przedstawiono przebieg ugięcia na płaszczyźnie fazowej, a na rysunku 3 pokazano zależność  $\bar{w}_1 = \bar{w}_1(0,73, t^*)$ .



Rys. 2



Rys. 3

Wykresy dotyczą płyty przedstawionej na rysunku 1. Wykres na płaszczyźnie fazowej pozwala bardzo wyraźnie zidentyfikować bezwymiarowy czas utraty stateczności.

Z uwagi na bezpośrednie powiązanie  $t^*$  z wartością obciążenia, wszystkie następane rysunki podają zależność maksymalnego ugięcia od  $t^*$  w sposób przedstawiony na rysunku 3.

W tabelicy 1 przedstawiono wpływ  $n$  na wartości  $p_{kr}^*$ ,  $t_{kr}^*$  i  $\bar{w}_1 \max$ . Zamieszczone tam wyniki (potwierdziły to pozostałe obliczenia) wskazują, że wystarczającą dokładność wyników uzyskuje się gdy  $n \geq 12$ .

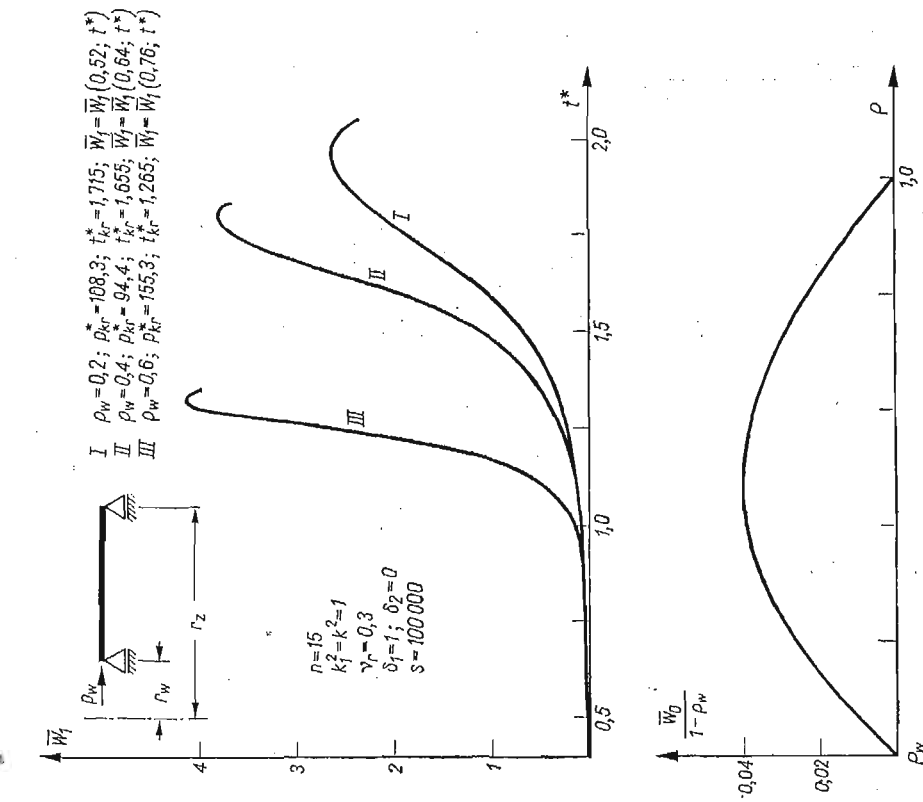
Jednak przyjęcie dużego  $n$  powoduje znaczne zwiększenie czasu obliczeń. W przypadku płyty dwustronnie utwierdzonej opisanej w tabelicy 1, przy  $n = 12$  czas obliczeń wynosił 20 minut, a przy  $n = 24$  wynosił 4.5 godziny. W dalszych obliczeniach przyjęto  $n = 15$  jako liczbę zapewniającą otrzymanie wystarczająco dokładnych wyników.

Tabela 1

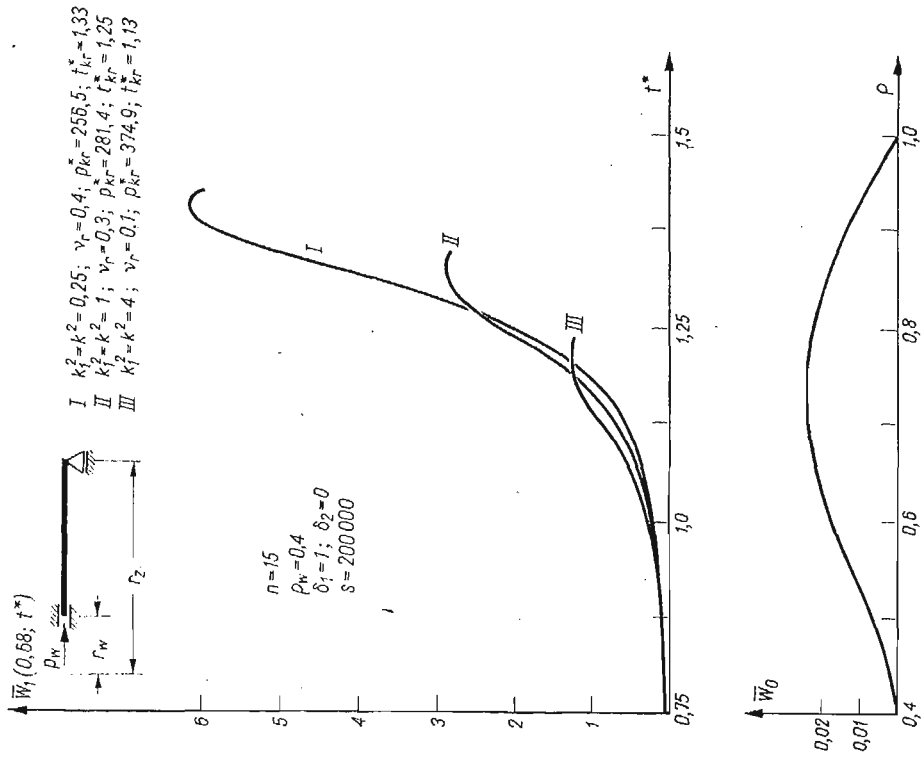
n	$\xi_w = 0.4, k_1^2 = k^2 = 1, \nu_r = 0.3, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, S = 100000$			$\xi_w = 0.4, k_1^2 = k^2 = 1, \nu_r = 0.3, \delta_1 = \delta_2 = 1, S = 100000$		
	$p_{kr}^*$	$t_{kr}^*$	$\max_{\xi_w \leq \xi < 1} \{\bar{w}_1(\xi, t_{kr}^*)\}$	$p_{kr}^*$	$t_{kr}^*$	$\max_{\xi_w \leq \xi < 1} \{\bar{w}_1(\xi, t_{kr}^*)\}$
12	381,11	1,09	1,51	29,1	2,495	4,20
15	385,72	1,09	1,55	29,2	2,495	4,23
18	388,16	1,09	1,55	29,2	2,495	4,25
21	389,61	1,09	1,55	29,2	2,495	4,25
24	390,55	1,09	1,55	29,2	2,495	4,25
27	391,19					
30	391,64					
33	391,98					
36	392,23					
wg [7]	393,57					

Jak wykazują wyniki zamieszczone w tabelicy 1 błąd w określeniu krytycznego obciążenia dynamicznego  $p_{krd}^*$  jest proporcjonalny do błędu w wyznaczeniu krytycznego obciążenia statycznego  $p_{kr}^*$  wobec faktu, że  $t_{kr}^*$  praktycznie nie zmienia się ze zmianą  $n$  (dla  $n \geq 12$ ).

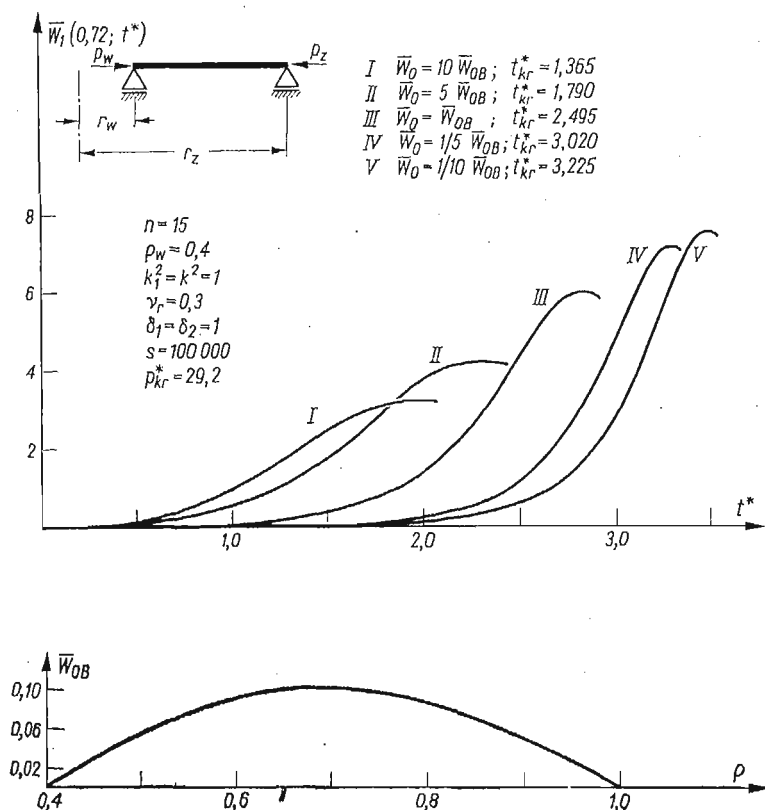
Na rysunku 4 przedstawiono, dotyczące izotropowej płyty swobodnie podparte na obu brzegach i obciążonej na brzegu wewnętrznym wykresy maksymalnego ugięcia dla różnych wartości bezwymiarowego promienia wewnętrznego. Założono, że  $\bar{w}_0/(1 - \nu_w) = \text{const}$ . Rysunek 5 pokazuje wpływ współczynnika ortotropii na zależność  $\bar{w}_1(\xi, t^*)$ . Widać, że ze wzrostem współczynnika ortotropii maleje  $t_{kr}^*$  i wartość ugięć płyty gdy  $t^* = t_{kr}^*$ , mimo wyraźnego wzrostu wartości krytycznych obciążeń statycznych. Wpływ



Rys. 4



Rys. 5



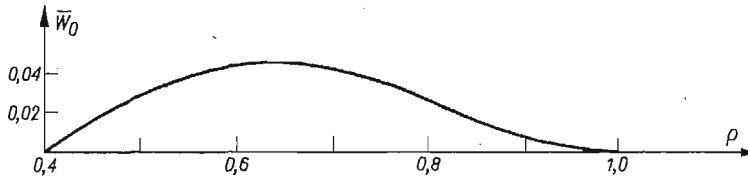
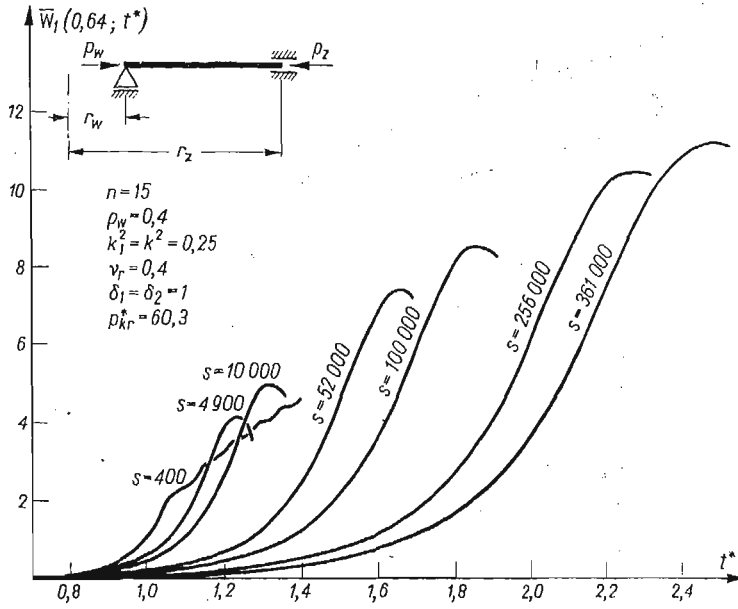
Rys. 6

wielkości wygięcia wstępnego na przebieg ugięcia przedstawia rysunek 6. Ze wzrostem ugięcia wstępnego maleje wartość krytycznego obciążenia i wartości ugięcia  $w_1(\rho, t_{kr}^*)$ .

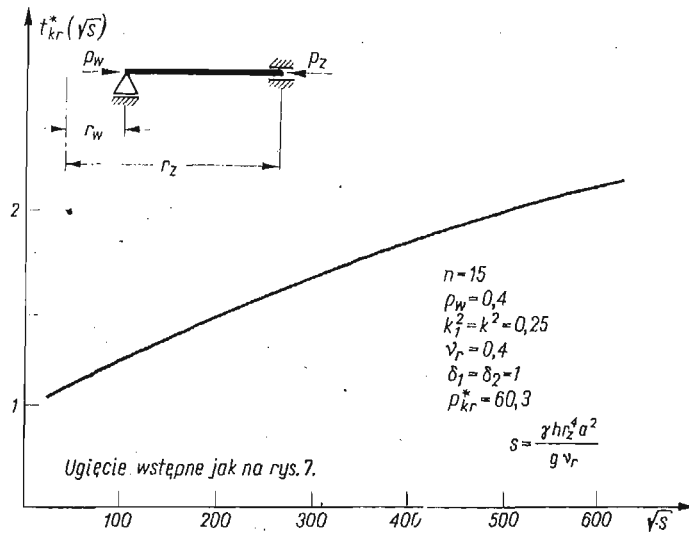
Na rysunku 7 przedstawiono wpływ stałej  $S$  na przebieg ugięcia płyty utwierdzonej wzdłuż brzegu zewnętrznego i swobodnie podpartej na brzegu wewnętrznym, obciążonej na obu brzegach jednakowo. Gdy  $S = 400$  ( $S = \frac{\gamma hr^4}{g D_r} a^2$ ), gdzie  $a$  — prędkość narastania obciążenia na brzegach, ugięcie płyty stale rośnie mimo, że druga pochodna ugięcia względem czasu zmienia znak. Wynika to z faktu, że przy małej prędkości narastania obciążenia, przebieg ugięcia jest podobny jak w zagadnieniu quasistatycznym. Widać, że ze wzrostem prędkości narastania obciążenia, rośnie  $t_{kr}^*$ , a tym samym wartość krytycznych obciążeń dynamicznych.

Tej samej płyty i ugięcia wstępnego, dotyczy rysunek 8, na którym przedstawiono zależność  $t_{kr}^*(\sqrt{s})$  (wpływ prędkości narastania obciążenia).

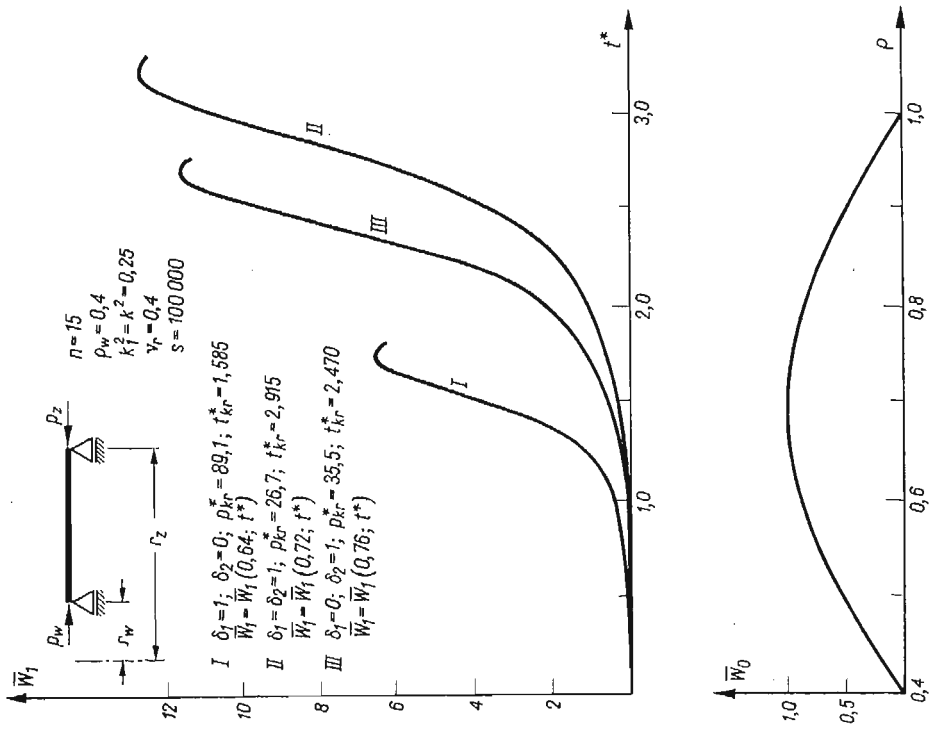
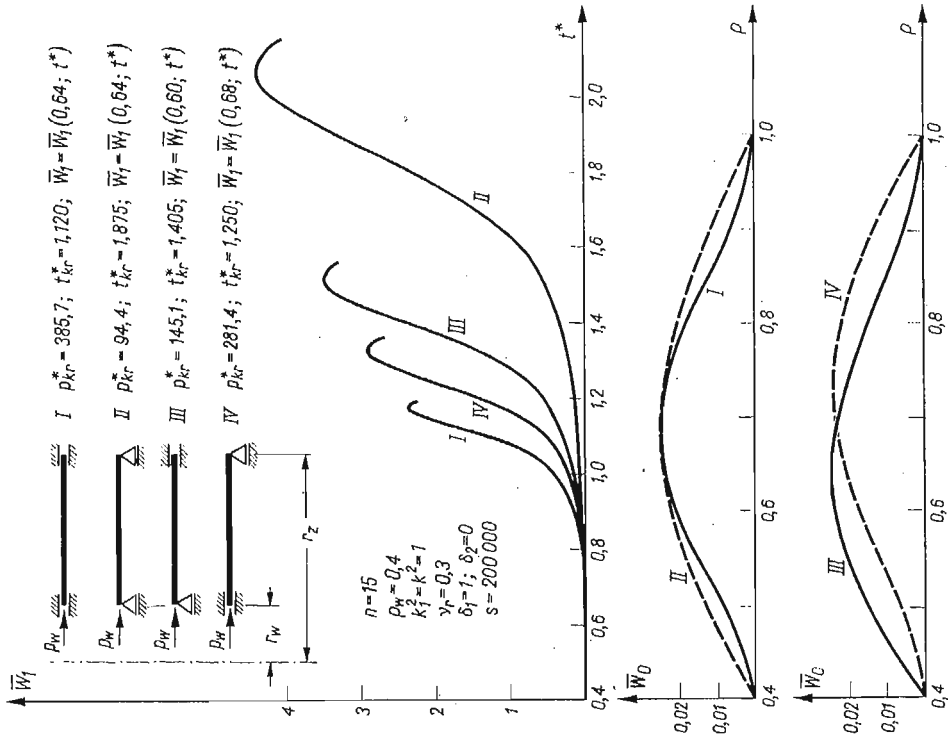
Na rysunku 9 przedstawiono wpływ sposobu podparcia na przebieg ugięcia płyty izotropowej, obciążonej na brzegu wewnętrznym przy założeniu, że we wszystkich przypadkach podparcia, ugięcie wstępne ma tę samą wartość maksymalną równą 0,024 grubości płyty.



Rys. 7



Rys. 8



Zależność przebiegu ugięcia od sposobu obciążenia płyty, przedstawiono na wykresach rysunku 10. W przedstawionym tam przypadku obciążenia siłami działającymi na brzegu zewnętrznym płyta traci stateczność przy niesymetrycznej postaci ugięcia, jednak z uwagi na istnienie osiowosymetrycznego ugięcia wstępnego i dla pełności wyników, zamieszczono na rysunku uzyskane w tym przypadku wyniki.

## 6. Wnioski

Podstawową zaletą przedstawionego rozwiązania zagadnienia jest nie nakładanie żadnych ograniczeń na rozwiązanie. Ponadto łatwo sprowadzić zagadnienie do problemu (3.8) dającego się efektywnie rozwiązać numerycznie.

Bezpośredni wpływ na czas obliczeń, oprócz liczby  $n$  ma wartość stałej  $S$ . Czas obliczeń maleje ze wzrostem  $S$ .

Z rysunku 8 wynika, że zależność  $t_{kr}^* \sqrt{S}$  jest prawie liniowa. Przedstawione rozwiązanie może być łatwo przeniesione na przypadek płyt obciążonych siłami promieniowymi zmieniającymi się nieliniowo w czasie. Można uzyskać wyniki określające naprężenia w płycie, według wzoru (3.9).

Zaletą przedstawionego rozwiązania jest fakt, że w czasie opracowywania algorytmu obliczeń, nie trzeba znać kształtu i wartości ugięcia wstępnego.

Dużą dokładność wyników uzyskiwana przy  $n \geq 12$  pozwala przypuszczać, że przedstawiona metoda może być stosowana do rozwiązania szeregu podobnych zagadnień dynamicznych.

*Dziękuję pracownikom Ośrodka Obliczeniowego przy Bielskiej Fabryce Maszyn Włókienniczych „BEFAMA” za pomoc w realizacji obliczeń na maszynie cyfrowej.*

## Literatura cytowana w tekście

1. A. S. WOLMIR, *Nieliniowa dynamika plastinok i obłoczek*, Moskwa (1972),
2. A. S. STRZELCZYK, S. WOJCIECH, *Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowych płyt pierścieniowych*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 1, 15 (1977),
3. M. KŁOSOWICZ, *Stateczność dynamiczna płyty kołowej*, Z. N. Politechniki Łódzkiej, *Mechanika* z. 45 (1976),
4. M. TROMBSKI, S. WOJCIECH, *Stateczność dynamiczna płyty pierścieniowej pod działaniem obciążeń promieniowych równomiernie rozłożonych*, Z. N. Politechniki Łódzkiej, *Mechanika*, z. 51 (1978),
5. M. TROMBSKI, J. LEYKO, *Zagadnienia dużych ugięć wiotkich płyt pierścieniowych z wygięciem wstępnym*, Z.N. Politechniki Łódzkiej, *Mechanika*, z. 33 (1973),
6. G. N. POŁOŻY, *Metody przybliżonych obliczeń*, WNT, Warszawa (1974),
7. G. K. RAMAIAH, K. VIJAYAKUMAR, *Buckling of popular orthotropic annular plates under uniform internal pressure*, *AIAA Journal* 12, 8 (1974),
8. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT Warszawa (1974).

## Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

В работе представлено полученное методом конечных разностей решение задачи устойчивости кольцевых пластинок динамически нагруженных.

Решение получено при предположении, что начальные прогибы пластинки и дополнительные прогибы вызванные нагрузкой являются поверхностями вращения. Предположено, что сжимающая, равномерно распределённая вдоль краев нагрузка действующая в срединной плоскости, растёт пропорционально времени. Исследовано влияние принятого числа точек дискретизации на точность результатов, а также влияние значения начального прогиба, способа закрепления краев и скорости нарастания нагрузки на процесс прогиба пластинок.

## Summary

## NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF DYNAMIC STABILITY OF ANNULAR PLATES

A solution obtained by the finite difference method of the annular plate dynamic stability problem has been presented. To obtain the solution it has been assumed that the preliminary plate deflection and the additional deflection due to the load are axisymmetric. The plate has been loaded by uniformly distributed, along edges, radial forces increasing linearly in time. The effect of the assumed discretisation points number on the accuracy of results as well as the effects of the magnitude of preliminary deflection the way of support and velocity of the load increase on the plate deflection have been investigated.

INSTYTUT MECHANICZNO-KONSTRUKCYJNY  
POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1978 r.*

---