

TEORIA ŚREDNIEJ GRUBOŚCI ORTOTROPOWYCH TARCZ TRÓJWARSTWOWYCH

JERZY KUJAWSKI (BIAŁYSTOK)

Trójwarstwowe dźwigary powierzchniowe z uwagi na swoje zalety znajdują coraz szersze zastosowanie w technice. Konstrukcje te z reguły charakteryzują się dużą podatnością na poprzeczne odkształcenia.

Klasyczna teoria tarcz trójwarstwowych zakładająca występowanie płaskiego stanu naprężenia może powodować dość duże błędy szczególnie w tarczach z grubym i podatnym na poprzeczne odkształcenia rdzeniem.

Teoria klasyczna może również prowadzić do dużych błędów w następujących przypadkach: analizy naprężeń w pobliżu otworów, których średnica jest nieduża w porównaniu z grubością tarczy, tarczach wirujących, obciążenia tarczy siłami powierzchniowymi, obciążenia dynamicznych itp.

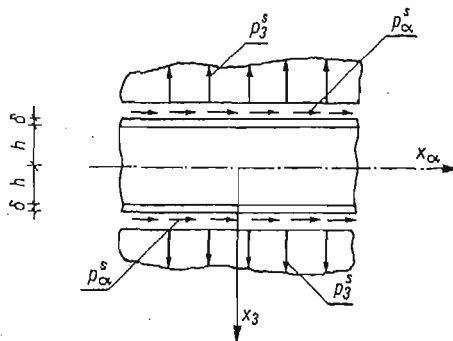
Ścisłe obliczenie warstwowych dźwigarów powierzchniowych jest bardzo skomplikowane [1 i 2]. Z tego względu istnieje kilka uściślonych metod obliczania trójwarstwowych płyt i powłok [3—5].

Natomiast dotychczas prawdopodobnie nie publikowano żadnych prac na temat uściślonego obliczania tarcz trójwarstwowych.

W niniejszej pracy podjęto próbę zbudowania uściślonej teorii ortotropowych tarcz trójwarstwowych o cienkich okładzinach. Praca stanowi uogólnienie technicznej teorii grubych ortotropowych tarcz jednorodnych [6, 7].

1. Równania podstawowe

1.1. Podstawowe związki teorii sprężystości. Rozpatrzmy w ramach liniowej teorii sprężystości tarczę trójwarstwową o jednakowych okładzinach. Zakładamy, że rdzeń i okładziny są wykonane z materiałów jednorodnych, ortotropowych i liniowo sprężystych (rys. 1).



Rys. 1

Rdzeń i okładziny są połączone bezpośrednio w sposób niepodatny.

W obszarze tarczy muszą być spełnione podstawowe związki teorii sprężystości to jest: związki Cauchy'ego

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

równania konstytutywne

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{23} &= 2A_{44} \cdot \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{31} &= 2A_{55} \cdot \varepsilon_{31}, \\ \sigma_{12} &= 2A_{66} \cdot \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

oraz równania równowagi

$$(1.3) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) oraz A_{nm} ($n = 4, 5, 6$) są współczynnikami sprężystości materiału rdzenia.

Zakładamy, że w cienkich z reguły okładzinach występuje błonowy stan naprężenia i przemieszczenia analogicznie jak w klasycznej teorii tarcz. Składowe stanu naprężenia w okładzinach mają zatem następującą postać

$$(1.4) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^f \\ \sigma_{22}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^f & B_{12}^f \\ B_{21}^f & B_{22}^f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{33} &= \sigma_{\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2 \\ \sigma_{12}^f &= 2B_{66}^f \cdot \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

tutaj $B_{\alpha\beta}^f$ i B_{66}^f są współczynnikami sprężystości dla ciała ortotropowego w płaskim stanie naprężenia (por. [5] str. 20 i [8] str. 46).

1.2. Pola przemieszczeń i naprężeń. Obciążenie tarczy stanowią siły przyłożone na jej powierzchniach zewnętrznych $x_3 = \pm(h + \delta)$

$$(1.5) \quad \sigma_{\alpha 3} = \pm p_{\alpha}^s, \quad \sigma_{33} = p_3^s,$$

oraz siły masowe

$$(1.6) \quad X_{\alpha} = X_{\alpha}(x_i), \quad X_3 = 0.$$

Zakładamy następujące pole przemieszczenia: w okładzinie dolnej

$$(1.7) \quad u_{\alpha}^f = u_{\alpha}^0, \quad u_3^f = u_3^0, \quad x_3 \in \langle h, h + \delta \rangle$$

w rdzeniu

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_{\alpha} &= u_{\alpha}^0 + u_{\alpha}^1(1 - \zeta^2), \quad u_3 = u_3^0 \zeta, \\ x_3 &\in \langle \pm h \rangle \end{aligned}$$

tutaj u_k^f ($k = 0, 1$) są nieznanymi funkcjami zmiennych x_{α} , $\zeta = x_3/h$.

Przyjęte pole przemieszczeń jest ciągłe w całym obszarze tarczy, z tym, że dla górnej okładziny $u_3^f = -u_3^0$.

Ze względu na symetrię względem płaszczyzny środkowej będziemy rozpatrywali tylko połowę tarczy $x_3 \in \langle 0, h + \delta \rangle$. Otrzymane wyniki będą słuszne dla całej tarczy.

Na podstawie (1.1), (1.2) i (1.4) pole naprężenia ma postać: w okładzinach

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^f &= B_{11}^f \cdot \varepsilon_{11}^0 + B_{12}^f \cdot \varepsilon_{22}^0, \quad \sigma_{22}^f = B_{12}^f \cdot \varepsilon_{11}^0 + B_{22}^f \cdot \varepsilon_{22}^0, \\ \sigma_{12}^f &= 2B_{66}^f \cdot \varepsilon_{12}^0, \end{aligned}$$

w rdzeniu

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} \cdot [\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{11}^1(1 - \zeta^2)] + A_{12} \cdot [\varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{22}^1(1 - \zeta^2)] + A_{13} \cdot \varepsilon_{33}^0, \\ \sigma_{22} &= A_{12} \cdot [\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{11}^1(1 - \zeta^2)] + A_{22} \cdot [\varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{22}^1(1 - \zeta^2)] + A_{23} \cdot \varepsilon_{33}^0, \\ \sigma_{12} &= A_{66} \cdot [\varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12}^1(1 - \zeta^2)], \quad \sigma_{\alpha 3} = G\tau_{\alpha} \left(-\frac{2}{h} u_{\alpha}^1 + u_{3,\alpha}^0 \right) \cdot \zeta, \end{aligned}$$

tutaj $\tau_1 = A_{55}/G$, $\tau_2 = A_{44}/G$, G jest dowolnie przyjętym porównawczym modułem sprężystości poprzecznej np. A_{66} .

Wzory (1.10) określają pole naprężenia w rdzeniu z wyjątkiem naprężenia σ_{33} . Na podstawie trzeciego równania równowagi

$$(1.11) \quad \sigma_{33} = -h \int \sigma_{\alpha 3, \alpha} d\zeta + C(x_{\alpha}),$$

stąd po podstawieniu (1.10) oraz przyjęciu, że dla $\zeta = \pm 1$ $\sigma_{33} \approx p_3^s$ otrzymujemy

$$(1.12) \quad \sigma_{33} = p_3^s - G\tau_{\alpha} \left(u_{\alpha}^1 - \frac{h}{2} u_{3,\alpha}^0 \right)_{,\alpha} (1 - \zeta^2).$$

Siły wewnętrzne w okładzinach i rdzeniu zdefiniowane są następująco

$$(1.13) \quad N_{\alpha\beta}^f = h \int_1^{1+\eta} \sigma_{\alpha\beta}^f d\zeta, \quad N_{\alpha\beta} = 2h \int_0^1 \sigma_{\alpha\beta} d\zeta$$

gdzie $\eta = \delta/h$.

Na podstawie 1.9), (1.10) i (1.13) otrzymujemy siły wewnętrzne w okładzinie

$$(1.14) \quad \begin{bmatrix} N_{11}^f \\ N_{22}^f \\ N_{12}^f \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} B_{11}^f & B_{12}^f & 0 \\ B_{21}^f & B_{22}^f & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1}^0 \\ u_{2,2}^0 \\ u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 \end{bmatrix},$$

i w rdzeniu

$$(1.15) \quad \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^s \\ u_{2,2}^s \\ u_{1,2}^s + u_{2,1}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{u_3^0}{h},$$

$u_{\alpha}^s = u_{\alpha}^0 + \frac{2}{3} u_{\alpha}^1$ są uśrednionymi po grubości rdzenia przemieszczeniami.

1.3. Układ równań różniczkowych. Pola przemieszczenia i naprężenia są opisane za pomocą pięciu funkcji u_{α}^k i u_3^0 . Funkcje te wyznaczamy spełniając w sensie całkowym równania równowagi sił poziomych oddzielnie dla rdzenia i okładziny dolnej w następującej postaci

$$(1.16) \quad h \int_0^1 (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} + X_{\alpha}) d\zeta = 0, \quad h \int_1^{1+\eta} (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} + X_{\alpha}) d\zeta = 0.$$

Z uwagi na fakt, że naprężenie σ_{33} otrzymano spełniając w sposób ścisły równanie równowagi sił pionowych w rdzeniu brakujące piąte równanie otrzymamy uśredniając całkowo trzecie równanie konstytutywne w postaci

$$(1.17) \quad \int_0^1 (\sigma_{33} - A_{3i} \cdot \varepsilon_{il}) d\zeta = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jeśli podstawimy do (1.17) związki (1.8) i (1.12) to otrzymamy

$$(1.18) \quad A_{3\alpha} \left(u_\alpha^0 + \frac{2}{3} u_\alpha^1 \right)_{,\alpha} + A_{33} \frac{u_3^0}{h} + \frac{2}{3} G \tau_\alpha \left(u_\alpha^1 - \frac{h}{2} w_{,\alpha} \right) = p_3^s.$$

$$\begin{aligned} & \text{Z równań (1.16)}_2 \text{ po podstawieniu (1.9) i uwzględnieniu zależności } h \int_1^{1+\eta} \sigma_{\alpha 3, 3} d\zeta = \\ & = p_\alpha^s - G \tau_\alpha \left(-\frac{2}{h} u_\alpha^1 + u_{3,\alpha}^0 \right) \end{aligned}$$

wyznaczamy

$$(1.19) \quad \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = -\frac{h\delta}{2G} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} (B_{11}^f \partial_1^2 + B_{66}^f \partial_2^2), & \frac{1}{\tau_1} (B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2 \\ \frac{1}{\tau_2} (B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2, & \frac{1}{\tau_2} (B_{66}^f \partial_1^2 + B_{22}^f \partial_2^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} + \\ + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} u_3^0 - \frac{h}{2G} \begin{bmatrix} \frac{p_1^s}{\tau_1} \\ \frac{p_2^s}{\tau_2} \end{bmatrix}.$$

Na podstawie (1.10), (1.16)₁ i (1.18) po uwzględnieniu (1.19) dochodzimy do układu równań różniczkowych:

$$(1.20) \quad L_{ij} u_j^0 = f_i,$$

w którym

$$\begin{aligned} L_{11} = & -\frac{\eta h^3}{3G} \left\{ \frac{1}{\tau_1} A_{11} B_{11} \partial_1^4 + \left[\frac{1}{\tau_1} (A_{11} B_{66} + A_{66} B_{11}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\tau_2} (A_{12} + A_{66}) (B_{12} + B_{66}) \right] \partial_1^2 \partial_2^2 + \frac{1}{\tau_2} A_{66} B_{66} \partial_2^4 \right\} + \\ & + h(A_{11} + \eta B_{11}) \partial_1^2 + h(A_{66} + \eta B_{66}) \partial_2^2, \\ L_{12} = & -h \delta_{12}^2 \left\{ (B_{12} + B_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G \tau_1} (A_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2) - \eta \right] + \right. \\ & \left. + (A_{12} + A_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G \tau_2} (B_{66} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2) - 1 \right] \right\}, \\ L_{13} = & \frac{h^2}{3} \partial_1 [A_{11} \partial_1^2 + (A_{12} + 2A_{66}) \partial_2^2] + A_{13} \partial_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -p_1^s + \frac{h^2}{3G\tau_1} (A_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2) p_1^s + \frac{h^2}{3G\tau_2} (A_{12} + A_{66}) \partial_{12}^2 p_1^s - h(X_1 + \eta X_1^f), \\
L_{21} &= -h \partial_{12}^2 \left\{ (A_{12} + A_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G\tau_1} (B_{11} \partial_1^2 + B_{66} \partial_2^2) - 1 \right] + \right. \\
&\quad \left. + (B_{12} + B_{66}) \left[\frac{\eta h^2}{3G\tau_2} (A_{66} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2) - \eta \right] \right\}, \\
L_{22} &= -\frac{\eta h^3}{3G} \left\{ \frac{1}{\tau_2} A_{66} B_{66} \partial_1^4 + \left[\frac{1}{\tau_1} (A_{12} + A_{66}) (B_{12} + B_{66}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\tau_2} (A_{66} B_{22} + A_{22} B_{66}) \right] \partial_1^2 \partial_2^2 + \frac{1}{\tau_2} A_{22} B_{22} \partial_2^4 \right\} + h(A_{66} + \\
&\quad + \eta B_{66}) \partial_1^2 + h(A_{22} + \eta B_{22}) \partial_2^2, \\
L_{23} &= \frac{h^2}{3} \partial_2 [(A_{12} + 2A_{66}) \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2] + A_{23} \partial_2, \\
f_2 &= -p_2^s + \frac{h^2}{3G\tau_2} (A_{66} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2) p_2^s + \frac{h^2}{3G\tau_1} (A_{12} + A_{66}) \partial_{12}^2 p_1^s - h(X_2 + \eta X_2^f), \\
L_{31} &= \frac{\eta h^2}{2} \cdot \partial_1 \left[\left(1 + \frac{A_{13}}{G\tau_1} \right) (B_{11} \partial_1^2 + B_{66} \partial_2^2) + \right. \\
&\quad \left. + (B_{12} + B_{66}) \left(1 + \frac{A_{32}}{G\tau_2} \right) \partial_2^2 \right] - \frac{3}{2} A_{13} \partial_2, \\
L_{32} &= + \frac{\eta h^2}{2} \partial_2 \left[\left(1 + \frac{A_{32}}{G\tau_2} \right) (B_{66} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2) + \right. \\
&\quad \left. + (B_{12} + B_{66}) \left(1 + \frac{A_{31}}{G\tau_1} \right) \partial_1^2 \right] - \frac{3}{2} A_{23} \partial_2, \\
L_{33} &= -\frac{h}{2} \left(A_{31} \partial_1^2 + A_{32} \partial_2^2 + \frac{3}{h^2} A_{33} \right), \\
f_3 &= -\frac{3}{2} p_3^s + \frac{1}{2} h \left[\left(1 + \frac{A_{13}}{G\tau_1} \right) \partial_1 p_1^s + \left(1 + \frac{A_{23}}{G\tau_2} \right) \partial_2 p_2^s \right],
\end{aligned}$$

Równania (1.20) są uwikłanym układem różniczkowych równań cząstkowych łącznie dziesiątego rzędu. Rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć numerycznie np. metodą różnic skończonych.

1.4. Warunki brzegowe. Warunki brzegowe wyprowadzimy korzystając ze znanego w rachunku wariacyjnym pojęcia naturalnych warunków granicznych.

Stąd otrzymujemy następujący związek na pobocznicę walca ograniczającej tarczę

$$(1.22) \quad \delta \left[\iint_F (\sigma_{nn} u_n + \sigma_{ns} u_s + \sigma_{n3} u_3) dx_3 ds \right] = 0,$$

tutaj δ oznacza wariację całki powierzchniowej.

Po podstawieniu (1.7) i (1.8) do (1.22) i wykonaniu całkowania po grubości tarczy mamy

$$(1.23) \quad \int_s \left[\left(\eta \sigma_{nn}^f + \sigma_{nn}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{nn}^1 \right) \delta u_n^0 + \frac{2}{3} \left(\sigma_{nn}^0 + \frac{4}{5} \sigma_{nn}^1 \right) \delta u_n^1 + \right. \\ \left. + \left(\eta \sigma_{ns}^f + \sigma_{ns}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{ns}^1 \right) \delta u_s^0 + \frac{2}{3} \left(\sigma_{ns}^0 + \frac{4}{5} \sigma_{ns}^1 \right) \delta u_s^1 + \frac{1}{3} x^r \delta u_3^0 \right] ds = 0,$$

gdzie

$$X^r = G \tau_\alpha \left(-\frac{2}{h} u_\alpha^1 + u_{3,\alpha}^0 \right).$$

Stąd otrzymujemy następujące jednorodne warunki brzegowe: statyczne

$$(1.24) \quad \eta \sigma_{nn}^f + \sigma_{nn}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{nn}^1 = 0, \quad \sigma_{nn}^0 + \frac{1}{5} \sigma_{nn}^1 = 0, \\ \eta \sigma_{ns}^f + \sigma_{ns}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{ns}^1 = 0, \quad \sigma_{ns}^0 + \frac{4}{5} \sigma_{ns}^1 = 0, \\ X^r = 0.$$

i geometryczne

$$(1.25) \quad u_n^0 = 0, \quad u_n^1 = 0, \quad u_s^0 = 0, \quad u_s^1 = 0, \quad u_3^0 = 0,$$

gdzie składowe stanu naprężenia σ^f i σ^k ($k = 0, 1$) są określone przez wzory (1.9) i (1.10).

Wynikowy układ równań różniczkowych dla tarczy trójwarstwowej jest łącznie dziesiątego rzędu. Pozwala to spełnić po pięć warunków brzegowych na pobocznicę walca ograniczającej tarczę. W warunkach brzegowych może więc występować w różnych kombinacjach pięć wielkości geometrycznych i statycznych spośród (1.24) i (1.25).

Poza wymienionymi mogą występować jeszcze inne kombinacje warunków brzegowych. Gdy mamy różne warunki brzegowe w obszarze rdzenia i okładzin wtedy spełniamy całkowo warunki brzegowe oddzielnie dla rdzenia i okładzin. W tym przypadku na pobocznicę walca ograniczającej tarczę może występować w różnych kombinacjach pięć wielkości geometrycznych

$$(1.26) \quad u_n^0, \quad u_n^0 + \frac{2}{3} u_n^1, \quad u_s^0, \quad u_s^0 + \frac{2}{3} u_s^1, \quad u_3^0$$

i pięć statycznych

$$(1.27) \quad \sigma_{nn}^f, \quad \sigma_{nn}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{nn}^1, \quad \sigma_{ns}^f, \quad \sigma_{ns}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{ns}^1, \quad X^r.$$

Przy jednorodnych warunkach brzegowych związki (1.26) są identyczne z (1.27). Pewne różnice występują w statycznych warunkach brzegowych. Na podstawie (1.27) mamy

$$(1.28) \quad \sigma^0 + \frac{4}{5} \sigma^1 = \sigma^0 + 0,8 \sigma^1 = 0,$$

natomiast związki (1.27) prowadzą do zależności

$$\sigma^0 + \frac{4}{6} \sigma^1 = \sigma^0 + 0,66 [6] \sigma^1 = 0.$$

Ze względu na antysymetryczny charakter przemieszczenia u_3 i naprężeń $\sigma_{\alpha 3}$ zachodzą związki

$$(1.29) \quad \int_{-(h+\delta)}^{h+\delta} u_3 dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} dx_3 = 0.$$

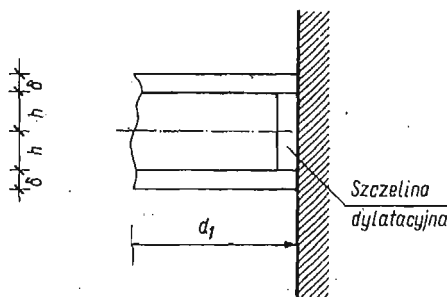
Wymienimy kilka kombinacji warunków brzegowych jakie mogą wystąpić w tarczy trójwarstwowej wzdłuż brzegu $x_1 = \alpha$.

Jeśli tarcza wzdłuż brzegu jest całkowicie utwierdzona wtedy mamy

$$(1.30) \quad u_1^0 = 0, \quad u_1^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_2^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

W tym przypadku warunki brzegowe są ściśle spełnione, gdyż żaden z punktów leżących na poboczniczy walca ograniczającej tarczę nie przemieszcza się.

W tarczy trójwarstwowej może wystąpić jeszcze inny rodzaj utwierdzenia. Utwierdzone mogą być tylko okładziny tarczy, a rdzeń może mieć jednorodne statyczne warunki brzegowe rys. 2.



Rys. 2

Jest to przykład nieciągłych warunków brzegowych w przekroju poprzecznym tarczy. Na podstawie (1.26) i (1.27) mamy

$$(1.31) \quad u_1^0 = 0, \quad \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{11}^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad \sigma_{12}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{12}^1 = 0, \\ u_3^0 = 0.$$

W tym przypadku są ściśle spełnione warunki brzegowe w okładzinach, natomiast w rdzeniu w ten sposób, iż wypadkowe naprężeń brzegowych są równe zeru.

$$N_{11} = 2h \left(\sigma_{11}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{11}^1 \right) = 0, \quad N_{12} = 2h \left(\sigma_{12}^0 + \frac{2}{3} \sigma_{12}^1 \right) = 0,$$

Pozostały warunek dotyczący zerowania się naprężeń σ_{13} jest spełniony w postaci (1.29)₂.

Jeśli wzdłuż nieobciążonego i swobodnego brzegu znajduje się nieskończenie sztywna w swojej płaszczyźnie, i doskonale wiotka z płaszczyzny przepona brzeg spełniająca warunki antysymetrii to korzystając z (1.24) i (1.25) otrzymujemy

$$(1.32) \quad \eta\sigma_{11}^f + \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{11}^1 = 0, \quad \sigma_{11}^0 + \frac{4}{5}\sigma_{11}^1 = 0, \\ u_2^0 = 0, \quad u_2^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

Przedstawione przykłady dotyczą jednorodnych warunków brzegowych.

Gdy na całkowicie utwierdzonym brzegu działa siła ściskająca N wtedy mamy

$$(1.33) \quad \eta\sigma_{11}^f + \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{11}^1 = -\frac{N}{2h}, \quad u_1^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \\ u_2^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

Jeśli brzeg utwierdzony jak na rys. 2 jest ściskany siłą N warunki brzegowe mają postać

$$(1.34) \quad N_{11}^f = \delta\sigma_{11}^f = -\frac{1}{2}N, \quad \sigma_{11}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{11}^1 = 0, \quad u_2^0 = 0, \\ \sigma_{12}^0 + \frac{2}{3}\sigma_{12}^1 = 0, \quad u_3^0 = 0.$$

2. Uproszczenie teorii

Można wykazać, że w tarczach trójwarstwowych, w których rdzeń ma kilkakrotnie mniejsze stałe sprężystości niż okładziny, wpływ przemieszczenia u_3^0 na naprężenia $\sigma_{\alpha 3}$ jest znikomy. Po jego pominięciu mamy

$$(2.1) \quad \sigma_{\alpha 3} \approx -\frac{2G\tau_\alpha}{h}u_{\alpha\zeta}^1.$$

Konsekwencją założenia (2.1) przemieszczenia u_α^1 , naprężenia σ_{33} i układ równań (1.20) upraszczają się do postaci

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = -\frac{h\delta}{2G} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1}(B_{11}^f \partial_1^2 + B_{66}^f \partial_2^2), & \frac{1}{\tau_1}(B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2 \\ \frac{1}{\tau_2}(B_{12}^f + B_{66}^f) \partial_{12}^2, & \frac{1}{\tau_2}(B_{66}^f \partial_1^2 + B_{22}^f \partial_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} - \\ - \frac{h}{2G} \begin{bmatrix} p_1^s \\ \tau_1 \\ p_2^s \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

$$(2.3) \quad \sigma_{33} = p_3^s - G\tau_\alpha u_{\alpha,\alpha}^1 (1 - \zeta^2),$$

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & A_{13} \partial_1 \\ L_{21} & L_{22} & A_{23} \partial_2 \\ L_{31} & L_{32} & -\frac{3}{2} \frac{A_{33}}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Z równania (2.4)₃ wyznaczamy

$$(2.5) \quad u_3^0 = \frac{2}{3} \frac{h}{A_{33}} (L_{3\alpha} \cdot u_\alpha^0 - f_3).$$

Jeśli podstawimy (2.5) do pozostałych równań (2.4) to otrzymamy następujący układ równań różniczkowych

$$(2.6) \quad L_{\alpha\beta}^i u_\beta^0 = f_\alpha',$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} L'_{11} &= L_{11} + \frac{2}{3} h \frac{A_{13}}{A_{33}} \partial_1 L_{31}, & L'_{12} &= L_{12} + \frac{2}{3} h \frac{A_{13}}{A_{33}} \partial_1 L_{32}, \\ L'_{21} &= L_{21} + \frac{2}{3} h \frac{A_{23}}{A_{33}} \partial_2 L_{31}, & L'_{22} &= L_{22} + \frac{2}{3} h \frac{A_{23}}{A_{33}} \partial_2 L_{32}, \\ f'_1 &= f_1 + \frac{2}{3} h \frac{A_{13}}{A_{33}} \partial_1 f_3, & f'_2 &= f_2 + \frac{2}{3} h \frac{A_{23}}{A_{33}} \partial_2 f_3. \end{aligned}$$

Układ równań (2.6) jest łącznie ósmego stopnia i zawiera tylko dwie niewiadome u_α^0 co znacznie ułatwia jego rozwiązanie.

Z uwagi na wysoki rząd układu równań (2.6) oraz złożoną budowę operatorów różniczkowych (2.7) rozwiązanie analityczne może nastęrczać duże trudności. Z tego względu rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć numerycznie.

3. Przykład

Sposób korzystania z wyprowadzonych związków do uściślonej analizy tarcz trójwarstwowych zilustrujemy następującym przykładem. Rozpatrzmy trójwarstwowe pasmo tarczowe rozciągane siłami N . Na brzegach tarczy znajdują się przepony, które nie pozwalają na przemieszczenia punktów brzegowych w kierunku grubości tarczy. Zadanie rozwiążemy dla tarczy, w której rdzeń i okładziny są wykonane z materiałów izotropowych.

Zastosujmy teorię uproszczoną co pozwoli w łatwy sposób otrzymać ogólne wzory.

Jest to przypadek płaskiego stanu odkształcenia $\varepsilon_{22} = 0$. Równania różniczkowe teorii uproszczonej do wyznaczenia niewiadomych geometrycznych mają postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u^1 &= -\frac{\eta m h^2}{1-\nu} \frac{d^2 u^0}{dx^2}, & w &= \frac{2}{3} \frac{h}{1-\nu} \left[\frac{\eta m h^2}{2(1-\nu)} \frac{d^3 u^0}{dx^3} - \frac{3}{2} \nu \frac{du^0}{dx} \right], \\ & -\frac{1}{3} \eta m h^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{d^4 u^0}{dx^4} + (1+\eta m) \frac{d^2 u^0}{dx^2} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$m = \frac{1-\nu^2}{1-\nu_f^2} \frac{E^f}{E}$, E i ν oznaczają moduł sprężystości podłużnej i liczbę Poissona rdzenia a E^f i ν_f te same stałe dla okładzin, $u^0 = u_1^0$, $w = u_3^0$, $x = x_1$.

Rozwiązaniem równania różniczkowego są funkcje

$$(3.2) \quad u^0 = C_1 + C_2 \xi + C_3 \text{Sh } k\xi + C_4 \text{Ch } k\xi,$$

tutaj

$$k = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{3(1-\nu)}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{\eta m}\right)}, \quad \xi = x/a.$$

Z uwagi na antysymetrię funkcji u^0 względem środka tarczy $C_1 = C_4 = 0$.
Stałe całkowania C_2 i C_3 wyznaczamy z następujących warunków brzegowych:

$$(3.3) \quad \text{dla } x = a \quad \begin{aligned} N_{11} &= 2h \frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dx} \left[(1+\eta m)u^0 + \frac{2}{3}u^1 \right] = N, \\ w &= \frac{2}{3} \frac{h}{1-\nu} \left[\frac{\eta m h^2}{2(1-\nu)} \frac{d^3 u^0}{dx^3} - \frac{3}{2} \nu \frac{du^0}{dx} \right] = 0. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$(3.4) \quad C_2 = \frac{1}{2} \frac{N}{S} a, \quad C_3 = -\frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{a}{\kappa k \text{Ch} k},$$

Symbolami S i κ oznaczono wielkości

$$S = \frac{hE}{1-\nu^2} (1+\eta m), \quad \kappa = 1 - \frac{1}{\nu(2-\nu)} (1+\eta m),$$

gdzie $2S$ jest sztywnością tarczową rozważanego pasma występującą w teorii klasycznej (por. [5] str. 122).

Pola przemieszczeń i naprężeń określają związki:
w okładzinie dolnej

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{N}{S} a \left(\xi - \frac{1}{\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k} \right), & w &= -\frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{\nu h}{1-\nu} \left(1 - \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k} \right), \\ \sigma_{11}^f &= \frac{1}{2} \frac{Nm}{h(1+\eta m)} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k} \right), \end{aligned}$$

w rdzeniu

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{N}{S} a \left[\xi - \frac{1}{\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k} \left(1 - \eta m \frac{h^2}{a^2} k^2 (1-\xi^2) \right) \right], \\ w &= -\frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{\nu h}{1-\nu} \left(1 - \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k} \right) \zeta, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m} \beta(\xi, \zeta), \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{4} (1-\xi^2) \frac{Nh}{a^2} \frac{\eta m}{1+\eta m} \frac{k^2}{\kappa} \frac{\text{Ch} k \xi}{\text{Ch} k},$$

$$\sigma_{13} = -\frac{1}{2} \frac{N}{a} \frac{\eta m}{1+\eta m} \frac{k}{\kappa} \zeta \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k a},$$

$$\beta(\xi, \zeta) = 1 - \left[1 + \frac{\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)} (1+\eta m) \left(1 - 3 \frac{(1-\nu)^2}{\nu} (1-\xi^2) \right) \right] \frac{\text{Ch} k \xi}{\kappa \text{Ch} k}$$

Tutaj $\frac{1}{2} \frac{Nm}{h(1+\eta m)} = \sigma_{11}^*$ i $\frac{1}{2} \frac{N}{h(1+\eta m)} = \sigma_{11}^*$ są naprężeniami w okładzinie i rdzeniu otrzymanymi z teorii klasycznej.

Łatwo zauważyć, że różnica między rozwiązaniem klasycznym, a uściślonym jest duża dla małych wartości współczynnika k . Współczynnik ten maleje wraz ze wzrostem h/a , ηm i liczby Poissona ν . Dla dużych wartości k występują tylko zaburzenia brzegowe.

Jak wynika z powyższych związków na brzegu tarczy mogą występować duże różnice między klasycznymi naprężeniami σ_{11}^* i σ_{11}^{f*} a uściślonymi. Fakt ten wskazuje na dużą koncentrację naprężeń w otoczeniu brzegu z żeberkiem usztywniającym lub brzegu utwierdzonego. Z uwagi na całkowite spełnienie warunków brzegowych naprężenia σ_{11} na brzegu mogą być obarczone dużymi błędami z tego względu nie będziemy ich badać. W odległości $2h$ od brzegu różnice między naprężeniami klasycznymi a uściślonymi są niewielkie.

Przeprowadzimy zatem analizę wielkości naprężeń σ_{13} i σ_{33} :

$$\zeta = 1 \quad \sigma_{13} = -\frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m} \lambda_1(\xi),$$

$$\text{dla} \quad \zeta = 0 \quad \sigma_{33} = -\frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m} \lambda_2(\xi),$$

gdzie $\lambda_1(\xi) = \frac{\eta m}{\kappa} \frac{h}{a} k \frac{\text{Sh}k\xi}{\text{Ch}k}$, $\lambda_2(\xi) = \frac{\eta m}{2\kappa} \left(\frac{h}{a}\right)^2 k^2 \frac{\text{Ch}k\xi}{\text{Ch}k}$.

Wyrażenie $\frac{1}{2} \frac{N}{h} \frac{1}{1+\eta m}$ oznacza naprężenie σ_{11}^* . Funkcje $\lambda_1(\xi)$ i $\lambda_2(\xi)$ przedstawiają stosunek naprężeń σ_{13} i σ_{33} do naprężenia σ_{11}^* w rdzeniu obliczonego na podstawie teorii klasycznej.

W tabelicy 1 zestawiono wartości funkcji $\lambda_1(1) = \sigma_{13}(1)/\sigma_{11}^*$ i $\lambda_2(1) = \sigma_{33}(1)/\sigma_{11}^*$ dla tarcz o $\eta = \delta/h = 0,10$ w zależności od wartości ν i m .

Tablica 1

$m = \frac{E^f}{E} \frac{1-\nu^2}{1-\nu_f^2}$		10	100	1000	∞
$\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}^*}$	$\nu = 0,25$	0,4490	0,4926	0,4957	0,4861
	$\nu = 0,45$	0,7813	0,7326	0,7210	0,7196
$\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{11}^*}$	$\nu = 0,25$	0,3600	0,2929	0,2824	0,2813
	$\nu = 0,45$	0,5700	0,3964	0,3738	0,3712

Analiza zestawionych w tabelicy współczynników wskazuje na występowanie dość dużych naprężeń σ_{13} i σ_{33} w otoczeniu brzegu tarczy. Na przykład dla $\nu = 0,25$ i $m = 100$ $\sigma_{13} = 0,49 \sigma_{11}^*$ a $\sigma_{33} = 0,29 \sigma_{11}^*$. Naprężenia te rosną ze wzrostem liczby Poissona rdzenia.

Z uwagi na dość duże różnice między teorią klasyczną a uściśloną analiza koncentracji naprężeń w otoczeniu brzegu powinna być przeprowadzona za pomocą teorii ogólnej układu równań (1.20). Pozwoli to dokładnie spełnić warunki brzegowe. W rozważanym

przypadku trzeci warunek brzegowy ma postać

$$(3.7) \quad \sigma_{11} = Ku_1^1,$$

gdzie K jest współczynnikiem sprężystości żeberka brzegowego.

Jeśli $K = \infty$ to $u_1^1 = 0$ i mamy krawędź całkowicie utwierdzoną.

4. Ocena zbieżności rozwiązania

Ścisłe ustalenie zbieżności rozwiązania dla tarczy trójwarstwowej nastęrcza duże trudności. Z tego względu oceny dokonamy w sposób przybliżony. Przyjmujemy, że błonowe równania równowagi są dostatecznie dokładne dla cienkich z reguły okładzin. Pozostaje zatem ocena zbieżności rozwiązania w rdzeniu. Równanie równowagi sił pionowych dla przyjętych założeń jest ściśle spełnione (1.11). Równania równowagi sił poziomych są uśrednione całkowo co w pewnych przypadkach może spowodować dość duże błędy.

Równanie równowagi sił poziomych w płaskim stanie odkształcenia ma postać

$$(4.1) \quad \sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0,$$

stąd

$$(4.2) \quad \sigma_{13} = - \int \sigma_{11,1} dx_3.$$

Jeśli do równania (4.2) podstawimy naprężenia σ_{11} określone związkem (3.6)₃ to otrzymamy

$$(4.3) \quad \sigma'_{13} = \frac{1}{2} \frac{N}{1+\eta m} \zeta \left[1 + \frac{\nu(1+\eta m)}{(2-\nu)(1-2\nu)} \left(1 - 3 \frac{(1-\nu)^2}{\nu} \left(1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \right) \frac{k}{a\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k} \right]$$

Jest to naprężenie jakie powinno towarzyszyć naprężeniom σ_{11} przy ścisłym spełnieniu równania równowagi sił poziomych w rdzeniu.

W wykonanym przykładzie mamy

$$(4.4) \quad \sigma_{13} = - \frac{1}{2} \frac{N}{a} \frac{\eta m}{1+\eta m} \frac{k}{\kappa} \zeta \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k}.$$

Różnica między naprężeniami wynosi

$$(4.5) \quad \Delta \sigma_{13} = \sigma'_{13} - \sigma_{13} = - \frac{1}{4} N \left[1 + \frac{\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)} \right] \frac{k}{a\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k} (1 - \zeta^2) \zeta.$$

Wypadkowa $\Delta \sigma_{13}$ działająca na połowę tarczy wynosi

$$(4.6) \quad h \int_0^1 \Delta \sigma_{13} d\zeta = - \frac{1}{16} N \frac{h}{a} \vartheta \frac{k}{\kappa} \frac{\text{Sh} k \xi}{\text{Ch} k},$$

gdzie

$$\vartheta = 1 + \frac{\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)}.$$

Stosunek wypadkowej (4.6) do analogicznej wypadkowej naprężenia (4.4) wynosi

$$(4.7) \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{4} \vartheta \frac{1+\eta m}{\eta m}.$$

W tarczach o $\nu = 0,25$ i $\nu = 0,45$ odpowiednio mamy

$$(4.8) \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 0,2733 \frac{1 + \eta m}{\eta m}, \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 0,9758 \frac{1 + \eta m}{\eta m}.$$

Jeśli $\eta = 0,10$ i $m = 10$ to wypadkowe naprężeń σ_{13} są mniejsze od σ'_{13} o $\varepsilon_1 = 100\% \cdot \Delta Q/Q = 30,06\%$ dla $\nu = 0,25$ i $\varepsilon_2 = 88,70\%$ dla $\nu = 0,45$.

Stąd wynika, że zbieżność rozwiązania jest dobra w tarczach o małej wartości ν i dużej wartości ηm .

5. Uwagi końcowe

W pracy wprowadzono równania uściślonej teorii ortotropowych tarcz trójwarstwowych, poddanych działaniu sił powierzchniowych o wszystkich trzech składowych i sił masowych.

Założono, że w rdzeniu tarczy są pełne tensory stanów naprężenia i odkształcenia, a w cienkich z reguły okładzinach występuje błonowy stan naprężenia i przemieszczenia.

Zadanie rozwiązano w przemieszczeniach, zakładając ciągłe pole przemieszczeń w całym obszarze tarczy.

W rezultacie otrzymano uwikłany układ trzech równań różniczkowych cząstkowych łącznie dziesiątego rzędu do wyznaczenia trzech wielkości geometrycznych u_i^0 ($i = 1, 2, 3$) stanowiących przemieszczenia okładziny tarczy.

Rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć sposobem numerycznym na przykład metodą różnic skończonych.

Z uwagi na przyjęte założenia kinematyczne wielkości antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej zmieniają się liniowo po grubości rdzenia. Fakt ten ogranicza zastosowanie teorii do tarcz o średniej grubości $h/a \leq 1/4$ i z rdzeniem o mniejszej nośności od okładzin $\eta E^f/E > 1$.

Wykonany przykład wskazuje, że w otoczeniu obciążonego brzegu utwierdzonego lub z żeberkiem usztywniającym może występować dość duża koncentracja naprężeń. Ma to istotne znaczenie gdyż w tarczach trójwarstwowych prawie zawsze występują kręwdziowe żeberka usztywniające.

Różnice między rozwiązaniem klasycznym, a uściślonym rosną ze wzrostem grubości, liczby Poissona, oraz podatności rdzenia tarczy.

Literatura cytowana w tekście

1. А. П. Мелконян, *Изгиб трехслойной толстой плиты*, Изв. Акад. Наук Армянской С.С.Р нр. 2/1959.
2. А. П. Мелконян, *Об изгибе двухслойной толстой плиты*, Изв. Акад. Наук Армянской С.С.Р нр. 5/1962.
3. А. Я. Александров, Л. Е. Брюккер, Л. М. Куршин, А. П. Прусаков, *Расчет трехслойных панелей*. Оборонгиз, Москва, 1960.
4. F. J. PLANTEMA, *Sandwich Construction. The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates, and Shells*, New York, London, Sydney 1966.

5. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
6. J. KUJAWSKI, *Obrotowo symetryczny stan naprężenia w grubych tarczach o ortotropii cylindrycznej*, Rozprawy Inżynierskie Nr. 3/1975.
7. J. KUJAWSKI, *Techniczna teoria grubych tarcz ortotropowych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Nr 2/1977.
8. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Теория анизотропных пластин*, Наука Москва 1967.

Р е з ю м е

ТЕОРИЯ ОРТОТРОПНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛИТ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

В работе выведены уравнения уточненной теории ортотропных трехслойных плит подверженных действию поверхностных сил о всех трех компонентах и массовых сил. Принимается, что в сердцевине плиты возникает состояние напряжения и деформации отвечающее полным матрицам соответствующих тензоров — с другой стороны, как правило, в ограничивающих слоях имеется мембранное состояние напряжения и деформации как в классической теории плит.

Задача решена в перемещениях при предположении непрерывного поля перемещений в целой области плиты. В результате получено нелинейную систему трех дифференциальных уравнений совместно десятого порядка для определения трех геометрических величин являющихся перемещениями в ограничивающих слоях. Работа проиллюстрирована примером, из которого вытекает существование сравнительно большой концентрации напряжений в окрестности нагруженного берега.

Summary

THEORY OF STRETCHING ORTHOTROPIC SANDWICH PLATES
WITH MODERATE THICKNESS

The paper presents an improved method of calculation of orthotropic sandwich plates with moderate thickness. The loadings of the plate consist of surface forces with all three components acting symmetrically with respect to the middle plane and body forces. It has been assumed that full tensors of stresses and strains are in a core of plate and in usually thin faces of plates, the membrane stresses and strains are similar to those of the classical theory.

The problem is solved in displacements assuming a continuous field of displacements in the whole plate's region. The obtained system of three differential equations of tenth order allows to determine the three unknown displacements of the face of the plate. In the given example we show the stress concentration near the loaded boundary.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1977 r.