

O PŁASKIM QUASI-STATYCZNYM ZAGADNIENIU TERMODYFUZJI DLA SPRĘŻYSTEGO
WALCA KOŁOWEGO

KRZYSZTOF GRYSA, RYSZARD SZCZEPAŃSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

Obróbka powierzchniowa części maszyn jest jednym z ważniejszych problemów współczesnego przemysłu. Jednym z rodzajów obróbki powierzchniowej jest wprowadzenie w cienką, zlokalizowaną przy samej powierzchni obrabianej części, warstwę pewnego czynnika, mającego nadać tej części określone wymogami technologicznymi i eksploatacyjnymi cechy. Jako przykład można tu przytoczyć proces azotowania, nawęglania czy cyjanowania powierzchni metalowych. Zjawisko to jest niczym innym jak pewnym procesem dyfuzji jednego ośrodka w drugi, przy czym podkreślić należy, że w warunkach rzeczywistych proces ten przebiega przy jednoczesnym poddaniu obrabianej części działaniu tak pola temperatury jak i pola sił.

W pracy niniejszej zajmiemy się próbą opisu wpływu procesu dyfuzji na naprężenia w nieskończenie długim walcu kołowym. Uwzględnimy przy tym wpływ pola temperatury na przebieg dyfuzji i na odwrót. Ponadto wyznaczymy koncentrację czynnika dyfundującego w ośrodek sprężysty jako funkcję czasu i zmiennych przestrzennych.

Założenia pracy są następujące:

- pobocznica walca jest wolna od obciążeń;
- temperatura pobocznic walca jest funkcją kąta opasania φ (geometria rozważanego walca narzuca prowadzenie obliczeń w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z) i czasu. Założenie to ma na celu uwzględnienie zarówno ruchów konwekcyjnych i w efekcie różnych od zera gradientów temperatury w płynie, do którego walec zostaje zanurzony w chwili $t = 0+$, jak i ewentualne stygnięcie tego płynu (założono tu eksponencjalne malenie temperatury w czasie);
- potencjał chemiczny ma na brzegu walca stałą, niezależną od czasu ani zmiennych przestrzennych wartość dla $t > 0$. Założenie to wynika w sposób dosyć oczywisty z faktu, iż ilość cząstek ośrodka dyfundującego, które wnikają do walca, wyraża się — biorąc pod uwagę np. mol ośrodka sprężystego — liczbą o kilkanaście rzędów wielkości niższą od liczby Avogadro, zatem nie mogą one w sposób widoczny zmienić potencjału chemicznego tego ośrodka. Można wprawdzie wpływać na zmianę potencjału chemicznego w wyniku oddziaływań np. elektrycznych, lecz tego przypadku nie bierzemy pod uwagę;
- własności termiczne, dyfuzyjne i mechaniczne walca są stałe;
- w walcu panuje płaski stan odkształcenia;
- temperatura, potencjał chemiczny i koncentracja są funkcjami zmiennymi r, φ, t ;
- w chwili początkowej temperatura walca jest stała, zaś potencjał chemiczny ma wartość równą zero. Zerowe są również przemieszczenia i naprężenia;

— pomija się wpływ sił masowych na naprężenia;
 — pomija się wpływ odkształceń tak na pole temperatury jak i na proces dyfuzji;
 — pomija się efekty inercyjne, jakie mogą być wywołane poprzez oddziaływanie termodyfuzyjne, gdyż modyfikacja funkcji opisujących pola mechaniczne uzyskana przy ich uwzględnieniu jest pomijalnie mała co do wartości, a postać ich bardzo się komplikuje (por. problemy podobnego typu dotyczące teorii naprężeń cieplnych, np. [14, 15, 16].

Przy tak sprecyzowanych założeniach wyznaczmy w pracy potencjał chemiczny, pole temperatury oraz stan naprężenia i koncentrację czynnika dyfundującego. Jest oczywiste, że rozwiązanie dla przypadku niezerowych warunków brzegowych dla obciążenia można łatwo uzyskać metodą superpozycji.

Temperaturę i potencjał wyznacza się w pracy w pełnej postaci wynikającej z powyższych założeń. Natomiast dla przemieszczeń, naprężeń oraz koncentracji wyznacza się tylko rozwiązanie odpowiadające zagadnieniu osiowosymetrycznemu. Rozwiązanie to wystarcza bowiem do przeprowadzenia analizy wpływów pól niemechanicznych nawzajem na siebie oraz na pola mechaniczne. Dla przypadku ogólnego (zależność od kąta φ) nazkicowano krótko drogę otrzymania wyników.

O wszystkich funkcjach, wprowadzonych w trakcie obliczeń zakładamy, że spełniają warunki Dirichleta tak dla $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ jak i dla $r \in \langle 0, R \rangle$ (gdzie R jest promieniem rozważanego walca), oraz że są wystarczającą ilość razy różniczkowalne w sposób ciągły po obu tych zmiennych i po czasie.

2. Podstawowe związki i postawienie zagadnienia

W pracy oprzemy się na następującym układzie związków, opisujących potencjał chemiczny, temperaturę, koncentrację i stan naprężenia w ośrodku sprężystym, zapisanych w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z .

Równanie charakteryzujące zmianę potencjału chemicznego [1, 2]:

$$(2.1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{K_M} \frac{\partial}{\partial t} \right) M - \delta_M \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

gdzie $M = M(r, \varphi, t)$ — potencjał chemiczny; $\Theta = \Theta(r, \varphi, t)$ — temperatura względna, odniesiona do temperatury początkowej; $K_M = D$ — współczynnik dyfuzji [2]; $\delta_M = = d/D$, gdzie d — współczynnik sprzężenia termodyfuzyjnego; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Równanie charakteryzujące zmianę temperatury

$$(2.2) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{K_T} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta - \delta_T \frac{\partial M}{\partial t} = 0,$$

gdzie $K_T = \frac{ak}{(a\bar{n} + d^2)T_p}$ — termodyfuzyjny odpowiednik współczynnika przewodzenia temperatury [3]; $\delta_T = dT_p/(ak)$, T_p — temperatura odniesienia, a — współczynnik termodyfuzji [1, 2]; $k = L_{qq}T_p^{-2}$, L_{qq} — współczynnik w związkach Onsagera (por. np. [2] wzór 3.23)); \bar{n} — pewna stała. Sens fizyczny stałych k i \bar{n} wynika łatwo z równości $k/\bar{n} =$

$= \lambda_i / (\rho_0 c_s)$ (gdzie λ_i — współczynnik przewodnictwa cieplnego, ρ_0 — gęstość, c_s — ciepło właściwe przy stałej deformacji [11]) oraz z równania (4.22) podanego w pracy [2].

Stan naprężenia określimy, wykorzystując przemieszczeniowe równania ruchu oraz związki geometryczne i związki konstytutywne.

Równania przemieszczeniowe ruchu [1, 2]:

$$(2.3) \quad \begin{cases} (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \gamma_T^* \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \gamma_M^* \frac{\partial M}{\partial r}, \\ (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e}{r \partial \varphi} + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + \gamma_T^* \frac{\partial \Theta}{r \partial \varphi} + \gamma_M^* \frac{\partial M}{r \partial \varphi}, \end{cases}$$

gdzie $\lambda^* = \lambda - \gamma_c^2 / a$; λ, μ — stałe Lamé'go [4], $\gamma_c = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$, α_c — współczynnik dyfuzyjnej rozszerzalności liniowej [1, 2], ρ_0 — gęstość,

$\gamma_T^* = (\gamma_T a + \gamma_c d) / a$, $\gamma_T = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t — współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej; $\gamma_M^* = \gamma_c / a$; u_r, u_φ — przemieszczenia,

$$(2.4) \quad e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} \text{ — dylatacja;}$$

wobec założeń poczynionych na wstępie człony inercyjne w równaniach (2.3) pomijamy.

Związki geometryczne określają zależności pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami i są powszechnie znane (por. np. [4]); nie będziemy ich tu przytaczać. Związki konstytutywne mają — w przypadku zagadnień termodyfuzji w ośrodkach sprężystych — w ogólności postać [2]:

$$(2.5) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda^* e + \gamma_T^* \Theta + \gamma_M^* M) \delta_{ij},$$

gdzie $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — składowe stanu naprężenia i odkształcenia; δ_{ij} — delta Kroneckera.

Dla rozważanego przypadku — po zastąpieniu składowych stanu odkształcenia przez pochodne składowych stanu przemieszczenia — otrzymuje się związki

$$(2.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma_T^* \Theta - \gamma_M^* M, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda^* + 2\mu) \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda^* \frac{\partial u_r}{\partial r} - \gamma_T^* \Theta - \gamma_M^* M, \\ \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \doteq \sigma_{\varphi r}, \\ \sigma_{zz} = \frac{\lambda^*}{2(\lambda^* + \mu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\mu}{\lambda^* + \mu} (\gamma_T^* \Theta + \gamma_M^* M). \end{cases}$$

Koncentrację c można znaleźć na podstawie następującego związku:

$$(2.7) \quad c = \gamma_M^* e + \frac{d}{a} \Theta + \frac{1}{a} M.$$

Powyższe związki określają równania i zależności, jakie muszą spełniać w rozważanym przypadku potencjał chemiczny M , temperatura Θ , przemieszczenia u_r, u_φ , naprężenia $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}$ i σ_{zz} oraz koncentracja c .

Warunki początkowe i brzegowe wynikające z odpowiednich ustaleń poczynionych we wstępie pracy, określone są następująco:

dla $t = 0$

$$(2.8) \quad M(r, \varphi, 0) = 0, \quad \Theta(r, \varphi, 0) = 0;$$

dla $r = R$ i $t > 0$

$$(2.9) \quad \begin{cases} M(R, \varphi, t) = M_0, & \Theta(R, \varphi, t) = T(\varphi)\exp(-\beta_T t) \\ \sigma_{rr}(R, \varphi, t) = 0, & \sigma_{r\varphi}(R, \varphi, t) = 0, \end{cases}$$

gdzie β_T — wartość stała.

Z uwagi na symetrię równań (2.1) i (2.2) wygodnie jest przyjąć do obliczeń warunek brzegowy (2.9)₁ w postaci

$$(2.9)_1 \quad M(R, \varphi, t) = M(\varphi)\exp(-\beta_M t),$$

gdzie β_M — stała. Kładąc $\beta_M = 0$ oraz $M(\varphi) \equiv M_0$ sprowadza się ten warunek do postaci (2.9)₁.

Warunków początkowych dla naprężeń czy przemieszczeń nie ma celu podawać, gdyż problem jest quasi-statyczny.

Warunki brzegowe (2.9)_{3 i 4} można przedstawić za pomocą funkcji M , Θ i u_α ($\alpha = r, \varphi$). Wykorzystując bowiem związki (2.6)_{1 i 2} możemy zapisać te warunki w postaci

$$(2.10) \quad \begin{cases} \left[\left(\lambda^* + 2\mu \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \right]_{r=R} = \gamma_T^* T(\varphi) e^{-\beta_T t} + \gamma_M^* M(\varphi) e^{-\beta_M t}, \\ \left[\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right]_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Równania (2.1) i (2.2) można rozwiązać niezależnie od równań (2.3). Fakt ten narzuca sposób rozwiązywania zagadnienia.

3. Rozwiązanie równań transportu ciepła i masy

W celu rozwiązania równań (2.1) i (2.2) z warunkami początkowymi (2.8)_{1 i 2} oraz brzegowymi (2.9)_{1 i 2} zakładamy, że funkcje $\Theta(r, \varphi, t)$ i $M(r, \varphi, t)$ spełniają warunki Dirichleta względem zmiennej $\varphi \in (-\pi, \pi)$ przy dowolnych, ustalonych $r \in \langle 0, R \rangle$ i $t \in (0, \infty)$. Mamy zatem

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} \Theta(r, \varphi, t) \\ M(r, \varphi, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix} \Theta_n^c(r, t) \\ M_n^c(r, t) \end{pmatrix} \cos n\varphi + \begin{pmatrix} \Theta_n^s(r, t) \\ M_n^s(r, t) \end{pmatrix} \sin n\varphi \right),$$

gdzie $\Theta_0^s(r, t) \equiv M_0^s(r, t) \equiv 0$. Wstawiając funkcje Θ i M określone związkami (3.1) do równań (2.1) i (2.2) oraz warunków (2.8)_{1 i 2}, (2.9)₁ i (2.9)₂, otrzymujemy następujący zestaw równań różniczkowych i warunków:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{K_T} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta_n^{c,s} - \delta_T \frac{\partial M_n^{c,s}}{\partial t} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{K_M} \frac{\partial}{\partial t} \right) M_n^{c,s} - \delta_M \frac{\partial \Theta_n^{c,s}}{\partial t} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(3.3) \quad M_n^{c,s}(R, t) = M_n^{c,s} e^{-\beta_M t}, \quad \Theta_n^{c,s}(R, t) = T_n^{c,s} e^{-\beta_T t},$$

$$(3.4) \quad M_n^{c,s}(r, 0) = 0, \quad \Theta_n^{c,s}(r, 0) = 0.$$

W zależnościach (3.3) wielkości $T_n^{c,s}$ i $M_n^{c,s}$ są współczynnikami rozwinięć fourierowskich funkcji $T(\varphi)$ i $M(\varphi)$. Oczywiście $T_0^s \equiv M_0^s \equiv 0$, $T_0^c \equiv T_0$, $M_0^c \equiv M_0$.

Równania transportu, po przedstawieniu poszczególnych poszukiwanych funkcji w postaci szeregu Fouriera, rozdzieliły się na układy równań na współczynniki rozwinięć fourierowskich funkcji Θ i M z odpowiednimi układami warunków brzegowych i początkowych. Układy te rozwiązujemy za pomocą skończonej transformacji Hankela rzędu n [5]. O warunkach stosowności tego przekształcenia całkowego mówi następujące twierdzenie ([5], str. 83):

Jeśli funkcja $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta w przedziale $(0, R)$, to jej transformata Hankela ma postać

$$(3.5) \quad \bar{f}(\mu_{ni}) = \int_0^R x f(x) J_n\left(\frac{x}{R} \mu_{ni}\right) dx,$$

gdzie μ_{ni} — i -ty pierwiastek równania przestępnego $J_n(\mu) = 0$ ($J_n(x)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu [6, 7]), zaś transformata odwrotna określona jest dla każdego $x \in (0, R)$, w którym funkcja $f(x)$ jest ciągła, zależnością

$$(3.6) \quad f(x) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(\mu_{ni}) J_n\left(\frac{x}{R} \mu_{ni}\right) [J'_n(\mu_{ni})]^{-2}.$$

Zastosowanie transformacji Hankela do układu równań (3.2) z warunkami (3.3) i (3.4) prowadzi do następujących równań różniczkowych zwyczajnych na transformaty Hankela współczynników rozwinięć fourierowskich funkcji Θ i M :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \mu_{ni} T_n^{c,s} J'_n(\mu_{ni}) e^{-\beta_T t} + \mu_{ni}^2 \bar{\Theta}_n^{c,s} + \frac{R^2}{K_T} \frac{d\bar{\Theta}_n^{c,s}}{dt} + R^2 \delta_T \frac{d\bar{M}_n^{c,s}}{dt} = 0, \\ \mu_{ni} M_n^{c,s} J'_n(\mu_{ni}) e^{-\beta_M t} + \mu_{ni}^2 \bar{M}_n^{c,s} + \frac{R^2}{K_M} \frac{d\bar{M}_n^{c,s}}{dt} + R^2 \delta_M \frac{d\bar{\Theta}_n^{c,s}}{dt} = 0, \end{cases}$$

gdzie oczywiście $T_0^s \equiv M_0^s \equiv \bar{\Theta}_0^s \equiv \bar{M}_0^s \equiv 0$. Transformaty $\bar{\Theta}_n^{c,s}$ i $\bar{M}_n^{c,s}$ muszą spełniać jednorodne warunki początkowe, wynikające z warunków (3.4).

Równanie charakterystyczne [8] tego układu równań ma postać

$$(3.8) \quad r^2 + \frac{\mu_{ni}^2 \alpha_1}{R^2 \alpha_2} r + \frac{\mu_{ni}^4}{R^4 \alpha_2} = 0,$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{K_T} + \frac{1}{K_M}$, $\alpha_2 = \frac{1}{K_T K_M} - \delta_T \delta_M$. Równanie to ma dwa pierwiastki, gdyż — jak łatwo sprawdzić — jego wyróżnik jest zawsze dodatni. W celu zbadania znaków pierwiastków rozważmy znak wyrażenia α_2 (gdyż pozostałe wielkości tworzące współczynniki

równania (3.8) są dodatnie). Ponieważ [2]

$$K_T = \frac{ak}{(a\bar{n} + d^2)T_p}, \quad K_M = D, \quad \delta_T = \frac{dT_p}{ak}, \quad \delta_M = \frac{d}{D},$$

więc

$$(3.9) \quad \alpha_2 = \frac{1}{K_T K_M} (1 - K_T K_M \delta_T \delta_M) = \frac{1}{K_T K_M} \left(1 - \frac{d^2}{a\bar{n} + d^2} \right) > 0,$$

gdyż $d > 0$, $a > 0$ i $\bar{n} > 0$ [2]. Jak zatem wynika z (3.9), równanie (3.8) ma dwa pierwiastki ujemne.

Rozwiązania układu (3.7) mają postać

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{\Theta}_n^{c,s}(\mu_{ni}, t) &= \frac{J'_n(\mu_{ni})}{\mu_{ni}} \left[\frac{F_{ni}^{c,s}(t; T, M)}{2\chi - \alpha_1} - f_{ni}^{c,s}(t; T, M) \right], \\ \bar{M}_n^{c,s}(\mu_{ni}, t) &= \frac{J'_n(\mu_{ni})}{\mu_{ni}} \left[\frac{F_{ni}^{c,s}(t; M, T)}{2\chi - \alpha_1} - f_{ni}^{c,s}(t; M, T) \right]. \end{aligned}$$

Oznaczenia:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} f_{ni}^{c,s}(t; X, Y) &= X_n^{c,s} \frac{(\mu_{ni}^2 - R^2 \beta_X K_Y^{-1}) e^{-\beta_X t}}{R^2 (\beta_X - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_Y - \mu_{ni}^2 r_2)} + Y_n^{c,s} \frac{\delta_X \beta_Y e^{-\beta_Y t}}{(\beta_Y - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_X - \mu_{ni}^2 r_2)}, \\ F_{ni}^{c,s}(t; X, Y) &= \frac{\mu_{ni}^2}{R^2 \alpha_2} \left\{ \left[\left(\chi - \frac{1}{K_X} \right) f_{ni}^{c,s}(t; X, Y) - \delta_X f_{ni}^{c,s}(t; Y, X) \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_1 t} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\chi - \frac{1}{K_Y} \right) f_{ni}^{c,s}(t; X, Y) + \delta_X f_{ni}^{c,s}(t; Y, X) \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_2 t} \right\}, \\ r_1 &= \frac{\chi}{R^2 \alpha_2}, \quad r_2 = \frac{1}{R^2 \chi}, \quad \chi = \frac{1}{2} [\alpha_1 + (\alpha_1^2 - 4\alpha_2)^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory [10]:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho \mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - x^2) (\mu_{ni}^2 - y^2) J'_n(\mu_{ni})} &= \frac{1}{2(y^2 - x^2)} \left[\frac{J_n(\varrho x)}{J_n(x)} - \frac{J_n(\varrho y)}{J_n(y)} \right], \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^3 J_n(\varrho \mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - x^2) (\mu_{ni}^2 - y^2) J'_n(\mu_{ni})} &= \frac{1}{2(y^2 - x^2)} \left[x^2 \frac{J_n(\varrho x)}{J_n(x)} - y^2 \frac{J_n(\varrho y)}{J_n(y)} \right], \end{aligned}$$

wprowadzając oznaczenia

$$(3.13) \quad S_n^I(\varrho; X, Y) = \frac{-1}{2\alpha_2 - \alpha_1 \chi} \left[\left(\alpha_2 - \frac{\chi}{K_Y} \right) \frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X/r_1})}{J_n(\sqrt{\beta_X/r_1})} - \left(\chi^2 - \frac{\chi}{K_Y} \right) \frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X/r_2})}{J_n(\sqrt{\beta_X/r_2})} \right],$$

$$S_n^{II}(\varrho; X) = \frac{-\chi}{2\alpha_2 - \alpha_1 \chi} \left[\frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X/r_1})}{J_n(\sqrt{\beta_X/r_1})} - \frac{J_n(\varrho \sqrt{\beta_X/r_2})}{J_n(\sqrt{\beta_X/r_2})} \right],$$

oraz wykorzystując wzór (3.6) uzyskuje się następujące przedstawienie współczynników fourierowskich funkcji Θ i M :

$$\Theta_n^{c,s}(\varrho, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} F_{ni}^{c,s}(t; T, M) - T_n^{c,s} e^{-\beta T t} S_n^I(\varrho; T, M) + \\ + M_n^{c,s} e^{-\beta M t} \delta_T S_n^{II}(\varrho; M), \quad (3.14)$$

$$M_n^{c,s}(\varrho, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} F_{ni}^{c,s}(t; M, T) - M_n^{c,s} e^{-\beta M t} S_n^I(\varrho; M, T) + \\ + T_n^{c,s} e^{-\beta T t} \delta_M S_n^{II}(\varrho; T).$$

Wstawiając prawe strony zależności (3.14) do (3.1) otrzymujemy funkcje $\Theta(\varrho, \varphi, t)$ i $M(\varrho, \varphi, t)$, opisujące temperaturę i potencjał chemiczny w rozważanym procesie termodyfuzji:

$$\Theta(\varrho, \varphi, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} [F_{ni}^c(t; T, M) \cos n\varphi + F_{ni}^s(t; T, M) \sin n\varphi] - \\ - e^{-\beta T t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^I(\varrho; T, M) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] + \\ + \delta_T e^{-\beta M t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{II}(\varrho; M) [M_n^c \cos n\varphi + M_n^s \sin n\varphi], \quad (3.15)$$

$$M(\varrho, \varphi, t) = \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} [F_{ni}^c(t; M, T) \cos n\varphi + \\ + F_{ni}^s(t; M, T) \sin n\varphi] - e^{-\beta M t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^I(\varrho; M, T) [M_n^c \cos n\varphi + M_n^s \sin n\varphi] + \\ + \delta_M e^{-\beta T t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{II}(\varrho; T) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi].$$

W przypadku, gdy wartości funkcji opisujących temperaturę i potencjał chemiczny na brzegu walca nie zależą od czasu, we wzorach (3.11)—(3.15) należy położyć $\beta_X = 0$ ($X = T, M$). Wówczas $S_n^I(\varrho; X, Y) = -\varrho^n$, $S_n^{II}(\varrho; X) = 0$. Stąd otrzymujemy następującą postać temperatury i potencjału chemicznego dla problemu omówionego we wstępie pracy

$$\Theta(\varrho, \varphi, t) = e^{-\beta T t} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] - \frac{2\delta_T M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} -$$

$$-e^{-\mu_0^2 r_1^2 t} - \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} [\hat{F}_{ni}^c(t) \cos n\varphi + \hat{F}_{ni}^s(t) \sin n\varphi], \quad (3.16)$$

$$M(\varrho, \varphi, t) = M_0 - \frac{2M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} \left[\left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) e^{-\mu_{0i}^2 r_1^2 t} + \right. \\ \left. + \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) e^{-\mu_{0i}^2 r_2^2 t} \right] - \frac{2}{2\chi - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} [\hat{F}_{ni}^c(t) \cos n\varphi + \hat{F}_{ni}^s(t) \sin n\varphi].$$

Tutaj

$$\hat{F}_{ni}^{c,s}(t) = \frac{\mu_{ni}^2 T_n^{c,s} \exp(-\beta_T t)}{R^2 \alpha_2 (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_2)} \left\{ \left[\left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) \left(\frac{\mu_{ni}^2}{R^2} - \frac{\beta_T}{K_M} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \delta_T \delta_M \beta_T \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_1^2 t} + \left[\left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) \left(\frac{\mu_{ni}^2}{R^2} - \frac{\beta_T}{K_M} \right) + \delta_T \delta_M \beta_T \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_2^2 t} \right\}, \quad (3.17)$$

$$\hat{F}_{ni}^s(t) = \frac{\mu_{ni}^2 \delta_M T_n^{c,s} \exp(-\beta_T t)}{R^2 \alpha_2 (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_1) (\beta_T - \mu_{ni}^2 r_2)} \left\{ \left(\beta_T \chi - \frac{\mu_{ni}^2}{R^2} \right) e^{-\mu_{ni}^2 r_1^2 t} + \right. \\ \left. + \left[\beta_T (\chi - \alpha_1) + \frac{\mu_{ni}}{R^2} \right] e^{-\mu_{ni}^2 r_2^2 t} \right\},$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$

4. Wyznaczenie przemieszczeń, naprężeń i koncentracji

Aby określić stan przemieszczenia, naprężenia i koncentrację czynnika dyfundującego w rozważanym walcu, należy rozwiązać równania (2.3) (przy pominiętych członach inercyjnych) z warunkami brzegowymi (2.10). Oprócz spełnienia tych warunków wymaga się od przemieszczeń, aby dla $r = 0$ osiągały wartość skończoną.

Zauważmy, że prawe strony równań (2.3) można w rozważanym przypadku ($\ddot{u}_\alpha \approx 0$) przedstawić w postaci odpowiednich pochodnych sumy

$$(4.1) \quad \gamma_T^* \Theta_0(r, t) + \gamma_M^* M_0(r, t) + \gamma_T^* \Theta^1(r, \varphi, t) + \gamma_M^* M^1(r, \varphi, t),$$

gdzie

$$(4.2) \quad \left. \begin{matrix} \Theta^1(r, \varphi, t) \\ M^1(r, \varphi, t) \end{matrix} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left. \begin{matrix} \Theta_n^c(r, t) \\ M_n^c(r, t) \end{matrix} \right\} \cos n\varphi + \left\{ \begin{matrix} \Theta_n^s(r, t) \\ M_n^s(r, t) \end{matrix} \right\} \sin n\varphi \right\};$$

funkcje $\Theta_0 \equiv \Theta_0^c$, $M_0 \equiv M_0^c$, $\Theta_n^{c,s}$, $M_n^{c,s}$ ($n = 1, 2, \dots$) można łatwo odczytać ze wzorów (3.14).

Równania przemieszczeniowe, po prawych stronach których znajdują się pochodne funkcji $\gamma_T^* \Theta_0(r, t) + \gamma_M^* M_0(r, t)$ opisują — wraz z warunkami (2.10) — osiowosymetryczny stan naprężeń w walcu, grzany na poboczniczy temperaturą eksponencjalnie malejącą

w czasie, przy czym potencjał chemiczny jest na tejże poboczniczy również określony funkcją malejącą w czasie.

Z uwagi na złożoność analizy w przypadku ogólnym, najpierw zajmujemy się zagadnieniem osiowosymetrycznym, a następnie dla przypadku ogólnego tylko naszkicujemy drogę otrzymania wyników.

4.1. Przemieszczenia i naprężenia w zagadnieniu osiowosymetrycznym. Równanie i warunki określające przemieszczenia mają postać następującą:

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \right) u_r^0 = Rm_T \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varrho} + Rm_M \frac{\partial M_0}{\partial \varrho},$$

$$\left. \frac{\partial u_r^0}{\partial \varrho} + (1-2c^2) \frac{u_r^0}{\varrho} \right|_{\varrho=1} = Rm_T T_0 e^{-\beta T t} + Rm_M M_0 e^{-\beta M t},$$

$$|u_r^0(0, t)| < \infty,$$

gdzie u_r^0 — przemieszczenie radialne, $c^2 = c_2^2/c_1^{*2}$, $c_1^{*2} = (\lambda^* + 2\mu)/\varrho_0$, $c_2^2 = \mu/\varrho_0$, $m_T = \gamma_T^*/\varrho_0 c_1^{*2}$, $m_M = \gamma_M^*/(\varrho_0 c_1^{*2})$, $T_0 \equiv T_0^0$, $M_0 \equiv M_0^0$, $\varrho = r/a$. Przemieszczenia w kierunku obwodowym są równe zero: $u_\varphi^0 = 0$. Znak 0 oznacza osiową symetrię.

Po prostych obliczeniach uzyskuje się następującą postać funkcji $u_r^0(\varrho, t)$:

$$(4.4) \quad u_r^0(\varrho, t) = -RT_0 e^{-\beta T t} \left\{ \frac{\varrho c^2}{1-c^2} [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] + \right.$$

$$\left. + m_T S_0^{III}(\varrho; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(\varrho; T) \right\} - RM_0 e^{-\beta M t} \left\{ \frac{\varrho c^2}{1-c^2} [m_M S_0^{III}(1; M, T) - \right.$$

$$\left. - m_T \delta_T S_0^{IV}(1; M)] + m_M S_0^{III}(\varrho; M, T) - m_T \delta_T S_0^{IV}(\varrho; M) \right\} -$$

$$- \frac{2c^2 \varrho R}{(1-c^2)(2\chi - \alpha_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} [m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)] -$$

$$- \frac{2R}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)],$$

gdzie

$$(4.5) \quad S_0^{III}(\varrho; X, Y) = \frac{1}{\alpha_1 \chi - 2\alpha_2} \left[(\alpha_2 - \chi/K_Y) \frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_1})}{\sqrt{\beta_X/r_1} J_0(\sqrt{\beta_X/r_1})} - \right.$$

$$\left. - (\chi^2 - \chi/K_Y) \frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_2})}{\sqrt{\beta_X/r_2} J_0(\sqrt{\beta_X/r_2})} \right],$$

$$S_0^{IV}(\varrho; X) = \frac{\chi}{\alpha_1 \chi - 2\alpha_2} \left[\frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_1})}{\sqrt{\beta_X/r_1} J_0(\sqrt{\beta_X/r_1})} - \frac{J_1(\varrho \sqrt{\beta_X/r_2})}{\sqrt{\beta_X/r_2} J_0(\sqrt{\beta_X/r_2})} \right].$$

W przypadku, gdy wartości brzegowe temperatury lub potencjału chemicznego nie zależą od czasu, we wzorach (4.4) i (4.5) należy położyć $\beta_X = 0$ ($X = T$ lub M). Wówczas $S_0^{III}(\varrho; X, Y) = -\varrho/2$, $S_0^{IV}(\varrho; X) = 0$. Stąd następująca postać przemieszczenia u_r^0 dla

problemu omówionego we wstępie pracy:

$$(4.6) \quad u_r^0(\varrho, t) = -RT_0 e^{-\beta r t} \left\{ \frac{\varrho c^2}{1-c^2} [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] + \right. \\ \left. + m_T S_0^{III}(\varrho; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(\varrho; T) \right\} + \frac{RM_0 m_M \varrho}{2(1-c^2)} - \\ - \frac{2R}{2\chi - \alpha_1} \left(\frac{c^2 \varrho M_0}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} + \frac{c_2 \varrho}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} [m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)] + \right. \\ \left. + M_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)] \right\},$$

gdzie $\hat{F}_{0i}(t) \equiv \hat{F}_{0i}^c(t)$, $\hat{F}_{0i}(t) \equiv \hat{F}_{0i}^s(t)$; funkcje te określone są wzorami (3.17).

Naprężenia dla przypadków określonych warunkami brzegowymi (2.9)₁ i (2.9)_{2, 3, 4} dane są związkami

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta r t} \left\{ m_T [S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - m_M \delta_M [S_0^{IV}(\varrho; T) - \right. \\ &\left. \varrho S_0^{IV}(1; T)] \right\} + 2 \frac{\mu}{\varrho} M_0 e^{-\beta M t} \left\{ m_M [S_0^{III}(\varrho; M, T) - \varrho S_0^{III}(1; M, T)] - \right. \\ &\left. - m_T \delta_T [S_0^{IV}(\varrho; M) - \varrho S_0^{IV}(1; M)] \right\} + \\ &+ \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta r t} \left\{ m_T [\varrho S_0^I(\varrho; T, M) - S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - \right. \\ &\left. - m_M \delta_M [\varrho S_0^II(\varrho; T) - S_0^{IV}(\varrho; T) - \varrho S_0^{IV}(1; T)] \right\} + 2 \frac{\mu}{\varrho} M_0 e^{-\beta M t} \left\{ m_M \times \right. \\ &\times [\varrho S_0^I(\varrho; M, T) - S_0^{III}(\varrho; M, T) - \varrho S_0^{III}(1; M, T)] - m_T \delta_T [\varrho S_0^II(\varrho; M) - \\ &\left. - S_0^{IV}(\varrho; M) - \varrho S_0^{IV}(1; M)] \right\} - \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_T F_{0i}^c(t; T, M) + m_M F_{0i}^c(t; M, T)}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \times \\ &\times [J_1(\varrho \mu_{0i}) - \varrho \mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})], \\ \sigma_{zz}^0(\varrho, t) &= \frac{1-2c^2}{2(1-c^2)} (\sigma_{rr}^0 + \sigma_{\varphi\varphi}^0) - \frac{c^2}{1-c^2} (\gamma_T^* \Theta_0 + \gamma_M^* M_0), \\ \sigma_{r\varphi}^0(\varrho, t) &\equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Przejsięc we wzorach (4.7) z β_M do zera daje rozwiązanie dla przypadku będącego przedmiotem rozważań:

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sigma_{rr}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta_T t} \{m_T [S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - m_M \delta_M [S_0^{IV}(\varrho; T) - \\
 &\varrho S_0^{IV}(1; T)]\} + \frac{4\mu M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - \right. \right. \\
 &\left. \left. - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} + \\
 &+ \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)], \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) &= 2 \frac{\mu}{\varrho} T_0 e^{-\beta_T t} \{m_T [\varrho S_0^I(\varrho; T, M) - S_0^{III}(\varrho; T, M) - \varrho S_0^{III}(1; T, M)] - \\
 &- m_M \delta_M [\varrho S_0^{II}(\varrho; T) - S_0^{IV}(\varrho; T) - \varrho S_0^{IV}(1; T)]\} - \\
 &- \frac{4\mu M_0}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - \right. \right. \\
 &\left. \left. - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_1 t} + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r_2 t} \right\} - \\
 &- \frac{4\mu}{2\chi - \alpha_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t)}{\varrho\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} [J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) + \varrho J_1(\mu_{0i})].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

4.2. Koncentracja czynnika dyfundującego w zagadnieniu osłowsymetrycznym. Postać koncentracji $c^0(\varrho, t)$ wyznaczamy w oparciu o związek (2.7). Wstawiając przemieszczenie u_r^0 określone związkiem (4.4) do (2.4), otrzymujemy postać dylatacji; wykorzystując ponadto wzory (3.14) otrzymuje się następującą funkcję, określającą koncentrację czynnika dyfundującego w walcu

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad c^0(\varrho, t) &= \left(\gamma_M^* m_T + \frac{d}{a} \right) \Theta_0(\varrho, t) + \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) M_0(\varrho, t) - \gamma_M^* \frac{2T_0 c^2}{1 - c^2} e^{-\beta_T t} \times \\
 &\times [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] - \gamma_M^* \frac{2M_0 c^2}{1 - c^2} e^{-\beta_M t} [m_M S_0^{III}(1; M, T) - \\
 &- m_T \delta_T S_0^{IV}(1; M)] - \frac{4c^2 \gamma_M^*}{(1 - c^2)(2\chi - \alpha_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} [m_T F_{0i}(t; T, M) + m_M F_{0i}(t; M, T)].
 \end{aligned}$$

Przejsięc z β_M do zera powoduje we wzorze (4.9) następujące zmiany: funkcje Θ_0 i M_0 mają postać określoną wzorami (3.16), $\exp(-\beta_M t) = 1$, nawias kwadratowy stojący przy M_0 ma wartość $-0,5 m_M$; zaś nawias kwadratowy stojący pod sumą da się rozdzielić — podobnie jak przy przejściu od wzorów (4.7) do (4.8) — na dwa składniki, z których

każdy opisuje bądź oddziaływanie temperatury, bądź potencjału chemicznego. Stąd ostateczna postać koncentracji dla rozważanego zagadnienia termodyfuzji:

$$(4.10) \quad c^0(\varrho, t) = \left(\gamma_M^* m_T + \frac{d}{a} \right) \Theta_0(\varrho, t) + \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) M_0(\varrho, t) - \gamma_M^* \frac{2T_0 c^2}{1-c^2} e^{-\beta r t} \times \\ \times [m_T S_0^{III}(1; T, M) - m_M \delta_M S_0^{IV}(1; T)] + \gamma_M^* \frac{M_0 m_M c^2}{1-c^2} - \frac{4c^2 \gamma_M^*}{(1-c^2)(2\chi - \alpha_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} \times \\ \times \left(m_T \hat{F}_{0i}(t) + m_M \hat{F}_{0i}(t) + M_0 \left\{ \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_M} \right) - m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[m_M \left(\chi - \frac{1}{K_T} \right) + m_T \delta_T \right] e^{-\mu_{0i}^2 r^2 t} \right\} \right).$$

4.3. **Zagadnienie naprężeń i koncentracji w przypadku ogólnym.** Wykorzystując związki (4.1) i (4.2) można wyznaczyć naprężenia i koncentrację w zagadnieniu ogólnym metodą superpozycji. Pełna postać przemieszczeń i naprężeń będzie sumą rozwiązań uzyskanych w rozdziale (4.1) oraz rozwiązań następującego zagadnienia brzegowego:

$$(4.11) \quad \begin{cases} (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e^1}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r^1 - \frac{1}{r^2} \left(u_r^1 + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] = \gamma_M^* \frac{\partial \Theta^1}{\partial r} + \gamma_M^* \frac{\partial M^1}{\partial r}, \\ (\lambda^* + \mu) \frac{\partial e^1}{r \partial \varphi} + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r^1}{\partial \varphi} \right) \right] = \gamma_T^* \frac{\partial \Theta^1}{r \partial \varphi} + \gamma_M^* \frac{\partial M^1}{r \partial \varphi}, \\ \left[(\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial u_r^1}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r^1}{r} \right) \right]_{r=R} = \gamma_T^* T^1(\varphi) e^{-\beta r t} + \gamma_M^* M_0, \\ \left[\frac{\partial u_r^1}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right]_{r=R} = 0; \end{cases}$$

tutaj u_r^1 oznacza przemieszczenie wywołane temperaturą Θ^1 i procesem dyfuzji wywołanym działaniem potencjału chemicznego M^1 ; $u_\varphi^1 \equiv u_\varphi$, gdyż $u_\varphi^0 \equiv 0$. Funkcje $\Theta^1(\varrho, \varphi, t)$ i $M^1(\varrho, \varphi, t)$ można łatwo otrzymać ze wzorów (3.16).

Droga rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.11) jest identyczna, jak w przypadku termosprężystości (por. [17]). Polega ona na ustawieniu równań i warunków dla funkcji Φ i Ψ , powiązanych z przemieszczeniami u_r^1 i u_φ związkami [4]:

$$(4.12) \quad \begin{Bmatrix} u_r^1 \\ u_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{Bmatrix},$$

a następnie sprowadzeniu tych równań do zwyczajnych ze względu na zmienną r przez rozkład funkcji Φ i Ψ na szereg Fouriera.

5. Analiza otrzymanych wyników

Rozwiązanie problemu, który został naszkicowany we wstępie pracy, określają związki (3.16), (4.5), (4.8) i (4.10). Przeanalizujemy teraz przypadek, gdy wpływ temperatury na potencjał chemiczny (i na odwrót) jest niewielki.

O sprzężeniu równań transportu ciepła i masy decydują współczynniki δ_T i δ_M . Wyrażają się one poprzez inne stałe dotyczące procesu termodyfuzji w sposób następujący:

$$(5.1) \quad \delta_M = d/D, \quad \delta_T = dT_p/(ak),$$

gdzie wielkości D , d , T_p , a i k omówiono w rozdziale drugim pracy. Oba współczynniki zależne są od współczynnika sprzężenia termodyfuzyjnego d [1, 2]. Założenie niewielkiego wpływu dyfuzji na procesy termiczne i na odwrót jest równoznaczne z przyjęciem

$$(5.2) \quad d \ll D \text{ oraz } d \ll ak/T_p.$$

Zauważmy, że $D = K_M$, a $ak/T_p = (a\bar{n} + d^2)K_T \simeq a\bar{n}K_T$, tzn.

$$(5.2)' \quad d \ll a\bar{n}K_T \text{ oraz } d \ll K_M.$$

Założenie małości d nie oznacza, iż również współczynnik a ma być mały — decyduje o tym związek (2.7). Podobnie współczynnik \bar{n} może mieć wartość dowolną (dopuszczalną przez fizykochemię zjawiska) — z porównania związków określających entropię w procesie termodyfuzyjnym [2] i termosprężystym [4] wynika, że $\bar{n} \simeq c_v/T_p$, gdzie c_v — ciepło właściwe przy stałej objętości. Ponadto przyjmujemy, że proces stygnięcia powierzchni walca odbywa się bardzo długo, tzn. β_T jest tak małe, że $\beta_T R^2/K_X \ll 1$ ($X = T, M$) oraz można przyjąć $\beta_T^2 \simeq 0$ i $\beta_T d \simeq 0$.

Powyższe uwagi pozwalają stwierdzić, że gdy spełnione są nierówności (5.2), to

$$(5.3) \quad \alpha_2 \simeq \frac{1}{K_T K_M}, \quad \chi \simeq \frac{1}{K_M} \left(\text{lub } \frac{1}{K_T}, \text{ zależnie od tego, czy } K_T > K_M \text{ czy odwrotnie; nie ma to znaczenia dla dalszej analizy} \right),$$

$$r_1 \simeq K_T/R^2, \quad r_2 \simeq K_M/R^2 \quad (\text{lub odwrotnie}),$$

$$S_n^I(\varrho; T, M) \simeq - \frac{J_n(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{J_n(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \simeq -\varrho^n,$$

$$S_n^{II}(\varrho; T) \simeq \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} \left[\frac{J_n(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_T})}{J_n(R \sqrt{\beta_T/K_T})} - \frac{J_n(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{J_n(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \right] \simeq 0,$$

$$S_0^{III}(\varrho; T, M) \simeq - \frac{J_1(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{R \sqrt{\beta_T/K_M} J_0(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \simeq -\varrho/2,$$

$$S_0^{IV}(\varrho; T) \simeq \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} \left[\frac{J_1(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_T})}{R \sqrt{\beta_T/K_T} J_0(R \sqrt{\beta_T/K_T})} - \frac{J_1(\varrho R \sqrt{\beta_T/K_M})}{R \sqrt{\beta_T/K_M} J_0(R \sqrt{\beta_T/K_M})} \right] \simeq 0.$$

Przy powyższych założeniach związki określające poszczególne, wyznaczone w rozdziałach 3 i 4, wielkości upraszczają się do następującej postaci:

$$(5.4) \quad \Theta(\varrho, \varphi, t) \simeq e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] - \frac{2dK_M M_0}{a\bar{n}(K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} \times \\ \times (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) - 2e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni}) e^{-\mu_{ni}^2 F_0} [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi]}{(\mu_{ni}^2 - \beta_T R^2 / K_T) J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\},$$

$$(5.5) \quad M(\varrho, \varphi, t) \simeq M_0 \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} \right] - \frac{2dK_T}{K_T - K_M} e^{-\beta_T t} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni}) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi]}{(\mu_{ni}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_{n+1}(\mu_{ni})} (e^{-\mu_{ni}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{ni}^2 F_0}) \right\},$$

$$(5.6) \quad u_r^0(\varrho, t) \simeq \frac{RT_0 m_T \varrho}{2(1-c^2)} e^{-\beta_T t} + \frac{RM_0 m_M \varrho}{2(1-c^2)} - \frac{2RdK_M M_0 m_T}{a\bar{n}(K_M - K_T)} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) - 2RM_0 m_M \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \frac{2RdK_T m_M T_0}{K_M - K_T} e^{-\beta_T t} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{J_1(\mu_{0i})} \left(\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T} \right) - \\ - 2RT_0 m_T e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0},$$

$$(5.7) \quad \sigma_{rr}^0(\varrho, t) \simeq 4\mu m_T T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0} + 4\mu m_M M_0 \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \frac{4\mu dK_T}{K_T - K_M} m_M T_0 e^{-\beta_T t} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} \left[\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 / K_T} \right] + \\ + \frac{4\mu K_M d m_T M_0}{a\bar{n}(K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}),$$

$$(5.8) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) \simeq -4\mu m_T T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0} -$$

$$-4\mu m_M M_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} +$$

$$+ \frac{4\mu d k_T}{k_M - k_T} m_M T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T} \right) + \frac{4\mu K_M d m_T M_0}{a\bar{n}(K_M - K_T)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}),$$

$$(5.9) \quad c^0(\varrho, t) \simeq T_0 e^{-\beta_T t} \left\{ \frac{d}{a} + \frac{\gamma_M^* m_T}{1-c^2} - \frac{4c^2 \gamma_M^* m_T}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T} - \right.$$

$$- 2 \left(\gamma_M^* m_T + \frac{d}{a} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_T) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 F_0} - \frac{4c^2 \gamma_M^* d K_T m_M}{(1-c^2)(K_T - K_M)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/K_M} - \frac{e^{-\mu_{0i}^2 F_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2/k_T} \right) - \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) \frac{2dK_T}{K_T - K_M} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) \left. + M_0 \left\{ \frac{1}{a} + \frac{\gamma_M^* m_M}{1-c^2} - \right. \right.$$

$$- \frac{4c^2 \gamma_M^* m_M}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^2 e^{-\mu_{0i}^2 F_0} - 2 \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} -$$

$$- \frac{4c^2 \gamma_M^* d K_T m_T}{(1-c^2) a \bar{n} (K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^2 (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) -$$

$$\left. - \frac{2dK_M \gamma_M^* m_T}{a \bar{n} (K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} (e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - e^{-\mu_{0i}^2 F_0}) \right\}.$$

W powyższych wzorach oznaczono $F_0 = K_T t/R^2$, $\bar{F}_0 = K_M t/R^2$.

Spośród związków (5.4) — (5.9) tylko dwa pierwsze mają charakter ścisłych rozwiązań. Pozostałe wielkości — to rozwiązania zagadnienia quasi-statycznego. Ponieważ dla czasów bliskich chwili początkowej związki (5.6) — (5.9) nie obowiązują, więc celowym jest podanie takiej ich postaci, która opisywać będzie określone przez nie wielkości w sposób wystarczająco ścisły. Osiągnąć to można, specyfikując przedział czasu.

Z doświadczenia wiadomo, że proces dyfuzji przebiega znacznie wolniej, niż proces ogrzewania. Wynika stąd, że $K_T > K_M$, a co za tym idzie, wyrażenie $\exp(-\mu_{0i} F_0)$ prędzej dąży do zera niż $\exp(-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0)$. Zatem dla $F_0 > 0,5$ (dla tzw. regularnego reżimu cieplnego [9]), tzn. dla $t > R^2/(2K_T)$ wyrażenia $\exp(-\mu_{0i}^2 F_0)$ nie przekraczają wartości 0,05 podczas gdy wyrażenia $\exp(-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0)$ mogą być jeszcze stosunkowo bliskie jedności. Dla $F_0 > 1,5$ mamy $\exp(-\mu_{0i}^2 F_0) < 10^{-3}$ — zatem dla czasów $t > 3R^2/(2K_T)$ można pominąć składniki, zawierające tego typu potęgi. Związki (5.4) — (5.9) znacznie się wówczas upraszczają. I tak:

$$\begin{aligned} \Theta(\varrho, \varphi, t) &\simeq e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi] - \frac{2dK_M M_0}{an(K_T - K_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i}) e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})}, \\ M(\varrho, \varphi, t) &\simeq M_0 \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} \right] - \\ &\quad - \frac{2dK_T}{K_T - K_M} e^{-\beta_T t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni}) [T_n^c \cos n\varphi + T_n^s \sin n\varphi]}{(\mu_{ni}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_{n+1}(\mu_{ni})} e^{-\mu_{ni}^2 \bar{F}_0} \right\}, \\ u_r^0(\varrho, t) &\simeq \frac{R\varrho}{2(1-c^2)} [m_T T_0 e^{-\beta_T t} + m_M M_0] - 2M_0 R \left[\frac{dK_T m_T}{an(K_T - K_M)} + m_M \right] \times \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} - \\ &\quad - 2RT_0 e^{-\beta_T t} \left[\frac{dK_T m_M}{K_T - K_M} + m_T \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) + \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} J_1(\mu_{0i})}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}, \\ (5.10) \quad \sigma_{rr}^0(\varrho, t) &\simeq 4\mu M_0 \left[\frac{dK_M m_T}{an(K_T - K_M)} + m_M \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho \mu_{0i}^2 J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} + \\ &\quad + \frac{4\mu dK_T}{K_T - K_M} m_M T_0 e^{-\beta_T t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho (\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^0(\varrho, t) &\simeq -4\mu \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{J_1(\varrho\mu_{0i}) - \varrho \mu_{0i} J_0(\varrho\mu_{0i}) - \varrho J_1(\mu_{0i})}{\varrho J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ M_0 \left[\frac{dK_M m_T}{an(K_T - K_M)} + m_M \right] \mu_{0i}^{-2} + \frac{4\mu dK_T m_M T_0 e^{-\beta_T t}}{(K_T - K_M) (\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1)} \right\} \right), \\ c^0(\varrho, t) &\simeq T_0 e^{-\beta_T t} \left\{ \frac{d}{a} + \frac{\gamma_M^* m_T}{1-c^2} - \frac{2dK_T}{K_T - K_M} \left[\frac{2c^2 \gamma_M^* m_M}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_{0i}^2 \bar{F}_0}}{\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i}) e^{-\mu_{0i}^2 \bar{r}_0}}{(\mu_{0i}^2 - \beta_T R^2 \alpha_1) J_1(\mu_{0i})} \Bigg] + M_0 \left\{ \frac{1}{a} + \frac{\gamma_M^* m_M}{1-c^2} - \right. \\
 & - \frac{4c^2 \gamma_M^*}{1-c^2} \left[\frac{dK_T m_T}{a n (K_T - K_M)} + m_M \right] \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{0i}^{-2} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{r}_0} - 2 \left[\gamma_M^* m_M + \frac{1}{a} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{dK_M \gamma_M^* m_T}{a n (K_T - K_M)} \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 \bar{r}_0} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ze związków (5.4) — (5.10) można odczytać szereg interesujących cech charakteryzujących proces termodyfuzji w ciałach stałych. Z pierwszych dwóch zależności, określających temperaturę i potencjał chemiczny wynika, że wpływ procesu dyfuzji na temperaturę jest znacznie mniejszy niż wpływ temperatury na wartość potencjału chemicznego, gdyż — jak to już zaznaczono wyżej — $K_T > K_M$. W procesach dyfuzji i ogrzewania, dotyczących ciał stałych, można nawet napisać silniejszą nierówność ($K_T \gg K_M$) gdyż wówczas współczynniki te różnią się o kilka rzędów wielkości. Jednakże oba wpływy — potencjału chemicznego na temperaturę i odwrotnie — są znikomo małe, gdyż składniki, opisujące te wpływy, mnożone są przez iloczyny dK_T lub dK_M .

O wpływie procesów termicznego i dyfuzyjnego na przemieszczenia decydują współczynniki m_T i m_M . Natomiast wielkości K_T i K_M określają czas trwania czysto niestacjonarnego procesu. Jak już wspomniano wyżej, czas trwania czysto niestacjonarnego procesu jest dla procesu termicznego znacznie krótszy niż dla dyfuzyjnego. Stąd rozpatrując problem od strony dynamicznej, w pierwszej fazie — dla $Fo \in (0; 0,5)$ — należy się spodziewać przede wszystkim wpływu ogrzewania na przemieszczenia; dla $Fo \in (0,5; 1,5)$ — wyrównania się obu wpływów, zaś dla $Fo > 1,5$ — już tylko wpływu procesu dyfuzji. Po odpowiednio długim czasie wartości przemieszczeń ustalają się, podobnie jak w procesie termicznym.

Naprężenia w procesie termodyfuzyjnym — podobnie jak w procesie czysto termicznym — po odpowiednio długim czasie stają się pomijalnie małe. Warto jednakże zwrócić uwagę na to, że również i tu w kolejnych fazach procesu notujemy początkowo większy wpływ ogrzewania, zaś po pewnym czasie przede wszystkim wpływ dyfuzji na naprężenia. Widać to szczególnie wyraźnie w związkach (5.10)_{4, 5}.

Wszystkie uwagi dotyczące temperatury, potencjału chemicznego i przemieszczeń, dotyczą również koncentracji (wynika to w sposób oczywisty ze związku (2.7)). Ponadto — jak widać z (5.10)₆ — po odpowiednio długim czasie wartość funkcji $c^0(\varrho, t)$ ustala się i — w przypadku osiowosymetrycznym — staje się niezależna od promienia. Podobnego efektu należy się spodziewać — przez analogię do procesu czysto termicznego — w przypadku nieosiowosymetrycznym. Natomiast wydaje się, że w walcu kołowym można osiągnąć koncentrację czynnika dyfundującego, będącą funkcją promienia ϱ , jeśli zada się potencjał chemiczny na powierzchni walca jako funkcję kąta opisaną φ , zaś sam walec wprawi się w ruch obrotowy wokół własnej osi z odpowiednio dobraną prędkością kątową. Wniosek ten wynika z analogii procesu termodyfuzyjnego i czysto termicznego, dla którego wyka-

zано tego typu zależność temperatury od promienia przy odpowiednio dobranym zespole warunków [9].

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids*, Proc. Vibr. Probl. 2, **15** (1974).
2. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. Stos., **2**, **13** (1975).
3. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła — podstawy teoretyczne*, PWN Warszawa 1963.
4. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN Warszawa 1970.
5. I. N. SNEDDON, *Fourier transform*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York 1951.
6. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
7. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN Warszawa 1964.
8. E. KAMKE, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1959; tłum. ros. Moskwa 1965.
9. K. GRYSA, *Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym, wywołane utrzymywana na jego poboczniczy odcinkami stałą temperaturą*, Mech. Teoret. Stos. 2, **15** (1977).
10. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos. 2, **15** (1977).
11. B. A. BOLEY, J. A. WIENER, *Theory of thermal stresses*, J. Wiley and Sons, Inc., New York 1960.
12. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1958; tłum. ros. Moskwa 1963.
13. S. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, ARKADY 1962.
14. K. GRYSA, M. KWIEK, *Stan naprężeń w walcu kołowym, wywołany przyłożeniem stałej temperatury na poboczniczy*, Mech. Teoret. Stos., **1**, **15** (1977).
15. W. DERSKI, *A dynamical problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech. Stos., **2**, **13** (1961).
16. T. MURA, *Dynamical thermal stress due to thermal shocks*, Res. Rep. Fac. of Engng., Meiji Univ., **8** (1956).
17. K. GRYSA, *Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym nieosiowosymetrycznie na poboczniczy*, Mech. Teoret. Stos., **3**, **15** (1977).

Резюме

ОБ ОДНОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИФФУЗИИ ДЛЯ УПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В работе описано процесс термодиффузии в длинном круглом цилиндре при настоящих предположениях: боковая поверхность цилиндра свободна, температура этой поверхности дана в виде функции угла φ и времени, а химический потенциал — в виде функции постоянной. В цилиндре предположенно плоскую деформацию. В уравнениях движения пренебрегается внешними силами и инертными эффектами, а в уравнениях теплопроводности и диффузии — упругой дилатацией. Полученные результаты, описывающие температуру, химический потенциал, напряжения, перемещения и концентрацию, даны в виде рядов Фурье-Бесселя. В последней части работы проведена анализ полученных результатов.

ON A CERTAIN QUASI-STATIC PROBLEM OF THERMODIFFUSION IN AN ELASTIC CYLINDER

Summary

The thermodiffusion phenomenon in a long elastic cylinder is investigated in this paper. The following assumptions are made: the surface of cylinder is free, the temperature of the surface is a function of

angle φ and time, chemical potential is constant on the surface of the cylinder, the plane state of strains is considered; body forces and inertia terms in equations of motion and elastic dilatation in heat and diffusive equations are neglected. The obtained results, describing temperature, chemical potential, stresses, displacements and concentration fields are given in a form of Fourier-Bessel series. In the last part of the paper an analysis of obtained results is presented.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 sierpnia 1977 r.
