

UŚCIŚLONY OPIS DRGAŃ WYMUSZONYCH LINII WAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM  
ASYMETRII SZTYWNOŚCI NA ZGINANIE I PODATNOŚCI FUNDAMENTÓW

JANUSZ KOŁENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Przyjęty w pracy [1] mechaniczny model linii wałów nie obejmuje szeregu występujących w rzeczywistych układach czynników, które mogą być uwzględniane w ramach liniowej teorii drgań. Celowość i sposoby uściślenia modelu zależą od typu rozpatrywanych linii wałów i warunków ich eksploatacji. Przykładowo, na drgania linii wałów okrętowych siłowni spalinowych istotny wpływ wywierać mogą m.in. takie pominięte w [1] czynniki, jak stała składowa naporu śruby i tłumienie wewnętrzne wałów. Mniejsze znaczenie praktyczne mają tu na ogół sprzężenia pomiędzy poszczególnymi rodzajami drgań [2], a także — ze względu na stosunkowo małą prędkość obrotową wału śrubowego — momenty żyroskopowe. W niniejszej pracy uwzględniono wpływ stałej siły poosiowej, tłumienia wewnętrznego, odkształceń postaciowych od sił poprzecznych i momentów sił bezwładności obrotu oraz podjęto próbę uwzględnienia asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów w układach przekładniowych. Przedstawiono również możliwość dokładniejszego opisu drgań linii wałów zawierających wały korbowe lub inne zespoły o skomplikowanych kształtach poprzez zastosowanie podziału tych zespołów na elementy skończone.

2. Zależności obliczeniowe dla uściślonego modelu odcinka wału

Lepkosprężyste cechy materiału linii wałów opisano poniżej przy pomocy modelu Voigta<sup>1)</sup>. Zachowano przy tym sposób podziału linii wałów na odcinki obliczeniowe oraz założenia i oznaczenia jak w pracy [1].

Równanie drgań podłużnych, równanie drgań giętych (w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach) z uwzględnieniem stałej ściskającej siły poosiowej  $f_{01}^{w(0)}$  oraz równanie drgań skrętnych mają dla  $i$ -tego odcinka wału postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 u_{ix1}}{\partial t^2} - \left(\frac{E}{\rho}\right)_i \left( \frac{\partial^2 u_{ix1}}{\partial x^2} + \tau_i \frac{\partial^3 u_{ix1}}{\partial t \partial x^2} \right) = 0,$$

$$(2.2) \quad (\rho A)_i \frac{\partial^2 u_{ix2}}{\partial t^2} + f_{01}^{w(0)} \frac{\partial^2 u_{ix2}}{\partial x^2} + (EI_2)_i \left( \frac{\partial^4 u_{ix2}}{\partial x^4} + \tau_i \frac{\partial^5 u_{ix2}}{\partial t \partial x^4} \right) = 0,$$

<sup>1)</sup> W przypadku przyjęcia innego liniowego modelu reologicznego procedura postępowania jest analogiczna.

$$(2.3) \quad (\rho A)_i \frac{\partial^2 u_{ix3}}{\partial t^2} + f_{01}^{w(0)} \frac{\partial^2 u_{ix3}}{\partial x^2} + (EI_3)_i \left( \frac{\partial^4 u_{ix3}}{\partial x^4} + \tau_i \frac{\partial^5 u_{ix3}}{\partial t \partial x^4} \right) = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u_{ix4}}{\partial t^2} - \left( \frac{C}{I_s} \right)_i \left( \frac{\partial^2 u_{ix4}}{\partial x^2} + \tau_{zi} \frac{\partial^3 u_{ix4}}{\partial t \partial x^2} \right) = 0.$$

Współczynniki  $\tau_i$ ,  $\tau_{zi}$  charakteryzują tłumienie materiałowe w  $i$ -tym odcinku wału zgodnie z modelem Voigta [3]. Dodatkowe uwzględnienie wpływu na linię ugięcia odkształceń postaciowych oraz bezwładności obrotu prowadzi zamiast (2.2), (2.3) do równań:

$$(2.5) \quad (\rho A)_i \frac{\partial^2 u_{ix2(3)}}{\partial t^2} + f_{01}^{w(0)} \frac{\partial^2 u_{ix2(3)}}{\partial x^2} + (EI_{2(3)})_i \left( \frac{\partial^4 u_{ix2(3)}}{\partial x^4} + \tau_i \frac{\partial^5 u_{ix2(3)}}{\partial t \partial x^4} \right) - \\ - (\rho I_{2(3)})_i \left[ 1 + \left( k_{2(3)} \frac{E}{G} \right)_i \right] \frac{\partial^4 u_{ix2(3)}}{\partial t^2 \partial x^2} + \left( \rho^2 k_{2(3)} \frac{I_{2(3)}}{G} \right)_i \frac{\partial^4 u_{ix2(3)}}{\partial t^4} = 0,$$

w których  $G_i$  jest modułem odkształcenia postaciowego, natomiast  $(k_2)_i$ ,  $(k_3)_i$  są współczynnikami kształtu przekroju [3].

Skupione wymuszenia zewnętrzne, działające w końcowym przekroju  $i$ -tego odcinka wału, mają postać [1]:

$$(2.6) \quad f_{ix}^w = \sum_{\mu} f_{ix}^{w(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

W analogicznej postaci poszukiwać będziemy rozwiązań równań (2.1) ÷ (2.5):

$$(2.7) \quad u_{ix\alpha} = \sum_{\mu} u_{ix\mu}^{(\alpha)} \exp(j\mu\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, 4.$$

Podobnie opisywać się będą kąty ugięć, określone zależnościami

$$(2.8) \quad u_{ix5} = - \frac{\partial u_{ix3}}{\partial x}, \quad u_{ix6} = \frac{\partial u_{ix2}}{\partial x}.$$

W wyniku podstawienia (2.7) do (2.1) ÷ (2.4) otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne, których rozwiązania można z uwzględnieniem (2.8) przedstawić w postaci:

$$(2.9) \quad u_{ix}^{(\mu)} = C_{ix}^{(\mu)} a_i^{(\mu)}, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots,$$

gdzie:

$$u_{ix}^{(\mu)} = \{u_{ix\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad a_i^{(\mu)} = \{a_{iq}^{(\mu)}\}, \quad q = 1, \dots, 12,$$

$$(2.10) \quad C_{ix}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \lambda_2^{(0)} x & \sin \lambda_2^{(0)} x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_3^{(0)} x & \sin \lambda_3^{(0)} x & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^{(0)} \sin \lambda_3^{(0)} x & -\lambda_3^{(0)} \cos \lambda_3^{(0)} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^{(0)} \sin \lambda_2^{(0)} x & \lambda_2^{(0)} \cos \lambda_2^{(0)} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(\mu)}$$

$$(2.11) \quad C_{ix}^{(\mu)} = [c_{xmn}^{(\mu)}]_{(i)}, \quad \mu \neq 0, \quad m = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, 12,$$

$$c_{x11}^{(\mu)} = \exp[(\lambda_{r1}^{(\mu)} + j\lambda_{r2}^{(\mu)})x],$$

$$c_{x4,11}^{(\mu)} = \exp[(\lambda_{s1}^{(\mu)} + j\lambda_{s2}^{(\mu)})x],$$

$$c_{x12}^{(\mu)} = \exp[-(\lambda_{r1}^{(\mu)} + j\lambda_{r2}^{(\mu)})x],$$

$$c_{x4,22}^{(\mu)} = \exp[-(\lambda_{s1}^{(\mu)} + j\lambda_{s2}^{(\mu)})x],$$

$$\begin{aligned}
 c_{x23}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})x], & c_{x57}^{(\mu)} &= -(\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})c_{37}^{(\mu)}, \\
 c_{x24}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})x], & c_{x58}^{(\mu)} &= (\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})c_{x38}^{(\mu)}, \\
 c_{x25}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})x], & c_{x59}^{(\mu)} &= -(\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})c_{x39}^{(\mu)}, \\
 c_{x26}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})x], & c_{x5,10}^{(\mu)} &= (\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})c_{x23,10}^{(\mu)}, \\
 c_{x37}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})x], & c_{x63}^{(\mu)} &= (\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})c_{x23}^{(\mu)}, \\
 c_{x38}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{31}^{(\mu)} + j\lambda_{32}^{(\mu)})x], & c_{x64}^{(\mu)} &= -(\lambda_{21}^{(\mu)} + j\lambda_{22}^{(\mu)})c_{x24}^{(\mu)}, \\
 c_{x39}^{(\mu)} &= \exp[(\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})x], & c_{x65}^{(\mu)} &= (\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})c_{x25}^{(\mu)}, \\
 c_{x3,10}^{(\mu)} &= \exp[-(\lambda_{33}^{(\mu)} - j\lambda_{34}^{(\mu)})x], & c_{x66}^{(\mu)} &= -(\lambda_{23}^{(\mu)} - j\lambda_{24}^{(\mu)})c_{x26}^{(\mu)}.
 \end{aligned}$$

Pozostałe elementy macierzy  $C_{ix}^{(\mu)}$  są zerowe. Poszczególne wielkości  $\lambda^{(\mu)}$  oznaczają:

$$(2.12) \quad (\lambda_2^{(0)})_i = \sqrt{\frac{1}{(EI_2)_i} f_{\delta 1}^{w(0)}}, \quad (\lambda_3^{(0)})_i = \sqrt{\frac{1}{(EI_3)_i} f_{\delta 1}^{w(0)}},$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} (\lambda_{r1}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{\varrho_i}{2E_i[1+(\mu\omega\tau_i)^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_i)^2} - 1]}, \\ (\lambda_{r2}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{\varrho_i}{2E_i[1+(\mu\omega\tau_i)^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_i)^2} + 1]}, \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} (\lambda_{s1}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{(I_s)_i}{2C_i[1+(\mu\omega\tau_{si})^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_{si})^2} - 1]}, \\ (\lambda_{s2}^{(\mu)})_i = \mu\omega \sqrt{\frac{(I_s)_i}{2C_i[1+(\mu\omega\tau_{si})^2]} [\sqrt{1+(\mu\omega\tau_{si})^2} + 1]}, \end{cases}$$

$$(2.15) \quad \begin{cases} (\lambda_{21}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{22}^{(\mu)})_i - (d_{23}^{(\mu)})_i}, & (\lambda_{22}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{22}^{(\mu)})_i + (d_{23}^{(\mu)})_i}, \\ (\lambda_{23}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{24}^{(\mu)})_i - (d_{25}^{(\mu)})_i}, & (\lambda_{24}^{(\mu)})_i = (d_{21}^{(\mu)})_i \sqrt{(d_{24}^{(\mu)})_i + (d_{25}^{(\mu)})_i}, \end{cases}$$

$$(2.16) \quad \begin{cases} (d_{21}^{(\mu)})_i = \frac{1}{2\sqrt{(EI_2)_i[1+(\mu\omega\tau_i)^2]}}, \\ (d_{22}^{(\mu)})_i = \sqrt{[1+(\mu\omega\tau_i)^2] \{ (f_{\delta 1}^{w(0)})^2 + (r_2^{(\mu)})_i - f_{\delta 1}^{w(0)} \sqrt{2[(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} \}}, \\ (d_{23}^{(\mu)})_i = f_{\delta 1}^{w(0)} - \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} - \mu\omega\tau_i \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i - (z_2^{(\mu)})_i]}, \\ (d_{24}^{(\mu)})_i = \sqrt{[1+(\mu\omega\tau_i)^2] \{ (f_{\delta 1}^{w(0)})^2 + (r_2^{(\mu)})_i + f_{\delta 1}^{w(0)} \sqrt{2[(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} \}}, \\ (d_{25}^{(\mu)})_i = f_{\delta 1}^{w(0)} + \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i + (z_2^{(\mu)})_i]} + \mu\omega\tau_i \sqrt{\frac{1}{2} [(r_2^{(\mu)})_i - (z_2^{(\mu)})_i]}, \\ (z_2^{(\mu)})_i = (f_{\delta 1}^{w(0)})^2 + 4(EI_2 \varrho A)_i (\mu\omega)^2, \quad (r_2^{(\mu)})_i = \sqrt{(z_2^{(\mu)})_i^2 + [4(EI_2 \varrho A)_i (\mu\omega)^2 \tau_i]^2}. \end{cases}$$

Jak łatwo stwierdzić, uwzględnienie wpływu odkształceń postaciowych i bezwładności obrotu zgodnie z (2.5) wymaga zastąpienia w zależnościach (2.16) wielkości  $f_{\delta 1}^{w(0)}$  przez

$$f_{\delta 1}^{w(0)} + (\mu\omega)^2 (\varrho I_2)_i \left[ 1 + \left( k_2 \frac{E}{G} \right)_i \right]$$

oraz wielkości  $A_i$  przez

$$A_i - (\mu\omega)^2 \left( \rho k_2 \frac{I_2}{G} \right)_i.$$

Wielkości  $(\lambda_{31}^{(\mu)})_1$ ,  $(\lambda_{31}^{(\mu)})_i$ ,  $(\lambda_{33}^{(\mu)})_i$ ,  $(\lambda_{34}^{(\mu)})_i$  różnią się od wielkości (2.15) jedynie występowaniem  $(I_3)_i$  zamiast  $(I_2)_i$  oraz  $(k_3)_i$ , zamiast  $(k_2)_{i1}$ . W dalszej części p. 2 pominięto indeks  $\mu$  w oznaczeniach elementów macierzy opatrzonych tym indeksem.

Na podstawie zależności (2.9) oraz znanych relacji pomiędzy siłami wewnętrznymi  $p_{ix\alpha}$  i przemieszczeniami  $u_{ix\alpha}$  [1] zapisać można macierz kolumnową amplitud  $\mu$ -tych składowych tych sił  $p_{ix}^{(\mu)} = \{p_{ix\alpha}^{(\mu)}\}$  w postaci

$$(2.17) \quad p_{ix}^{(\mu)} = A_{ix}^{(\mu)} a_i^{(\mu)}$$

gdzie:

$$(2.18) \quad A_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_3 \lambda_3^3 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \cos \lambda_3 x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & CI_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_3 \lambda_3^2 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^2 \sin \lambda_3 x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(2.19) \quad A_{ix}^{(\mu)} = [a_{xmn}]_{(i)}, \quad \mu \neq 0, \quad m = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, 12,$$

$$\begin{aligned} a_{x11} &= EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2}) c_{x11}, & a_{x4*11} &= CI_s(\lambda_{51} + j\lambda_{52}) c_{x4,11}, \\ a_{x12} &= -EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2}) c_{x12}, & a_{x4,12} &= -CI_s(\lambda_{51} + j\lambda_{52}) c_{x4,12}, \\ a_{x23} &= -EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^3 c_{x23}, & a_{x57} &= EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 c_{x37}, \\ a_{x24} &= EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^3 c_{x24}, & a_{x58} &= EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 c_{x38}, \\ a_{x25} &= -EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^3 c_{x25}, & a_{x59} &= EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2 c_{x39}, \\ a_{x26} &= EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^3 c_{x26}, & a_{x5,10} &= EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2 c_{x3,10}, \\ a_{x37} &= -EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^3 c_{x37}, & a_{x63} &= -EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 c_{x23}, \\ a_{x38} &= EI_3(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^3 c_{x38}, & a_{x64} &= -EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 c_{x24}, \\ a_{x39} &= -EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^3 c_{x39}, & a_{x65} &= -EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2 c_{x25}, \\ a_{x3,10} &= EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34})^3 c_{x3,10}. & a_{x66} &= -EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2 c_{x26}. \end{aligned}$$

Pozostałe elementy macierzy  $A_{ix}^{(\mu)}$  są zerowe.

Znajomość macierzy  $C_{ix}^{(\mu)}$  oraz  $A_{ix}^{(\mu)}$  umożliwia wyznaczenie macierzy przejścia, wiążących macierz kolumnową współczynników  $a_{i+1}^{(\mu)}$  dla  $(i+1)$ -go odcinka z macierzą  $a_i^{(\mu)}$  w przypadkach występowania sił skupionych, masy dyskretnej, sprzęgła elastycznego etc. Poniżej ograniczono się do przypadku, gdy pomiędzy  $i$ -tym oraz  $(i+1)$ -ym odcinkiem występują siły skupione  $f_{i\alpha}$  (wymuszenia zewnętrzne lub reakcje łożyska). Gdy osie lokalnych układów współrzędnych obu sąsiednich odcinków są do siebie odpowiednio równoległe, zachodzą warunki [1]:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} u_{i\alpha}^{(\mu)} &= u_{i+1,0\alpha}^{(\mu)}, & \alpha &= 1, \dots, 6, \\ p_{i\alpha}^{(\mu)} &= p_{i+1,0\alpha}^{(\mu)} + f_{i\alpha}^{(\mu)}, & \alpha &= 1, \dots, 4, \\ p_{i\alpha}^{(\mu)} &= p_{i+1,0\alpha}^{(\mu)} - f_{i\alpha}^{(\mu)}, & \sigma &= 5, 6 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do (2.20) wyrażeń określających amplitudy przemieszczeń i sił wewnętrznych zgodnie z (2.9) i (2.17) wyznaczyć można poszczególne współczynniki  $a_{i+1,q}^{(\mu)}$  ( $q = 1, \dots, 12$ ). Wynikowa zależność przy oznaczeniu  $a_{i+1}^{(\mu)} = \{a_{i+1,q}^{(\mu)}\}$ ,  $f_i^{(\mu)} = \{f_{i2}^{(\mu)}\}$  ma postać:

$$(2.21) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\mu)} a_i^{(\mu)} + F_i^{(\mu)} f_i^{(\mu)}, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

$B_i^{(\mu)}$  jest macierzą blokowo diagonalną

$$(2.22) \quad B_i^{(\mu)} = [B_{i1}^{(\mu)}, \dots, B_{i4}^{(\mu)}]_{12},$$

$$B_{i1}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(EA)_i}{(EA)_{i+1}} & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{i4}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(CI_s)_i}{(CI_s)_{i+1}} & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & 0 & 0 \\ -\frac{(EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} & \frac{(EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} & 0 & 0 \\ \frac{(EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} - (\lambda_2 \sin \lambda_2 l)_i & (\lambda_2 \cos \lambda_2 l)_i - \frac{(EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}} & 1 & 0 \\ \cos(\lambda_2 l)_i - \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & \sin(\lambda_2 l)_i - \frac{(EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 l)_i}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}} & l_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{i1}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} b_1 c_{111} & b_2 c_{112} \\ b_2 c_{111} & b_1 c_{112} \end{bmatrix}_{(i)}, \quad B_{i4}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} b_3 c_{14,11} & b_4 c_{14,12} \\ b_4 c_{14,11} & b_3 c_{14,12} \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$B_{i2}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} (b_5 - b_7) c_{123} & (b_6 - b_8) c_{124} & (b_9 - b_{11}) c_{125} & (b_{10} - b_{12}) c_{126} \\ (b_6 - b_8) c_{123} & (b_5 - b_7) c_{124} & (b_{10} - b_{12}) c_{125} & (b_9 - b_{11}) c_{126} \\ (b_{13} - b_{15}) c_{123} & (b_{14} - b_{16}) c_{124} & (b_{17} - b_{19}) c_{125} & (b_{18} - b_{20}) c_{126} \\ (b_{14} - b_{16}) c_{123} & (b_{13} - b_{15}) c_{124} & (b_{18} - b_{20}) c_{125} & (b_{17} - b_{19}) c_{126} \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$(b_{1,2})_i = \frac{[EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_{i+1} \pm [EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_i}{2[EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_{i+1}},$$

$$(b_{3,4})_i = \frac{[CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_{i+1} \pm [CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_i}{2[CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_{i+1}},$$

$$(b_{5,6})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_i [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i],$$

$$(b_{7,8})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_{i+1} [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i],$$

$$(b_{9,10})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_i [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i],$$

$$(b_{11,12})_i = \frac{1}{e_{11}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_{i+1} [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i],$$

$$(b_{13,14})_i = \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_{i+1} [\lambda_{23} - j\lambda_{24}]_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i],$$

$$\begin{aligned}
(b_{15,16})_i &= \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_i [(\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1} \pm (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_i], \\
(b_{17,18})_i &= \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2]_{i+1} [(\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i], \\
(b_{19,20})_i &= \frac{1}{e_{12}} [EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]_i [(\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1} \pm (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_i], \\
e_{11} &= 2 \{EI_2(\lambda_{21} + j\lambda_{22}) [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 - (\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]\}_{i+1}, \\
e_{12} &= 2 \{EI_2(\lambda_{23} - j\lambda_{24}) [(\lambda_{21} + j\lambda_{22})^2 - (\lambda_{23} - j\lambda_{24})^2]\}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Macierze  $B_{i3}^{(0)}$  i  $B_{i3}^{(\mu)}$  różnią się od macierzy  $B_{i2}^{(0)}$  i  $B_{i2}^{(\mu)}$  występowaniem  $I_3$ ,  $\lambda_3$  i  $\lambda_{3\gamma}$  ( $\gamma = 1, \dots, 4$ ) zamiast  $I_2$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_{2\gamma}$ . Wielkości  $c_{imn}$  są elementami macierzy  $C_{ix}^{(\mu)}$  (2.11) dla  $x = I_i$ . Macierz  $F_1^{(\mu)}$  ma postać:

$$(2.23) \quad F_1^{(\mu)} = [h_{rs}]_{12 \times 6}.$$

Elementy  $h_{rs}$  wynoszą dla  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned}
h_{11} &= -\frac{1}{(EA)_{i+1}}, \quad h_{36} = h_{52} = -h_{66} = \frac{1}{(EI_2 \lambda_2^2)_{i+1}}, \quad h_{42} = -\frac{1}{(EI_2 \lambda_2^3)_{i+1}}, \\
h_{83} &= -\frac{1}{(EI_3 \lambda_3^3)_{i+1}}, \quad h_{93} = h_{10,5} = -h_{75} = \frac{1}{(EI_3 \lambda_3^3)_{i+1}}, \quad h_{11,4} = -\frac{1}{(CI_s)_{i+1}}
\end{aligned}$$

oraz dla  $\mu \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
h_{11} &= -h_{21} = -\frac{1}{2[EA(\lambda_{r1} + j\lambda_{r2})]_{i+1}}, \quad h_{32} = -h_{42} = \frac{1}{e_{11}}, \\
h_{36} &= h_{46} = -\frac{1}{e_{11}} (\lambda_{21} + j\lambda_{22})_{i+1}, \quad h_{52} = -h_{62} = -\frac{1}{e_{12}}, \\
h_{56} &= h_{66} = \frac{1}{e_{12}} (\lambda_{23} - j\lambda_{24})_{i+1}, \quad h_{73} = -h_{83} = \frac{1}{e_{13}}, \\
h_{75} &= h_{85} = -\frac{1}{e_{13}} (\lambda_{31} + j\lambda_{32})_{i+1}, \quad h_{93} = -h_{10,3} = -\frac{1}{e_{14}}, \\
h_{95} &= h_{10,5} = \frac{1}{e_{14}} (\lambda_{33} - j\lambda_{34})_{i+1}, \quad h_{11,4} = -h_{12,4} = -\frac{1}{2[CI_s(\lambda_{s1} + j\lambda_{s2})]_{i+1}}, \\
e_{13} &= 2 \{EI(\lambda_{31} + j\lambda_{32}) [(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 - (\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2]\}_{i+1}, \\
e_{14} &= 2 \{EI_3(\lambda_{33} - j\lambda_{34}) [(\lambda_{31} + j\lambda_{32})^2 - (\lambda_{33} - j\lambda_{34})^2]\}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Pozostałe elementy macierzy  $F_1^{(\mu)}$  są zerowe.

W przypadku, gdy odcinki  $i$ -ty oraz  $(i+1)$ -y nie różnią się stałymi materiałowymi, macierz  $B_i^{(\mu)}$  ( $\mu \neq 0$ ) staje się diagonalna:

$$(2.24) \quad B_i^{(\mu)} = [c_{111}, c_{112}, c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126}, c_{137}, c_{138}, c_{139}, c_{13,10}, c_{14,11}, c_{14,12}]_{(i)}.$$

Oznacza to, że mnożenie  $B_{i+1}^{(\mu)} \cdot B_i^{(\mu)} \dots$  sprowadza się wówczas do sumowania długości odpowiednich odcinków wałów w wykładnikach funkcji eksponencjalnych  $c_{imn}$ . Podobnie

postępuje się przy mnożeniu  $B_{i+1}^{(0)} \cdot B_i^{(0)} \dots$  gdy stałe materiałowe kolejnych odcinków są jednakowe.

Sposób wyznaczania drgań wymuszonych linii wałów na podstawie powyższych zależności jest analogiczny jak w [1]. Uwzględnić przy tym należy, że zgodnie z (2.13) ÷ (2.16), dla odcinków wału o własnościach lepkosprężystych nie zachodzą dla  $\nu = |\mu|$  równości:

$$C_{ix}^{(\nu)} = C_{ix}^{(-\nu)}, A_{ix}^{(\nu)} = A_{ix}^{(-\nu)} \text{ etc.},$$

jak to miało miejsce dla idealnie sprężystych odcinków wału [1]. Mamy tu zatem

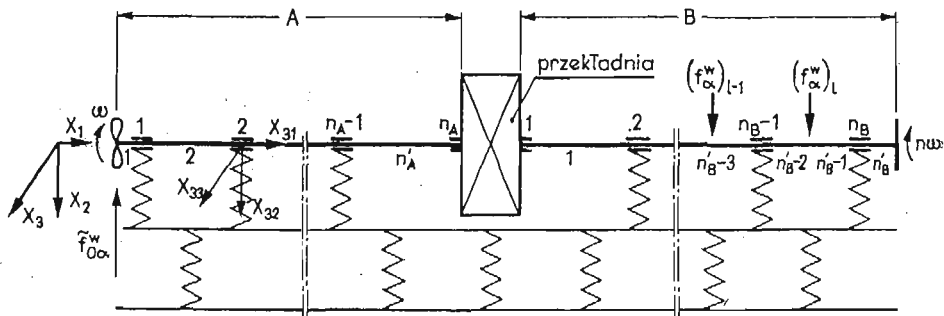
$$(2.25) \quad u_{ix} = \sum_{\nu} [(C_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\nu)} + C_{ix}^{(-\nu)} a_i^{(-\nu)}) \cos \nu \omega t + j(C_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\nu)} - C_{ix}^{(-\nu)} a_i^{(-\nu)}) \sin \nu \omega t],$$

tnz. wzdłuż odcinka o własnościach lepkosprężystych kąty przesunięć fazowych przemieszczeń (sił wewnętrznych) względem wymuszeń są zmienne.

### 3. Drgania wymuszone linii wałów w układach przekładniowych z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów

Uwzględnienie asymetrii sztywności na zginanie przy pominięciu sprzężeń pomiędzy poszczególnymi rodzajami drgań nie wpływa na drgania podłużne i skrętne linii wałów, dlatego też poniżej ograniczono się do opisu drgań giętnych na przykładzie układu przedstawionego schematycznie na rys. 1. Zakłada się, że część A linii wałów zawiera odcinki o kołowej symetrii sztywności na zginanie, natomiast odcinki w części B wykazują asymetrię sztywności na zginanie. Układ ten może być zatem traktowany jako model linii wałów okrętowej siłowni spalinowej z przekładnią, w którym pominięto czynniki nieistotne dla poniższych rozważań (np. wpływ innych mas dyskretnych poza śrubą okrętową).

W celu uproszczenia opisu można drgania w części A rozpatrywać w nieruchomych układach współrzędnych, których osie są odpowiednio równoległe do osi układu odniesienia konstrukcji podpierającej  $x_1, x_2, x_3$ . Drgania w części B wymagają opisu w ruchomych



Rys. 1. Model obliczeniowy układu przekładniowego,  $\tilde{f}_{0\alpha}^w, (f_{\alpha}^w)_n$  — uogólnione siły zewnętrzne;  $\omega$  — prędkość kątowa wirowania wałów w części A;  $n\omega$  — prędkość kątowa wirowania wału w części B; 1, 2, ...,  $n_A$ ; 1, 2, ...,  $n_B$  — numery kolejnych łożysk w A i B; 1, 2, ...,  $n'_A$ ; 1, 2, ...,  $n'_B$  — numery kolejnych odcinków obliczeniowych w A i B;  $x_{31}, x_{32}, x_{33}$  — nieruchomy układ współrzędnych odcinka nr 3;  $X_1, X_2, X_3$  — nieruchomy układ odniesienia konstrukcji podpierającej.

układach współrzędnych, których odpowiednie osie są równoległe do głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego danego odcinka [1]. Warunki brzegowe dla części A zapisać można w postaci:

$$(3.1) \quad \check{p}_{10\alpha}^A \mp m_{0\alpha} \ddot{u}_{10\alpha}^A \mp b_{0\alpha} \dot{u}_{10\alpha}^A = \mp \check{f}_{0\alpha}^w, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6,$$

$$(3.2) \quad \check{p}_{n'_A\alpha}^A = \pm \check{f}_{n'_A\alpha}^A.$$

Przy podwójnych znakach "+" i "-" górny znak dotyczy  $\alpha = 2, 3$ , dolny —  $\alpha = 5, 6$ . Wielkości oznaczone wężykiem odnoszą się do nieruchomego układu współrzędnych. Współczynniki  $m_{0\alpha}$  i  $c_{0\alpha}$  są odpowiednimi elementami macierzy bezwładności śruby okrętowej (z uwzględnieniem masy wody towarzyszącej) i macierzy współczynników lepkościowego tłumienia wody, natomiast  $\check{f}_{0\alpha}^w$  jest znaną siłą działającą na śrubę okrętową w kierunku  $\alpha$ , którą przedstawić można w postaci analogicznej do (2.6):

$$(3.3) \quad \check{f}_{0\alpha}^w = \sum_{\mu} \check{f}_{0\alpha}^{w(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad \mu = \dots, \nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

Siła  $\check{f}_{n'_A\alpha}^A$  jest nieznaną reakcją działającą w kierunku  $\alpha$  na odcinek  $n'_A$  w łożysku o numerze  $n_A$ . Warunki brzegowe dla części B mają postać:

$$(3.4) \quad P_{10\alpha}^B = \mp f_{0\alpha}^B,$$

$$(3.5) \quad P_{n'_B\alpha}^B = 0.$$

gdzie  $f_{0\alpha}^B$  jest nieznaną reakcją łożyska nr 1 w kierunku  $\alpha$ .

W części B działają wymuszenia od silnika, które w ruchomych układach współrzędnych przy prędkości kątowej silnika  $n\omega$  wynoszą:

$$(3.6) \quad (f_{\alpha}^w)_h = \sum_{\mu} (f_{\alpha}^{w(\mu\xi n)})_h \exp(j\mu\xi n\omega t), \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu \dots$$

Indeksem  $h$  oznaczono numer punktu przyłożenia sił wymuszających w części B, natomiast  $\xi$  jest liczbą cykli pracy silnika, przypadającą na 1 obrót wału ( $\xi = \frac{1}{2}$  dla silników czterosuwowych i  $\xi = 1$  dla dwusuwowych).

Wprowadzając ciągi indeksów  $1, 2, \dots, n_A$  oraz  $1, 2, \dots, n_B$ , odpowiadających kolejnym podporom łożyskowym w części A i B, utworzyć można macierze kolumnowe reakcji w łożyskach i przemieszczeń wału w miejscach podpór łożyskowych:

$$(3.7) \quad \check{f}^A = \{\check{f}_i^A\}, \check{f}_i^A = \{\check{f}_{i\alpha}^A\}, \check{u}^A = \{\check{u}_i^A\}, \check{u}_i^A = \{\check{u}_{i\alpha}^A\}, i = 1, \dots, n_A, \alpha = 2, 3, 5, 6,$$

$$(3.8) \quad f^B = \{f_i^B\}, f_i^B = \{f_{i\alpha}^B\}, u^B = \{u_i^B\}, u_i^B = \{u_{i\alpha}^B\}, i = 1, \dots, n_B, \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

W celu uwzględnienia wpływu podatności fundamentów należy przetransformować wielkości (3.8) do nieruchomego układu współrzędnych:

$$\check{f}^B = \Pi f^B, \quad \check{u}^B = \Pi u^B,$$

$$\Pi = \check{\Pi} \exp(-jn\omega t) + \hat{\Pi} \exp(jn\omega t),$$

$$\check{\Pi} = [\check{\Pi}_i]_{4n_B}, \quad \hat{\Pi} = [\hat{\Pi}_i]_{4n_B}, \quad i = 1, \dots, n_B,$$



$$(3.9) \quad \check{H}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & j & 1 \end{bmatrix} \exp(-j\delta_i), \quad \hat{H}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & -j & 1 \end{bmatrix} \exp(j\delta_i),$$

gdzie  $\delta_i$  oznacza kąt obrotu lokalnego ruchomego układu współrzędnych odcinka podpartego na swym lewym końcu  $i$ -tym łożyskiem, mierzony względem nieruchomego układu współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$  w kierunku wirowania wału silnika w chwili  $t = 0$  [1]. Jak wynika z zależności (3.3), (3.6) i (3.9), na skutek wzajemnych oddziaływań obu części linii wałów i fundamentu należy przewidywać następującą postać nieznanych wielkości:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \check{u}_{ix}^A &= \sum_{\mu, k} \{ \check{u}_{ix}^{A(\mu+kn)} \exp[j(\mu+kn)\omega t] + \check{u}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} \exp[j(\mu\xi+k)n\omega t] \}, \quad i = 1, \dots, n'_A, \\ \check{p}_{ix}^A &= \sum_{\mu, k} \{ \check{p}_{ix}^{A(\mu+kn)} \exp[j(\mu+kn)\omega t] + \check{p}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} \exp[j(\mu\xi+k)n\omega t] \}, \\ \check{f}_i^A &= \sum_{\mu, k} \{ \check{f}_i^{A(\mu+kn)} \exp[j(\mu+kn)\omega t] + \check{f}_i^{A(\mu\xi+kn)} \exp[j(\mu\xi+k)n\omega t] \}, \\ k &= \dots, -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s, \dots, \quad \check{u}_{ix}^A = \{ \check{u}_{ix\alpha}^A \}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \\ \check{u}_{ix}^{A(\mu+kn)} &= \{ \check{u}_{ix\alpha}^{A(\mu+kn)} \}, \quad \check{u}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} = \{ \check{u}_{ix\alpha}^{A(\mu\xi+kn)} \} \text{ etc.} \end{aligned}$$

i analogicznie dla wielkości  $u_{ix}^B, p_{ix}^B, f_i^B$  w części B. Źródłem składowych o częstościach  $(\mu+kn)\omega$  są wymuszenia działające na śrubę, a składowych o częstościach  $(\mu\xi+kn)\omega$  — wymuszenia od silnika. Liczba członów po  $k$  w szeregach (3.10) zależy od krotności obiegu składowych o częstościach  $\mu\omega$  i  $\mu\xi n\omega$  przez pęta sprzężeń pomiędzy fundamentem i linią wałów, a więc do tłumienia w układzie. Na skutek tłumienia ze wzrostem wartości  $|k|$  amplitudy szukanych wielkości maleją. Występujące w (3.10) macierze kolumnowe amplitud przemieszczeń i sił wewnętrznych w przekroju  $x$   $i$ -tego odcinka wyrażają się zgodnie z (2.9) i (2.17) zależnościami:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \check{u}_{ix}^{A(\mu+kn)} &= C_{ix}^{A(\mu+kn)} a_i^{A(\mu+kn)}, \quad \check{p}_{ix}^{A(\mu+kn)} = A_{ix}^{A(\mu+kn)} a_i^{A(\mu+kn)}, \\ \check{u}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} &= C_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} a_i^{A(\mu\xi+kn)}, \quad \check{p}_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} = A_{ix}^{A(\mu\xi+kn)} a_i^{A(\mu\xi+kn)}, \\ a_i^{A(\mu+kn)} &= \{ a_{iq}^{A(\mu+kn)} \}, \quad a_i^{A(\mu\xi+kn)} = \{ a_{iq}^{A(\mu\xi+kn)} \}, \quad q = 3, 4, \dots, 10. \end{aligned}$$

Macierze  $C_{ix}^{A(\mu+kn)}, A_{ix}^{A(\mu+kn)}$  etc. stanowią bloki macierzy (2.10), (2.11), (2.18) i (2.19) dotyczące drgań giętych, w których należy  $\mu$  zastąpić przez  $(\mu+kn)$  lub  $(\mu\xi+kn)$  oraz podstawić  $(I_2)_i = (I_3)_i, (k_2)_i = (k_3)_i$  w blokach dotyczących części A. Podobnie wykorzystując odpowiednie bloki macierzy (2.22), (2.23) i relację (2.21) można dla konkretnej linii wałów sprowadzić warunki brzegowe (3.1), (3.2) do postaci:

$$(3.12) \quad \begin{cases} A^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} = 0, & k \neq 0, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots, \\ A^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} + \bar{E} \check{f}_0^{\nu(\mu)} = 0, & k = 0, \\ A^{A(\mu\xi+kn)} a_1^{A(\mu\xi+kn)} = 0, & k = \dots, -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s, \dots, \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} \bar{B}^{A(\mu+kn)} a_1^{A(\mu+kn)} + \sum_{j=1}^{n_A-1} \check{B}_j^{A(\mu+kn)} \check{f}_j^{A(\mu+kn)} = \bar{E} \check{f}_{n_A}^{A(\mu+kn)}, \\ \bar{B}^{A(\mu\xi+kn)} a_1^{A(\mu\xi+kn)} + \sum_{j=1}^{n_A-1} \check{B}_j^{A(\mu\xi+kn)} \check{f}_j^{A(\mu\xi+kn)} = \bar{E} \check{f}_{n_A}^{A(\mu\xi+kn)}, \end{cases}$$

gdzie:

$$\tilde{f}_0^{w(\mu)} = \{\tilde{f}_{0\alpha}^{w(\mu)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Przy tworzeniu analogicznych wyrażeń z warunków (3.4) i (3.5) należy uwzględnić, że gdy osie lokalnych układów współrzędnych sąsiednich odcinków nie są do siebie odpowiednio równoległe ( $\delta_i \neq \delta_{i+1}$ ), zależność (2.21) winna być wyznaczona po odniesieniu wielkości dotyczących  $i$ -tego odcinka w warunkach (2.20) do lokalnego układu współrzędnych  $(i+1)$ -go odcinka. Ogólna postać wyrażeń analogicznych do (3.12) i (3.13), uzyskiwanych na podstawie warunków (3.4) i (3.5), jest następująca:

$$(3.14) \quad \begin{cases} A^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \bar{E} f_1^{B(\mu+kn)} = 0, \\ A^{B(\mu\xi n+kn)} a_1^{B(\mu\xi n+kn)} + \bar{E} f_1^{B(\mu\xi n+kn)} = 0, \end{cases}$$

$$(3.15) \quad \begin{cases} \bar{B}^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \sum_{j=2}^{n_B} \tilde{B}_j^{B(\mu+kn)} f_j^{B(\mu+kn)} = 0, \\ \bar{B}^{B(\mu\xi n+kn)} a_1^{B(\mu\xi n+kn)} + \sum_{j=2}^{n_B} \tilde{B}_j^{B(\mu\xi n+kn)} f_j^{B(\mu\xi n+kn)} = 0, \quad k \neq 0, \\ \bar{B}^{B(\mu\xi n+kn)} a_1^{B(\mu\xi n+kn)} + \sum_{j=2}^{n_B} \tilde{B}_j^{B(\mu\xi n+kn)} f_j^{B(\mu\xi n+kn)} + \sum_{h=1}^l B_h^{B(\mu\xi n+kn)} (f^{w(\mu\xi n)})_h = 0, \quad k = 0, \end{cases}$$

gdzie:

$l$  — liczba punktów przyłożenia znanych sił wymuszających w części B.

$$(f^{w(\mu\xi n)})_h = \{(f_{\alpha}^{w(\mu\xi n)})_h\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

Zależności dotyczące składowych o częstościach  $(\mu+kn)\omega$  w warunkach (3.14) i (3.15) zapisać można jednym równaniem:

$$(3.16) \quad \bar{A}^{B(\mu+kn)} a_1^{B(\mu+kn)} + \tilde{B}^{B(\mu+kn)} f^{B(\mu+kn)} = 0,$$

gdzie:

$$\bar{A}^{B(\mu+kn)} = \begin{bmatrix} A^{B(\mu+kn)} \\ \bar{B}^{B(\mu+kn)} \end{bmatrix}_8, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \bar{E} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2^{B(\mu+kn)} & \tilde{B}_3^{B(\mu+kn)} & \dots & \tilde{B}_{n_B}^{B(\mu+kn)} \end{bmatrix}_{8 \times 4n_B}.$$

$$f^{B(\mu+kn)} = \{f_i^{B(\mu+kn)}\}, \quad i = 1, \dots, n_B, \quad f_i^{B(\mu+kn)} = \{f_{i\alpha}^{B(\mu+kn)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6.$$

Poniżej wyznaczono amplitudy składowych o częstościach  $(\mu+kn)\omega$ , gdyż postępowanie przy wyznaczaniu amplitud składowych o częstościach  $(\mu\xi n+kn)\omega$  jest analogiczne. Rozpatrzono ogólny przypadek, gdy analiza winna objąć składowe o częstościach  $(\mu+kn)\omega$  dla  $\mu = -r, \dots, -1, 0, 1, \dots, r$  oraz  $k = -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s$  ( $r, s$  — dowolne liczby naturalne). Niezbędna w tym celu jest znajomość macierzy współczynników podatności dynamicznej fundamentu  $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$ , wiążących macierze kolumnowe amplitud reakcji w łożyskach i przemieszczeń wałów w miejscach podpór łożyskowych:

$$(3.17) \quad \tilde{u}^{(\mu+kn)} = -\tilde{D}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{(\mu+kn)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\mu+kn)} &= \{\tilde{u}_i^{A(\mu+kn)}, \tilde{u}_i^{B(\mu+kn)}\}, \quad \tilde{f}^{(\mu+kn)} = \{\tilde{f}^{A(\mu+kn)}, \tilde{f}^{B(\mu+kn)}\}, \\ \tilde{u}_i^{A(\mu+kn)} &= \{\tilde{u}_{i\alpha}^{A(\mu+kn)}\}, \quad i = 1, \dots, n_A, \quad \tilde{u}_i^{A(\mu+kn)} = \{\tilde{u}_{i\alpha}^{A(\mu+kn)}\}, \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, \\ \tilde{u}_i^{B(\mu+kn)} &= \{u_i^{B(\mu+kn)}\}, \quad i = 1, \dots, n_B \text{ etc.} \end{aligned}$$

Uogólniając zależności wyprowadzone w [1], macierz  $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$  traktuje się jako sumę macierzy współczynników podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej linię wałów  $D^{(\mu+kn)}$  i blokowo diagonalnej macierzy współczynników podatności dynamicznej filmu olejowego w łożyskach  $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$ :

$$(3.18) \quad \tilde{D}^{(\mu+kn)} = D^{(\mu+kn)} + \tilde{D}^{(\mu+kn)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D^{(\mu+kn)} &= [D_{ij}^{(\mu+kn)}], \quad \tilde{D}_i^{(\mu+kn)} = [\tilde{D}_i^{(\mu+kn)}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n_A + n_B, \\ D_{ij}^{(\mu+kn)} &= [d_{ij\alpha\beta}^{(\mu+kn)}], \quad \tilde{D}_i^{(\mu+kn)} = [\tilde{d}_{i\alpha\beta}^{(\mu+kn)}], \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

$\tilde{d}_{i\alpha\beta}^{(\mu+kn)}$  — zespolony współczynnik podatności dynamicznej filmu olejowego w  $i$ -tym łożysku, określony analogicznie jak  $d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}$  w [1]. Macierz  $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$  w zależności (3.17) zawiera elementy odnoszące się do  $\alpha = 2, 3, 5, 6$  (tj. do drgań giętnych) i jest stopnia  $4(n_A + n_B)$ . W macierzy  $\tilde{D}^{(\mu+kn)}$  można wydzielić podmacierze

$$(3.19) \quad -D^{(\mu+kn)} = \left[ \begin{array}{c|c} D_{AA}^{(\mu+kn)} & D_{AB}^{(\mu+kn)} \\ \hline D_{BA}^{(\mu+kn)} & D_{BB}^{(\mu+kn)} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} 4n_A \text{ wierszy} \\ \} 4n_B \text{ wierszy} \end{array} \right\} 4n_A \text{ kolumn}$$

Wartości modułów elementów macierzy  $D_{AB}^{(\mu+kn)}$  i  $D_{BA}^{(\mu+kn)}$  są miarą sprzężeń pomiędzy podporami łożyskowymi w części  $A$  a podporami łożyskowymi w części  $B$ , decydując tym samym o celowości łącznego rozpatrywania drgań giętnych obu części linii wałów. Przy założeniu, że sprzężenia te nie są zaniedbywalne, z (3.17) i (3.19) otrzymuje się:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(\mu+kn)} &= D_{AA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{AB}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{B(\mu+kn)}, \\ \tilde{u}^{B(\mu+kn)} &= D_{BA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{BB}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{B(\mu+kn)}. \end{aligned}$$

Zgodnie z (3.9) mamy

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \tilde{f}^{B(\mu+kn)} &= \check{\Pi} f^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} f^{B[\mu+(k-1)n]}, \\ \tilde{u}^{B(\mu+kn)} &= \check{\Pi} u^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} u^{B[\mu+(k-1)n]}, \end{aligned}$$

zatem

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(\mu+kn)} &= D_{AA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{AB}^{(\mu+kn)} (\check{\Pi} f^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} f^{B[\mu+(k-1)n]}), \\ \check{\Pi} u^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} u^{B[\mu+(k-1)n]} &= D_{BA}^{(\mu+kn)} \tilde{f}^{A(\mu+kn)} + D_{BB}^{(\mu+kn)} (\check{\Pi} f^{B[\mu+(k+1)n]} + \hat{\Pi} f^{B[\mu+(k-1)n]}). \end{aligned}$$

Pełny układ równań (3.22) dla wszystkich uwzględnianych składowych zapisać można w postaci:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{A(r,s)} &= D_{AA}^{(r,s)} \tilde{f}^{A(r,s)} + D_{AB}^{(r,s)} f^{B(r,s)}, \\ \check{\Pi} u^{B(r,s)} &= D_{BA}^{(r,s)} \tilde{f}^{A(r,s)} + D_{BB}^{(r,s)} f^{B(r,s)}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{A(r,s)} &= \{\tilde{u}^{A(r-s)}, \tilde{u}^{A(r-s+1)}, \dots, \tilde{u}^{A(r,s-1)}, \tilde{u}^{A(r,s)}\}, \\ \tilde{u}^{A(r,k)} &= \{\tilde{u}^{A(-r+kn)}, \tilde{u}^{A(-r+1+kn)}, \dots, \tilde{u}^{A(r-1+kn)}, \tilde{u}^{A(r+kn)}\}, \\ D_{AA}^{(r,s)} &= [D_{AA}^{(r-s)}, D_{AA}^{(r-s+1)}, \dots, D_{AA}^{(r,s-1)}, D_{AA}^{(r,s)}]_{4n_A(2r+1)(2s+1)}, \\ D_{AA}^{(r,k)} &= [D_{AA}^{(-r+kn)}, D_{AA}^{(-r+1+kn)}, \dots, D_{AA}^{(r-1+kn)}, D_{AA}^{(r+kn)}]_{4n_A(2r+1)},\end{aligned}$$

$$\Pi^{(r,s)} = \begin{bmatrix} 0 & \check{H}^{(r)} & & & \\ \hat{H}^{(r)} & 0 & \check{H}^{(r)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \hat{H}^{(r)} & 0 & \check{H}^{(r)} \\ & & & \hat{H}^{(r)} & 0 \end{bmatrix}_{4n_B(2r+1)(2s+1)}$$

$$\hat{H}^{(r)} = [\hat{H}_1, \hat{H}_2, \dots, \hat{H}_{4n_B(2r+1)}], \quad \check{H}^{(r)} = [\check{H}_1, \check{H}_2, \dots, \check{H}_{4n_B(2r+1)}],$$

$$D_{BB}^{(r,s)} = \begin{bmatrix} 0 & \check{D}_{BB}^{(r,-s)} & & & \\ \hat{D}_{BB}^{(r,-s+1)} & 0 & \check{D}_{BB}^{(r,-s+1)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \hat{D}_{BB}^{(r,s-1)} & 0 & \check{D}_{BB}^{(r,s-1)} \\ & & & \hat{D}_{BB}^{(r,s)} & 0 \end{bmatrix}_{4n_B(2r+1)(2s+1)}$$

$$\check{D}_{BB}^{(r,k)} = [D_{BB}^{(-r+kn)} \check{H}_1, D_{BB}^{(-r+1+kn)} \check{H}_2, \dots, D_{BB}^{(r-1+kn)} \check{H}_{4n_B(2r+1)}, D_{BB}^{(r+kn)} \check{H}_{4n_B(2r+1)}],$$

$$\hat{D}_{BB}^{(r,k)} = [D_{BB}^{(-r+kn)} \hat{H}_1, D_{BB}^{(-r+1+kn)} \hat{H}_2, \dots, D_{BB}^{(r-1+kn)} \hat{H}_{4n_B(2r+1)}, D_{BB}^{(r+kn)} \hat{H}_{4n_B(2r+1)}].$$

Pozostałe bloki macierzy  $\Pi^{(r,s)}$  i  $D_{BB}^{(r,s)}$  są zerowe. Macierze kolumnowe  $u^{B(r,s)}$ ,  $f^{A(r,s)}$ ,  $f^{B(r,s)}$  tworzy się analogicznie jak  $\tilde{u}^{A(r,s)}$ , macierz  $D_{BA}^{(r,s)}$  tworzy się jak  $D_{AA}^{(r,s)}$ , a macierz  $D_{AB}^{(r,s)}$  — jak  $D_{BB}^{(r,s)}$ .

Postępując podobnie z warunkami (3.12), (3.13) i (3.16) jak z równaniami (3.22) otrzymuje się:

$$(3.24) \quad \begin{aligned}A^A(r,s) a_1^A(r,s) + \bar{E}^{(r,s)} \tilde{f}_0^w(r,s) &= 0, \\ \bar{B}^A(r,s) a_1^A(r,s) + \tilde{B}^A(r,s) \tilde{f}^A(r,s) &= 0, \\ \bar{A}^B(r,s) a_1^B(r,s) + \tilde{B}^B(r,s) f^B(r,s) &= 0,\end{aligned}$$

gdzie:

$$a_1^A(r,s) = \{a_1^A(r-s), a_1^A(r-s+1), \dots, a_1^A(r,s-1), a_1^A(r,s)\},$$

$$a_1^A(r,k) = \{a_1^A(-r+kn), a_1^A(-r+1+kn), \dots, a_1^A(r-1+kn), a_1^A(r+kn)\},$$

$$\tilde{f}_0^w(r,s) = \{0, 0, \dots, 0, \tilde{f}_0^w(r), 0, \dots, 0\},$$

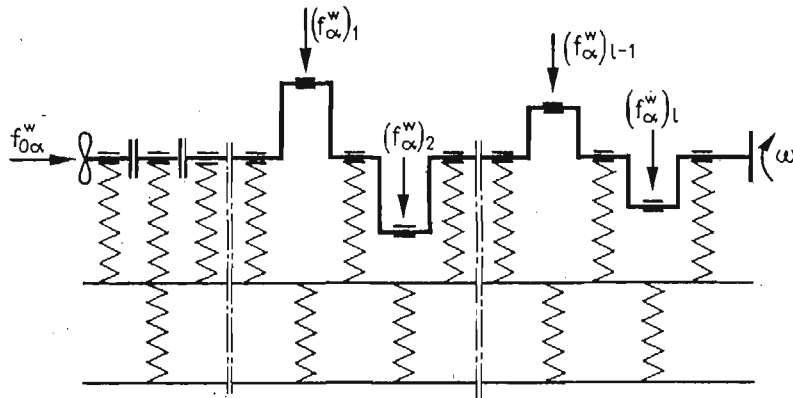
$(s+1)$  — a kolumna  $4(2r+1)$ -elementowa

$$\tilde{f}_0^w(r) = \{\tilde{f}_0^w(-r), \tilde{f}_0^w(-r+1), \dots, \tilde{f}_0^w(r-1), \tilde{f}_0^w(r)\}.$$

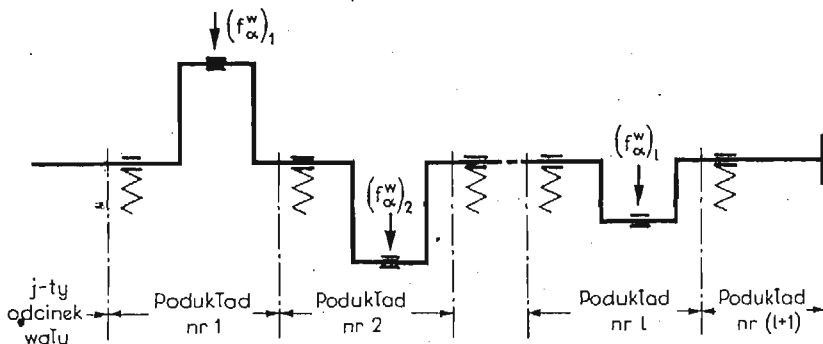
Utworzenie pozostałych macierzy w (3.24) nie następuje trudności.



nie. Dla uproszczenia rozważań, zarówno zastosowanie metody odkształcalnych elementów skończonych (OES) jak i metody sztywnych elementów skończonych (SES) zilustrowano na przykładzie tego samego układu, przedstawionego schematycznie na rys. 2. Podziałem na elementy skończone objęto ten fragment układu, dla którego dokładny opis drgań przy pomocy równań różniczkowych cząstkowych nie jest możliwy — tj. wał kor-



Rys. 2. Schemat rozpatrywanego układu.  $f_{0\alpha}^w$  — wymuszenie działające na śrubę okrętową;  $(f_{\alpha}^w)_k$  — wymuszenia od silnika, działające na czoł wykorbienia w  $k$ -tym wykorbieniu;  $\omega$  — prędkość kątowa wirowania linii wałów.



Rys. 3. Schemat podziału wału korbowego o  $l$  wykorbieniach na podukłady elementów skończonych.

bowy. W wałe korbowym o  $l$  wykorbieniach wyodrębniono  $l$  podukładów, z których każdy podzielono jednakowo na dowolną liczbę elementów skończonych. Przykładowy schemat podziału wału korbowego na podukłady przedstawiono na rys. 3.

Stosując metodę SES, podukłady nr 1, 2, ...,  $l$  podzielono na  $m$  elementów SES o 6 stopniach swobody, połączonych  $v$  elementami sprężystymi<sup>2)</sup>. Odcinek wału z tarczą przednią stanowi podukład nr  $(l+1)$ , zawierający  $m'+1$  elementów SES i  $v'$  elementów sprężystych (rys. 4). Dla cylindrycznych odcinków wału korbowego przyjęto cylindryczny kształt SES. Każdemu SES przyporządkowano lokalny układ współrzędnych, wirujący

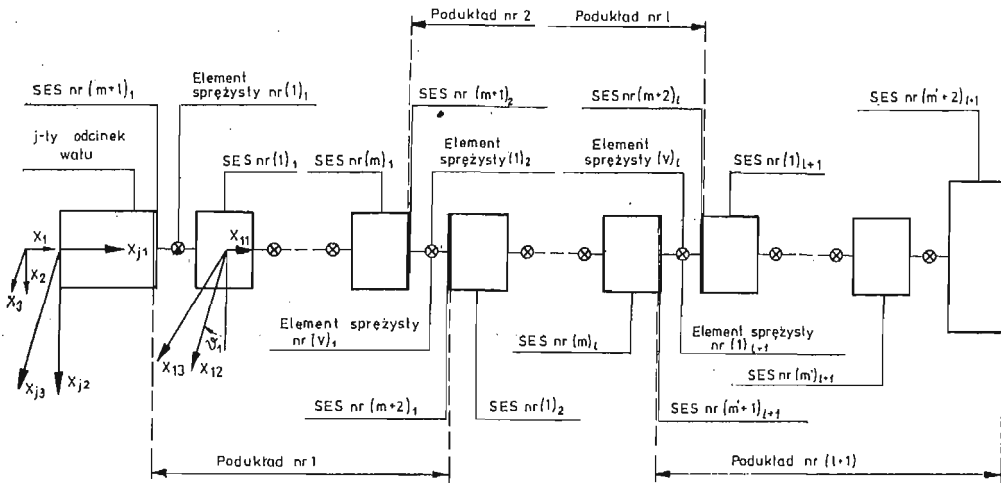
<sup>2)</sup> Uwzględnienie lepkościowego tłumienia nie wprowadza istotnych zmian do poniższych rozważań, dlatego zostało ono pominięte.

z prędkością kątową  $\omega$  względem osi linii wałów i pokrywający się w stanie spoczynku z głównymi centralnymi osiami bezwładności tego SES. Dodatkowo zwroty uogólnionych sił działających na SES i jego uogólnionych przemieszczeń przyjęto jak na rys. 2 w pracy [1] dla sił  $f_{i\alpha}$  i przemieszczeń  $u_{i,x\alpha}$ . Każdy SES określony jest blokiem współczynników bezwładności

$$M_e = [m_{e\alpha}], \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad e = 1, \dots, m.$$

Każdemu elementowi sprężystemu przyporządkowano lokalny układ współrzędnych, pokrywający się w stanie spoczynku z głównymi osiami tego elementu. Każdy element sprężysty określony jest blokiem współczynników sztywności

$$C_k = [c_{k\alpha}], \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, v.$$



Rys. 4. Schemat podziału wału korbowego na sztywne elementy skończone (SES).  $x_{11}, x_{12}, x_{13}$  — lokalny układ współrzędnych elementu SES nr 1;  $\vartheta_1$  — kąt pomiędzy płaszczyzną pierwszego wykorbień a płaszczyzną utworzoną przez osie  $x_{j1}, x_{j2}$  układu współrzędnych  $j$ -tego prostego odcinka linii wałów;  $X_1, X_2, X_3$  — nieruchomy układ odniesienia konstrukcji podpierającej.

Ze względu na identyczny podział na SES, w podukładach nr 1, ...,  $l$  zachodzi  $c_{1\alpha} = c_{v\alpha}$ . Element sprężysty nr  $v$  jest równocześnie pierwszym elementem sprężystym następnego podukładu. Analogicznie określone są elementy sprężyste i SES w podukładzie nr  $(l+1)$ .

W celu łatwiejszego wyznaczenia odpowiednich macierzy przejścia, w granicznych przekrojach poszczególnych podukładów wprowadzono dodatkowo bezmasowe SES, oznaczone na rys. 4 numerami  $(m+1)_1, (m+2)_1, \dots, (m'+1)_{l+1}$ . Indeksami dolnymi oznaczono przynależność tych elementów do danego podukładu. Indeksy dolne elementów SES nr 1, ...,  $m$  oraz 1, ...,  $m'$  i wszystkich elementów sprężystych pominięto w dalszej części pracy.

Kąty pomiędzy płaszczyznami kolejnych wykorbień a płaszczyzną utworzoną przez osie  $x_{j1}, x_{j2}$   $j$ -tego prostego odcinka linii wałów (rys. 4) oznaczono  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_l$ . Zakłada się, że osie  $x_{e1}, x_{e2}$  każdego cylindrycznego i każdego bezmasowego SES w danym

podukładzie leżą w płaszczyźnie wykorbienia znajdującego się w tym podukładzie. Osie  $x_{e1}, x_{e2}$  cylindrycznych i bezmasowego SES w podukładzie nr  $(l+1)$  leżą w płaszczyźnie odchylonej o dowolny kąt  $\vartheta_{l+1}$  od płaszczyzny utworzonej przez osie  $x_{j1}, x_{j2}$   $j$ -tego odcinka. Osie  $x_{j2}, x_{j3}$  są w chwili  $t = 0$  odpowiednio równoległe do osi  $x_2, x_3$  nieruchomego układu odniesienia konstrukcji podpierającej.

Składowe sił od silnika odnosi się do lokalnych układów współrzędnych SES nr  $p$ , które przejmują wymuszenia w łożyskach korbowych. Dla  $k$ -tego wykorbienia zapiszemy je analogicznie do (3.6), ograniczając się do przypadku  $\xi = 1$ :

$$(4.1) \quad (f_{\alpha}^w)_k = \sum_{\mu} (f_{\alpha}^{w(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots$$

Elementy SES, których główna centralna oś bezwładności nie pokrywa się z osią linii wałów, poddane są działaniu sił odśrodkowych. Dla SES nr  $g_i$  oznaczmy je  $f_{g_i\alpha}^{c(0)}$  ( $\alpha = 1, \dots, 6$ ). Ponadto na SES nr  $h$  działają nieznanne reakcje w łożysku ramowym:

$$(4.2) \quad (f_{h\alpha})_k = \sum_{\mu} (f_{h\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t).$$

Dla  $k$ -tego podukładu tworzymy macierze kolumnowe 6-elementowe

$$(f^w(\mu))_k = \{(f_{\alpha}^{w(\mu)})_k\}, \quad (f_h^{(\mu)})_k = \{(f_{h\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad f_{g_i}^{c(0)} = \{f_{g_i\alpha}^{c(0)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad i = 1, 2, \dots$$

oraz macierze kolumnowe  $(6m)$ -elementowe:

$$(\bar{f}^w(\mu))_k = \{0, \dots, 0, \underbrace{(f^w(\mu))_k}_{p\text{-ta kolumna 6-elementowa}}, 0, \dots, 0\},$$

$$(\bar{f}_h^{(\mu)})_k = \{0, \dots, 0, \underbrace{(f_h^{(\mu)})_k}_{h\text{-ta kolumna 6-elementowa}}, 0, \dots, 0\},$$

$$\bar{f}^{c(0)} = \{0, \dots, 0, \underbrace{f_{g_i}^{c(0)}, \dots, f_{g_i}^{c(0)}}_{q_i\text{-ta kolumna 6-elementowa}}, \dots, 0\},$$

$$(4.3) \quad (f^z(\mu))_k = (\bar{f}^w(\mu))_k + (\bar{f}_h^{(\mu)})_k + \delta_{0\mu} \bar{f}^{c(0)},$$

gdzie:  $\delta_{0\mu}$  — delta Kroneckera,

$$(f_e^{\mu})_k = \{(f_e^{(\mu)})_k\}, \quad e = 1, \dots, m, \quad (f_e^z(\mu))_k = \{(f_{e\alpha}^z(\mu))_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6.$$

Zachowując podstawowe oznaczenia stosowane w [5], wyodrębniono w  $k$ -tym podukładzie  $m$  elementów SES o „nieznanym” ruchu

$$(4.4) \quad (q_{e\alpha})_k = \sum_{\mu} (q_{e\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = 1, \dots, m, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

na które działają wyżej wymienione siły o postaci

$$(4.5) \quad (f_{e\alpha}^z)_k = \sum_{\mu} (f_{e\alpha}^{z(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = 1, \dots, m$$

oraz dwa elementy SES o „danym” ruchu

$$(4.6) \quad (z_{e\alpha})_k = \sum_{\mu} (z_{e\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = (m+1)_k, (m+2)_k,$$



na które działają określone niżej siły o postaci

$$(4.7) \quad (r_{e\alpha})_k = \sum_{\mu} (r_{e\alpha}^{(\mu)})_k \exp(j\mu\omega t), \quad e = (m+1)_k, (m+2)_k.$$

Równania ruchu dla układu złożonego z elementów SES o „nieznanym” ruchu i o „danym” ruchu mają w ogólnym przypadku postać [5]:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}''\mathbf{z} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{M}'\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{K}'')^T\mathbf{q} + \mathbf{K}'\mathbf{z} &= \mathbf{r}, \end{aligned}$$

gdzie:  $\mathbf{M}$  — macierz bezwładności układu o „nieznanym” ruchu,  $\mathbf{M}'$  — macierz bezwładności układu o „danym” ruchu,  $\mathbf{K}$  — macierz sztywności układu o „nieznanym” ruchu,  $\mathbf{K}'$  — macierz sztywności układu o „danym” ruchu,  $\mathbf{K}''$  — macierz sztywności połączeń układu o „nieznanym” ruchu z układem o „danym” ruchu. Sposób wyznaczenia tych macierzy podano w [5]. Macierz kolumnową  $w_e = \{z_e, r_e\}$  nazywać będziemy wektorem stanu elementu SES nr  $e = (m+1)_k$  lub  $e = (m+2)_k$ .

Tworząc macierze kolumnowe

$$\begin{aligned} (q^{(\mu)})_k &= \{(q_e^{(\mu)})_k\}, \quad e = 1, \dots, m, \quad (q_e^{(\mu)})_k = \{(q_{e\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \\ (z^{(\mu)})_k &= \{(z_{m+1}^{(\mu)})_k, (z_{m+2}^{(\mu)})_k\}, \quad (z_{m+1}^{(\mu)})_k = \{(z_{m+1,\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad (z_{m+2}^{(\mu)})_k = \{(z_{m+2,\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ (r^{(\mu)})_k &= \{(r_{m+1}^{(\mu)})_k, (r_{m+2}^{(\mu)})_k\}, \quad (r_{m+1}^{(\mu)})_k = \{(r_{m+1,\alpha}^{(\mu)})_k\}, \quad (r_{m+2}^{(\mu)})_k = \{(r_{m+2,\alpha}^{(\mu)})_k\} \end{aligned}$$

i wykorzystując równania (4.8) otrzymuje się dla pierwszego podukładu SES

$$(4.9) \quad (q^{(\mu)})_1 = (\mathbf{K}^{(\nu)})^{-1}[(f^{z(\mu)})_1 - \mathbf{K}''(z^{(\mu)})_1],$$

$$(4.10) \quad \mathbf{T}^{(\nu)}(z^{(\mu)})_1 + (r^{(\mu)})_1 = \mathbf{P}^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1,$$

gdzie:

$$\mathbf{K}^{(\nu)} = \mathbf{K} - (\nu\omega)^2\mathbf{M}, \quad \nu = |\mu|, \quad \mathbf{T}^{(\nu)} = \mathbf{P}^{(\nu)}\mathbf{K}'' - \mathbf{K}', \quad \mathbf{P}^{(\nu)} = (\mathbf{K}'')^T(\mathbf{K}^{(\nu)})^{-1}.$$

W macierzach  $\mathbf{T}^{(\nu)}$  i  $\mathbf{P}^{(\nu)}$  można wydzielić podmacierze o odpowiednio jednakowych wymiarach

$$\mathbf{T}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} T_1^{(\nu)} & T_2^{(\nu)} \\ \dots & \dots \\ T_3^{(\nu)} & T_4^{(\nu)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} P_1^{(\nu)} \\ \dots \\ P_2^{(\nu)} \end{bmatrix}$$

i napisać równanie (4.10) w postaci:

$$(4.11) \quad T_1^{(\nu)}(z_{m+1}^{(\mu)})_1 + T_2^{(\nu)}(z_{m+2}^{(\mu)})_1 + (r_{m+1}^{(\mu)})_1 = P_1^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1,$$

$$(4.12) \quad T_3^{(\nu)}(z_{m+1}^{(\mu)})_1 + T_4^{(\nu)}(z_{m+2}^{(\mu)})_1 + (r_{m+2}^{(\mu)})_1 = P_2^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1.$$

Z równań (4.11), (4.12) otrzymuje się

$$(4.13) \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_1 = \mathbf{B}_s^{(\nu)}(w_{m+1}^{(\mu)})_1 + \mathbf{F}_s^{(\nu)}(f^{z(\mu)})_1,$$

gdzie  $\mathbf{B}_s^{(\nu)}$  stanowi macierz przejścia dla pierwszego podukładu SES, wiążącą amplitudy  $\mu$ -tych składowych wektorów stanu

$$(w_{m+1}^{(\mu)})_1 = \{(z_{m+1}^{(\mu)})_1, (r_{m+1}^{(\mu)})_1\}, \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_1 = \{(z_{m+2}^{(\mu)})_1, (r_{m+2}^{(\mu)})_1\}$$

elementów SES znajdujących się na krańcach tego podukładu. Macierze  $\mathbf{B}_s^{(\nu)}$  i  $\mathbf{F}_s^{(\nu)}$  mają postać

(4.14)

$$\mathbf{B}_s^{(v)} = \begin{bmatrix} -(T_2^{(v)})^{-1} T_1^{(v)} & -(T_2^{(v)})^{-1} \\ -T_3^{(v)} + T_4^{(v)} (T_2^{(v)})^{-1} T_1^{(v)} & T_4^{(v)} (T_2^{(v)})^{-1} \end{bmatrix}_{12}, \quad F_s^{(v)} = \begin{bmatrix} (T_2^{(v)})^{-1} P_1^{(v)} \\ -T_4^{(v)} (T_2^{(v)})^{-1} P_1^{(v)} + P_2^{(v)} \end{bmatrix}_{12 \times 6m}$$

i są identyczne dla wszystkich podukładów SES obejmujących wykorbienia. Amplitudy wektora stanu elementu SES nr  $(m+1)_1$  są związane z amplitudami wektora stanu na końcu  $j$ -tego odcinka wału relacją wynikającą z (2.9), (2.17) i rys. 4:

$$(4.15) \quad (w_{m+1}^{(\mu)})_1 = \begin{bmatrix} Q_1 C_{jl}^{(\mu)} \\ Q_1 A_{jl}^{(\mu)} \end{bmatrix} a_j^{(\mu)},$$

gdzie macierz  $Q_1$  utworzona jest z macierzy kosinusów kierunkowych między osiami układów  $x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}$  i  $x_{11}, x_{12}, x_{13}$ :

$$(4.16) \quad Q_1 = [Q'_1, Q_1], \quad Q'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \\ 0 & -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}.$$

Siły działające na SES nr  $(m+2)_1$  i  $(m+1)_2$  są reakcjami elementu sprężystego nr  $v$  (rys. 4), zależnymi od względnych przemieszczeń tych dwóch SES. Zatem amplitudy wektora stanu na początku i na końcu drugiego podukładu wynoszą

$$(4.17) \quad (w_{m+1}^{(\mu)})_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & -Q_2 C_v^{-1} \\ 0 & -Q_2 \end{bmatrix} (w_{m+2}^{(\mu)})_1, \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_2 = B_s^{(v)} (w_{m+1}^{(\mu)})_2 + F_s^{(v)} (f^{z(\mu)})_2,$$

gdzie:

$$(4.18) \quad Q_2 = [Q'_2, Q_2], \quad Q'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) & \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ 0 & -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) & \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{bmatrix}.$$

Na końcu  $l$ -tego podukładu otrzymuje się podobnie

$$(4.19) \quad (w_{m+2}^{(\mu)})_l = B_s^{(v)} \begin{bmatrix} Q_l & -Q_l C_v^{-1} \\ 0 & -Q_l \end{bmatrix} (w_{m+2}^{(\mu)})_{l-1} + F_s^{(v)} (f^{z(\mu)})_l,$$

gdzie  $Q_l$  jest macierzą analogiczną do  $Q_2$  (4.18) dla  $(\vartheta_l - \vartheta_{l-1})$ .

W podukładzie nr  $(l+1)$  elementy SES o „danym” ruchu oznaczono numerami  $(m'+1)_{l+1}, (m'+2)_{l+1}$  (rys. 4). Macierz bezwładności drugiego z tych elementów nie jest zerowa. Podobnie do (4.19) zachodzi zależność

$$(4.20) \quad (w_{m'+2}^{(\mu)})_{l+1} = (B_s^{(v)})_{l+1} \begin{bmatrix} Q_{l+1} & -Q_{l+1} C_v^{-1} \\ 0 & -Q_{l+1} \end{bmatrix} (w_{m'+2}^{(\mu)})_l + (F_s^{(v)})_{l+1} (f^{z(\mu)})_{l+1},$$

gdzie macierze  $(B_s^{(v)})_{l+1}, (F_s^{(v)})_{l+1}, Q_{l+1}$  tworzy się analogicznie jak  $\mathbf{B}_s^{(v)}, F_s^{(v)}$  (4.14) i  $Q_2$  (4.18), jednakże macierz  $(T^{(v)})_{l+1}$  ze względu na istnienie niezerowego bloku w macierzy bezwładności  $(M')_{l+1}$  układu o „danym” ruchu ma odmienną postać od macierzy  $T^{(v)}$ :

$$(4.21) \quad (T^{(v)})_{l+1} = (K'')_{l+1}^T (K^{(v)})_{l+1}^{-1} (K'')_{l+1} - (K')_{l+1} + (v\omega)^2 (M')_{l+1}.$$

Warunek brzegowy dla rozpatrywanej linii wałów wynika z braku zewnętrznych wymuszeń na element SES nr  $(m'+2)_{l+1}$

$$(4.22) \quad (r_{m'+2}^{(\mu)})_{l+1} = 0.$$

W celu wyznaczenia rozwiązań metodą przedstawioną w [1] należy ponadto określić amplitudy przemieszczeń elementów SES nr  $h$ , znajdujących się w podpartych podatnie łożyskach ramowych. Dla  $k$ -tego podukładu wynoszą one zgodnie z (4.9)

$$(4.23) \quad (q_h^{(\mu)})_k = K_h^{(v)}[(f^{z(\mu)})_k - K''(z^{(\mu)})_k],$$

gdzie  $K_h^{(v)}$  jest  $h$ -tym pasmem poziomym macierzy  $(\mathbf{K}^{(v)})^{-1}$ , natomiast  $(z^{(\mu)})_k$  na podstawie (4.11) wynosi

$$(4.24) \quad (z^{(\mu)})_k = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -(T_2^{(v)})^{-1}T_1^{(v)} & -(T_2^{(v)})^{-1} \end{bmatrix} (w_{m+1}^{(\mu)})_k + \begin{bmatrix} 0 \\ (T_2^{(v)})^{-1}P_1^{(v)} \end{bmatrix} (f^{z(\mu)})_k$$

Wyprowadzone powyżej i w [1] zależności pozwalają przedstawić wielkości określone wyrażeniami (4.22) i (4.23) w funkcji nieznanych współczynników  $a_{1q}^{(\mu)}$  (dotyczących pierwszego odcinka wału śrubowego) i amplitud reakcji w łożyskach linii wałów. Sposób wyznaczenia tych niewiadomych jest analogiczny jak w [1].

Przy zastosowaniu metody OES [4] każdy podukład zawierający wykorbienie podzielono jednakowo na  $m$  elementów OES, połączonych ze sobą  $v$  węzłami oraz z sąsiednimi podukładami  $v'$  węzłami. Zakłada się, że każdy węzeł ma 6 stopni swobody. Położenie elementów OES określone jest względem ortogonalnych lokalnych układów współrzędnych  $x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}$  ( $e = 1, 2, \dots, m$ ), wirujących z prędkością kątową  $\omega$  względem osi linii wałów. W danym podukładzie lokalne układy współrzędnych mają osie odpowiednio równoległe do siebie, przy czym osie  $x_{e1}, x_{e2}$  są równoległe do płaszczyzny wykorbienia w tym podukładzie. Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia i obroty węzłów względem osi lokalnego układu współrzędnych. Dodatkowo zwroty przemieszczeń węzłów i sił działających w węzłach przyjęto jak dla przemieszczeń  $u_{i\alpha}$  i sił  $f_{i\alpha}$  na rys. 2[1]. Węzły znajdujące się w płaszczyznach oddzielających podukład nr  $k$  od sąsiednich podukładów traktowane są jako węzły o „danym” ruchu  $z$ , obciążone siłami  $r$ . Pozostałych  $v$  węzłów  $k$ -tego podukładu stanowi węzły o „nieznanym” ruchu  $q$ , wywołanym siłami  $f$ . Wprowadzono oznaczenia:

$$q = \sum_{\mu} q^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad q^{(\mu)} = \{q_n^{(\mu)}\}, \quad n = 1, \dots, v, \quad q_n^{(\mu)} = \{q_{n\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$f = \sum_{\mu} f^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad f^{(\mu)} = \{f_n^{(\mu)}\}, \quad n = 1, \dots, v, \quad f_n^{(\mu)} = \{f_{n\alpha}^{(\mu)}\},$$

$$z = \sum_{\mu} z^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad z^{(\mu)} = \{z_n^{(\mu)}\}, \quad n = v+1, v+2, \dots, v+v', \quad z_n^{(\mu)} = \{z_{n\alpha}^{(\mu)}\},$$

$$r = \sum_{\mu} r^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad r^{(\mu)} = \{r_n^{(\mu)}\}, \quad n = v+1, v+2, \dots, v+v', \quad r_n^{(\mu)} = \{r_{n\alpha}^{(\mu)}\}.$$

Przynależność poszczególnych wielkości do danego podukładu oznaczana jest poniżej indeksem dolnym. Element OES nr  $e$  określony jest macierzą bezwładności  $\mathbf{M}_e$  i macierzą sztywności  $\mathbf{K}_e$ , wyznaczanymi według [4]. Macierze  $\mathbf{M}_e$  i  $\mathbf{K}_e$  są stopnia  $6v_e$ , gdzie  $v_e$  — liczba węzłów należących do OES nr  $e$ . Z macierzy tych tworzy się macierze  $\bar{\mathbf{M}}_e$  i  $\bar{\mathbf{K}}_e$  stopnia  $6(v+v')$ . Macierz  $\bar{\mathbf{M}}_e$  powstaje w ten sposób [5], że  $(v_e)^2$  bloków  $6 \times 6$  macierzy  $\mathbf{M}_e$  umieszcza się w miejscach przecięć pasm poziomych i pionowych o numerach węzłów tego OES.

Pozostałe bloki macierzy  $\bar{\mathbf{M}}_e$  są zerowe. Analogicznie tworzy się macierz  $\bar{\mathbf{K}}_e$ . Oznaczając

$$\bar{\mathbf{M}} = \sum_{e=1}^m \bar{\mathbf{M}}_e, \quad \bar{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^m \bar{\mathbf{K}}_e$$

oraz dzieląc  $\bar{\mathbf{M}}$  i  $\bar{\mathbf{K}}$  na podmacierze

$$\bar{\mathbf{M}} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{M}'' \\ \hline (\mathbf{M}'')^T & \mathbf{M}' \end{array} \right]_{6\nu, 6\nu'}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{K}'' \\ \hline (\mathbf{K}'')^T & \mathbf{K}' \end{array} \right]_{6\nu, 6\nu'}$$

można dla  $k$ -tego podukładu napisać równania [5]

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}(\ddot{q})_k + \mathbf{M}''(\ddot{z})_k + \mathbf{K}(q)_k + \mathbf{K}''(z)_k &= (f)_k, \\ (\mathbf{M}'')^T(\dot{q})_k + \mathbf{M}'(\dot{z})_k + (\mathbf{K}'')^T(q)_k + \mathbf{K}'(z)_k &= (r)_k. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku równań (4.8) otrzymuje się

(4.26)

$$(w^{(\mu)})_{k,k+1} = B_0^{(\nu)}(w^{(\mu)})_{k,k-1} + F_0^{(\nu)}(f^{(\mu)})_k, \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots; \nu = |\mu|.$$

$B_0^{(\nu)}$  i  $F_0^{(\nu)}$  mają postać macierzy  $B_S^{(\nu)}$  i  $F_S^{(\nu)}$  (4.14), przy czym  $T_1^{(\nu)}, \dots, T_4^{(\nu)}$  oraz  $P_1^{(\nu)}$  i  $P_2^{(\nu)}$  oznaczają podmacierze (utworzone jak poprzednio dla SES) macierzy

$$\mathbf{T}^{(\nu)} = \mathbf{P}^{(\nu)}\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)} - (\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)})', \quad \mathbf{P}^{(\nu)} = (\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)})^T(\mathbf{K}^{(\nu)})^{-1},$$

gdzie

$$\mathbf{K}^{(\nu)} = \mathbf{K} - (\nu\omega)^2\mathbf{M}, \quad \bar{\mathbf{K}}^{(\nu)} = \mathbf{K}'' - (\nu\omega)^2\mathbf{M}', \quad (\bar{\mathbf{K}}^{(\nu)})' = \mathbf{K}' - (\nu\omega)^2\mathbf{M}'.$$

W zależności (4.26) oznaczono

$$(w^{(\mu)})_{k,k-1} = \{(z^{(\mu)})_{k,k-1}, (r^{(\mu)})_{k,k-1}\}, \quad (w^{(\mu)})_{k,k+1} = \{(z^{(\mu)})_{k,k+1}, (r^{(\mu)})_{k,k+1}\},$$

gdzie indeks  $(k, k-1)$  dotyczy węzłów  $k$ -tego podukładu w przekroju granicznym z  $(k-1)$ -ym podukładem:

$$\begin{aligned} (z^{(\mu)})_{k,k-1} &= \{(z_{n_1}^{(\mu)})_k, (z_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (z_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (z_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(z_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ (r^{(\mu)})_{k,k-1} &= \{(r_{n_1}^{(\mu)})_k, (r_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (r_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (r_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(r_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ n_1, n_2, \dots, n_s &= \nu + 1, \nu + 2, \dots, \nu + \frac{1}{2}\nu', & \alpha &= 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

natomiast indeks  $(k, k+1)$  odnosi się do węzłów  $k$ -tego podukładu w przekroju granicznym z  $(k+1)$ -ym podukładem:

$$\begin{aligned} (z^{(\mu)})_{k,k+1} &= \{(z_{n_1}^{(\mu)})_k, (z_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (z_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (z_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(z_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ (r^{(\mu)})_{k,k+1} &= \{(r_{n_1}^{(\mu)})_k, (r_{n_2}^{(\mu)})_k, \dots, (r_{n_s}^{(\mu)})_k\}, & (r_{n_1}^{(\mu)})_k &= \{(r_{n_1\alpha}^{(\mu)})_k\}, \\ n_1, n_2, \dots, n_s &= \nu + \frac{1}{2}\nu' + 1, \nu + \frac{1}{2}\nu' + 2, \dots, \nu + \nu', & \alpha &= 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Przy zachowaniu jednakowego podziału na OES w podukładach nr 1, ...,  $l$  macierze  $B_0^{(\nu)}$  i  $F_0^{(\nu)}$  są identyczne dla tych podukładów.

Z położenia lokalnych układów współrzędnych w  $k$ -tym i w  $(k-1)$ -ym podukładzie

wynika następująca zależność, dotycząca węzłów w przekroju oddzielającym oba te podukłady:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} (1\nu^{(\mu)})_{k,k-1} &= \{Q_k(z_{n_1}^{(\mu)})_{k-1}, \dots, Q_k(z_{n_s}^{(\mu)})_{k-1}, Q_k(r_{n_1}^{(\mu)})_{k+1}, \dots, Q_k(r_{n_s}^{(\mu)})_{k-1}\} \\ n_1, n_2, \dots, n_s &= v + \frac{1}{2}v' + 1, v + \frac{1}{2}v' + 2, \dots, v + v', \end{aligned}$$

gdzie  $Q_k$  ma postać (4.18) dla  $(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$ .

Wyrażenia (4.26) i (4.27) pozwalają wyznaczyć zależność wiążącą amplitudy przemieszczeń i sił w węzłach na końcu  $l$ -tego podukładu z analogicznymi wielkościami na początku podukładu nr 1. Ponadto należy wyznaczyć związek pomiędzy amplitudami przemieszczeń i sił w węzłach podukładu nr 1 łączących się z  $j$ -tym odcinkiem linii wałów a amplitudami przemieszczeń  $u_{jl}^{(\mu)} = C_{jl}^{(\mu)} a_j^{(\mu)}$  i sił wewnętrznych  $p_{jl}^{(\mu)} = A_{jl}^{(\mu)} a_j^{(\mu)}$  w tym przekroju odcinka. Oznaczając przez  $a_{n_1}, b_{n_1}, \dots, a_{n_s}, b_{n_s}$  odległości węzłów znajdujących się w tym przekroju od płaszczyzn utworzonych przez osie  $x_{j1}, x_{j3}$  oraz  $x_{j1}, x_{j2}$ , mierzone w stanie spoczynku w kierunkach osi  $x_{j2}$  oraz  $x_{j3}$ , można macierz kolumnową amplitud  $\mu$ -tych składowych przemieszczeń tych węzłów wyrazić w postaci:

$$(4.28) \quad (z^{(\mu)})_{1,0} = \begin{bmatrix} Q_1 S_{n_1} \\ Q_1 S_{n_2} \\ \vdots \\ Q_1 S_{n_s} \end{bmatrix} C_{jl}^{(\mu)} a_j^{(\mu)}, \quad n_1, n_2, \dots, n_s = v + 1, v + 2, \dots, v + \frac{1}{2}v',$$

gdzie  $Q_1$  określono zależnością (4.16), natomiast

$$S_{n_l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{n_l} & -a_{n_l} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{n_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relację pomiędzy  $(r^{(\mu)})_{1,0}$  i  $p_{jl}^{(\mu)}$  wyznaczyć można zwykłymi metodami statyki.

Dla  $(l+1)$ -go podukładu macierze  $(B_0^{(v)})_{l+1}$  i  $(F_0^{(v)})_{l+1}$  wyznacza się podobnie jak  $B_0^{(v)}$  i  $F_0^{(v)}$  dla  $k$ -tego podukładu. Tym samym można określić macierze przejścia dla całej linii wałów i warunki brzegowe. Ogólny schemat rozwiązania i w tym przypadku jest analogiczny jak w [1].

### 5. Uwagi końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy i w [1] sposoby opisu wymuszonych drgań linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów prowadzą do pewnej komplikacji obliczeń w prównaniu z dotychczasowymi metodami, tym niemniej ich stosowanie może być celowe w przypadkach, gdy pożądana jest większa dokładność obliczeń. Należy zaznaczyć, że przy znajomości charakterystyk wymuszeń niezbędne do dokładniejszych obliczeń dane dodatkowe dotyczą jedynie podatności fundamentów i są możliwe do uzyskania m.in. w sposób ukazany w [1]. Dla uproszczenia procedury identyfikacji podatności fundamentów przy dużej liczbie częstości wymuszeń (zwłaszcza przy

układach przekładniowych) wydaje się celowym sporządzanie wykresów zmian wartości współczynników podatności w funkcji częstości na podstawie interpolacji wyników pomiarów przy ograniczonej liczbie częstości wymuszeń.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów linii wałów*, W Redakcji Mech. Teoret. i Stos.
2. DNV SEMINAR ON SHIP VIBRATION, *Papers, Oslo, June 1977*.
3. S. KALISKI (red.), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
5. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1975.

#### Резюме

#### УТОЧНЕННЫЕ ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ

Работа касается линейных колебаний валопроводов при периодических возмущениях. Выведенные формулы описывают влияние внутреннего трения валов, постоянной аксиальной нагрузки, деформации сдвига и инерции поворота на изгибные колебания. Приводятся тоже зависимости касающиеся продольных и крутильных колебаний с учетом внутреннего трения. Представляется способ расчета изгибных колебаний валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов в системах с передачей. Иллюстрируется возможность применения метода конечных элементов (деформируемых или жестких). В качестве примера принят коленчатый вал. Считается, что каждый узел (или жесткий конечный элемент) обладает шестью степенями свободы. Для уменьшения размеров матриц системы применяются матрицы перехода, связывающие коэффициенты решений для соседних участков валопровода или относящиеся к одному колену, в случае применения метода конечных элементов.

#### Summary

#### A MORE PRECISE DESCRIPTION OF FORCED VIBRATIONS OF SHAFTINGS WITH FLEXURAL RIGIDITY ASYMMETRY ON FLEXIBLE FOUNDATIONS

The paper deals with linear vibrations of shaftings at periodic excitations. The derived formulae are describing the influence of an internal damping, constant axial force, shear forces and rotary inertia on flexural vibrations. There are also given the formulae concerning with longitudinal and torsional vibrations with an internal damping taken into account. The solution method for a flexural vibrations problem in flexible supported, geared shaft systems with flexural rigidity asymmetry is presented. The possibility of applying the deformable (or stiff) finite element technique is illustrated for the case of a crankshaft. It is assumed that each node (or stiff finite element) has 6 degrees of freedom. The size of system matrices is reduced by means of transfer matrices related to solution coefficients for adjacent shaft pieces or by use of transfer matrices referred to one crank when the finite element technique is applied.

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
INSTYTUT OKRĘTOWY

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1978 r.