

ANALIZA DRGAŃ WAŁÓW WIRUJĄCYCH OBCIĄŻONYCH SIŁAMI OSIOWYMI

WIESŁAW OSTACHOWICZ, JANISŁAW TARNOWSKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

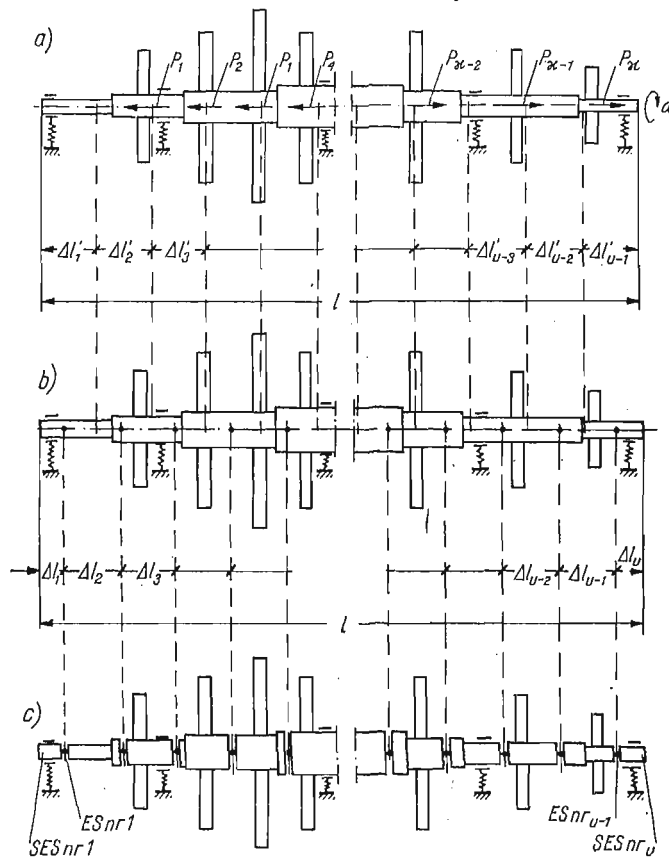
Jednym z podstawowych zadań związanych z analizą własności dynamicznych wałów i wirników jest określenie częstości drgań własnych układu i odpowiadających im postaci. Jakkolwiek zagadnienie to było poruszone w licznych pracach dotyczących dynamiki wirników [1, 4] niemniej problem pozostaje nadal aktualny i jest daleki od ostatecznego rozwiązania. Powstają coraz to nowsze i doskonalsze metody obliczeniowe, w szczególności metody komputerowe, pozwalające na budowę bardziej złożonych modeli obliczeniowych, lepiej odwzorowujących układy rzeczywiste aniżeli metody dawniej stosowane. Spośród metod komputerowych do analizy dynamicznej wałów i wirników najszerzej są stosowane metody elementów skończonych i metody bazujące na idei macierzy przeniesienia. Niniejsza praca stanowi kolejną próbę rozwiązania zagadnienia drgań własnych wałów napędowych, w szczególności wałów okrętowych oraz wirników różnego rodzaju maszyn wirnikowych w oparciu o metodę sztywnych elementów skończonych [2]. Wybór metody został podyktowany jej szczególną przydatnością do obliczeń dynamicznych układów prętowych, do których między innymi należą wały i wirniki.

Model obliczeniowy przyjęty w tej metodzie pozwala na uwzględnienie szeregu czynników determinujących drgania obrotowe wirników [6], których nie uwzględniają metody prezentowane dotychczas w dostępnej autorom literaturze. Dotyczy to przede wszystkim równoczesnego uwzględnienia efektów giroskopowych i sił osiowych oraz przebadania ich wpływu na częstości własne. Ważną zaletą zastosowanej metody sztywnych elementów skończonych jest możliwość pełnej, łącznie z przygotowaniem danych, automatyzacji obliczeń co wskazuje na jej zdecydowanie aplikacyjny charakter.

2. Modelowanie układu fizycznego

Przedmiotem analizy są wały i wirniki wykonujące drgania obrotowe, dowolnie łożyskowane i obciążone siłami osiowymi (rys. 1a). Wspomniana analiza dotyczy takich elementów konstrukcyjnych jak wirniki turbin, sprzężarek pomp, linii wałów okrętowych i innych. Zakłada się, że wał obraca się ze stałą prędkością kątową wokół własnej osi, a ponadto wykonuje ruch precesyjny wokół osi łożysk. Na wale w dowolnym miejscu mogą być osadzone sztywne tarcze odpowiadające w układach rzeczywistych np. okrętowej śrubie napędowej lub też tarczom wirnikowym turbiny. Utworzenie modelu obliczeniowego przy-

jętego układu fizycznego w oparciu o metodę sztywnych elementów skończonych przebiega w dwóch etapach. W pierwszym etapie dzielimy wał w sposób pomyślany na $u-1$ odcinków o długości Δl_i (rys. 1b). Własności sprężyste każdego odcinka skupiamy w środku jego długości w elementach sprężystych (ES). Elementy sprężyste są nieważkie, bezwymiarowe i mają charakterystyki liniowe. Pomędzy elementami sprężystymi znajdują się odcinki wału traktowane jako sztywne (zwane sztywnymi elementami skończonymi — SES).



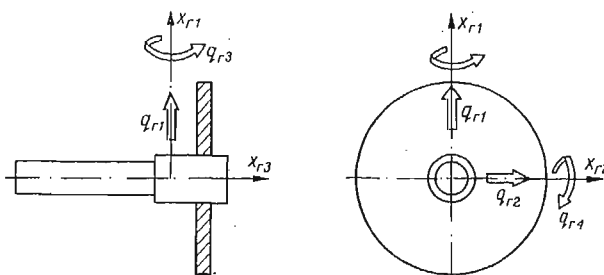
Rys. 1. Podział wirnika na sztywne elementy skończone i elementy sprężyste a) model fizyczny układu, b) podział pierwotny, c) model dyskretny

W ten sposób w drugim etapie podziału otrzymuje się u sztywnych elementów skończonych o długości Δl_i połączonych ze sobą elementami sprężystymi (rys. 1c). Własności sprężyste podpór w modelu obliczeniowym są reprezentowane przez elementy sprężyste łączące odpowiednie sztywne elementy skończone z ostoją.

Do opisanego ruchu przedstawionego modelu obliczeniowego wprowadza się związane z każdym sztywnym elementem skończonym i z każdym elementem sprężystym nieruchome układy odniesienia. Są to układy ortokartezjańskie pokrywające się w stanie równowagi modelu w przypadku SES z ich głównymi centralnymi osiami bezwładności, natomiast w przypadku elementów sprężystych z ich głównymi osiami deformacji. Główne osie

deformacji ES charakteryzują się tym, że siły i pary sił działające na ES powodują ich odkształcenia translacyjne i rotacyjne zgodnie z kierunkami działania tych sił i par sił. Z uwagi na charakter rozpatrywanych drgań przemieszczenia r -tego sztywnego elementu skończonego opisują cztery niezależne współrzędne: dwa przemieszczenia translacyjne q_{r_1} i q_{r_2} oraz dwa rotacyjne q_{r_3} i q_{r_4} (rys. 2). Wobec tego posiada on cztery stopnie swobody a współrzędne uogólnione opisujące jego położenie w układzie lokalnym tworzą blok o postaci

$$(2.1) \quad \mathbf{q}_r = \text{col}(q_{r_\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$



Rys. 2. Współrzędne uogólnione SES

Każdy SES określony jest blokiem współczynników bezwładności. Ze względu na to, że osie x_{r_1} , x_{r_2} , x_{r_3} są głównymi centralnymi osiami bezwładności blok ten jest macierzą diagonalną o postaci

$$(2.2) \quad \mathbf{m}_r = \text{diag}[m_{r_\alpha}], \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie m_{r_1} i m_{r_2} oznaczają masę r -tego sztywnego elementu skończonego, m_{r_3} i m_{r_4} — masowe momenty bezwładności względem osi x_{r_1} i x_{r_2} (rys. 2).

Każdy EST określony jest blokiem współczynników sztywności. Ponieważ założono, że osie y_{k_1} , y_{k_2} są głównymi osiami deformacji EST bloki te są macierzami diagonalnymi i posiadają postać:

$$(2.3) \quad \mathbf{C}_k = \text{diag}[C_{k_\alpha}], \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Pierwsze dwa wyrazy diagonalne tego bloku są współczynnikami sztywności na ścinanie, pozostałe dwa współczynnikami sztywności na zginanie. Sposób wyznaczenia tych współczynników podano w pracach [2, 5, 6].

3. Model matematyczny

Równania ruchu wyprowadza się w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie T oznacza energię kinetyczną układu, q_σ — współrzędne uogólnione, Q_σ — siły uogólnione, t — czas, n — jest liczbą stopni swobody układu.

Ponieważ każdy sztywny element skończony ma cztery stopnie swobody, ruch r -tego SES opisują cztery równania (3.1) a dla całego układu należy ułożyć 4 u tych równań. Energię kinetyczną układu określa związek

$$(3.2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u m_r \cdot \dot{q}_r^2.$$

Równanie (3.2) w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$(3.3) \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{q},$$

gdzie \mathbf{M} jest macierzą współczynników bezwładności składającą się z bloków m_r (2.2)

$$(3.4) \quad \mathbf{M} = \text{diag} \{m_1, m_2, \dots, m_r, \dots, m_{u-1}, m_u\},$$

a $\dot{\mathbf{q}}$ jest wektorem prędkości uogólnionych układu

$$(3.5) \quad \dot{\mathbf{q}} = \text{col} \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{u-1}, \dot{q}_u\}.$$

Zakłada się, że na układ oprócz sił potencjalnych działają jeszcze siły niepotencjalne. Siłę uogólnioną Q_σ zapisujemy w postaci sumy trzech składników

$$(3.6) \quad Q_\sigma = - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} + \Gamma_\sigma + Q_\sigma^*, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie V oznacza energię potencjalną układu, Γ_σ — siły giroskopowe, Q_σ^* inne siły niepotencjalne (poza giroskopowymi).

Przyjmuje się, że energia potencjalna jest funkcją jedynie współrzędnych uogólnionych (nie zależy jawnie od czasu)

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_r, \dots, q_{u-1}, q_u).$$

Energia potencjalna układu jest jednorodną formą kwadratową

$$(3.7) \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q},$$

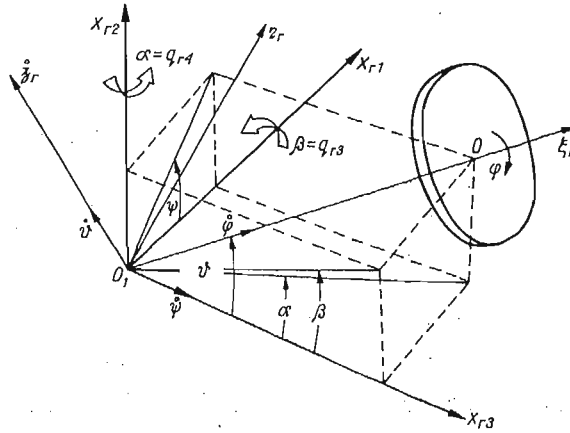
gdzie \mathbf{K} jest macierzą sztywności [2], \mathbf{q} wektorem współrzędnych uogólnionych układu. W rozważanym modelu matematycznym energia potencjalna reprezentuje energię elementów sprężystych.

Siły giroskopowe wyznaczmy wychodząc z zasady zachowania krętu. Ruch dowolnego elementu wału wykonującego drgania obrotowe, można z punktu widzenia dynamiki bryły, traktować jako ruch ciała sztywnego względem punktu nieruchomego. Dla przykładu rozpatrzmy ruch sztywnego elementu skończonego w kształcie tarczy, reprezentującego np. okrętową śrubę napędową lub tarczę łopatkową wirnika turbiny. Punkt przecięcia się stycznej do odkształconej osi wału w miejscu zamocowania tarczy, z osią łożysk jest w układzie r -tego SES punktem nieruchomym O_1 (rys. 3) względem którego odbywa się ruch tarczy. Położenie tarczy w układzie $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}$, jest określone przez kąty Eulera, a mianowicie: ψ — kąt precesji, ϑ — kąt nutacji i φ — kąt obrotu własnego. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia momentów giroskopowych działających w kierunku zgodnym z przyjętymi współrzędnymi rotacyjnymi q_{r_3} i q_{r_4} , określonymi w tym przypadku przez kąty α i β .

W tym celu wprowadzamy związany z tarczą ruchomy układ odniesienia ξ_r, ζ_r, η_r . Ponieważ interesują nas jedynie przemieszczenia rotacyjne, zatem możemy przyjąć, że obydwa układy odniesienia, ruchomy i nieruchomy, mają wspólny początek w środku tarczy 0. Wychodząc z prawa zachowania krętu, wyznaczamy momenty działające na tarczę ze znanego wzoru

$$(3.8) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H},$$

gdzie \mathbf{H} jest krętem tarczy a $\boldsymbol{\omega}$ jej prędkością kątową.



Rys. 3. Wirujący element wału w ruchomym ξ_r, η_r, ζ_r i nieruchomym x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} układzie odniesienia

Rzutuując moment krętu na osie układu ruchomego, otrzymujemy następujące zależności:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} M_{\xi_r} &= \frac{dH_{\xi_r}}{dt} + \omega_{\eta_r} H_{\zeta_r} - \omega_{\zeta_r} H_{\eta_r} \\ M_{\eta_r} &= \frac{dH_{\eta_r}}{dt} + \omega_{\zeta_r} H_{\xi_r} - \omega_{\xi_r} H_{\zeta_r} \\ M_{\zeta_r} &= \frac{dH_{\zeta_r}}{dt} + \omega_{\xi_r} H_{\eta_r} - \omega_{\eta_r} H_{\xi_r}. \end{aligned}$$

Występujące we wzorze (3.9) składowe wektora krętu wyznacza się przy pomocy wzorów

$$(3.10) \quad \begin{aligned} H_{\xi_r} &= I_{O_r} \cdot \omega_{\xi_r} \\ H_{\eta_r} &= I_{x_r} \cdot \omega_{\eta_r} \\ H_{\zeta_r} &= I_{x_r} \cdot \omega_{\zeta_r}, \end{aligned}$$

gdzie I_{O_r} jest masowym momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek tarczy a I_{x_r} masowym momentem bezwładności względem średnicy tarczy. Składowe prędkości kątowej względem osi ξ_r, η_r, ζ_r są równe

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \omega_{\xi_r} &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \\ \omega_{\eta_r} &= -\dot{\psi} \sin \vartheta \\ \omega_{\zeta_r} &= \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równań (3.10) i (3.11) zależność (3.9) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} M_{\xi_r} &= I_{0r} \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \\ M_{\eta_r} &= -I_{xr} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin \vartheta) + I_{0r} \vartheta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) - I_{0r} \vartheta \dot{\psi} \cos \vartheta \\ M_{\zeta_r} &= I_{0r} \ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \vartheta [I_{0r} \dot{\varphi} + (I_{0r} - I_{xr}) \dot{\psi} \cos \vartheta]. \end{aligned}$$

Prędkość kątowna ω_{ξ_r} odpowiada prędkości kątownej Ω obrotów własnych wału i jest z założenia stała

$$(3.13) \quad \omega_{\xi_r} = \Omega = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Podstawiając zależność (3.13) do (3.12) otrzymujemy wyrażenia

$$(3.14) \quad \begin{aligned} M_{\xi_r} &= 0 \\ M_{\eta_r} &= -I_{xr} (\ddot{\psi} \sin \vartheta + 2\dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) + I_{0r} \Omega \dot{\vartheta} \\ M_{\zeta_r} &= I_{xr} \ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \vartheta [I_{0r} \Omega - I_{0r} \dot{\psi} \cos \vartheta]. \end{aligned}$$

Transformacja opisanych wzorem (3.14) momentów do układu nieruchomego odbywa się przy wykorzystaniu następujących relacji [3]

$$(3.15) \quad \begin{aligned} M_{x_{r2}} &= M_{\eta_r} \cos \vartheta \cos \psi - M_{\xi_r} \sin \psi \\ M_{x_{r3}} &= M_{\eta_r} \cos \vartheta \sin \psi + M_{\zeta_r} \cos \psi, \end{aligned}$$

gdzie przez $M_{x_{r2}}$ i $M_{x_{r3}}$ oznaczono momenty działające odpowiednio wokół osi x_{r2} i x_{r3} (rys. 3).

Pomiędzy kątami α i β określającymi chwilowe położenie tarczy w układzie nieruchomym x_{r1} i x_{r2} , x_{r3} a kątami ψ i ϑ opisującymi chwilowe położenie tarczy w układzie ruchomym ξ_r , η_r , ζ_r zachodzą relacje [3]

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \text{tg } \vartheta \cos \psi \\ \text{tg } \beta &= \text{tg } \vartheta \cdot \sin \psi \end{aligned}$$

Ponieważ rozpatrujemy małe drgania wału, przeto jedynie kąty ψ i φ mogą przyjmować dowolne wartości, pozostałe tj. ϑ , α i β są z założenia małe. Pozwala to na zlinearyzowanie związków (3.16), które przyjmują postać:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \alpha &= \vartheta \cdot \cos \psi \\ \beta &= \vartheta \cdot \sin \psi. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe zależności przy podstawieniu wzoru (3.14) do (3.15) otrzymujemy

$$(3.18) \quad \begin{aligned} M_{r_{x2}} &= I_{r_{x2}} [- (\ddot{\psi} \vartheta - 2\dot{\psi} \dot{\vartheta}) \cos \psi - (\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \vartheta) \sin \psi] + I_{0r} \Omega [\dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\psi} \vartheta \sin \psi] \\ M_{r_{x3}} &= I_{r_{x3}} [- (\ddot{\psi} \vartheta + 2\dot{\psi} \dot{\vartheta}) \sin \psi + (\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \vartheta) \cos \psi] + I_{0r} \Omega [\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\psi} \vartheta \cos \psi]. \end{aligned}$$

Różniczkując zależności (3.17) i podstawiając do równań (3.18) otrzymujemy ostateczne wzory na składowe momentów działających na tarczę

$$(3.19) \quad \begin{aligned} M_{r_{x2}} &= I_{r_{x2}} \ddot{\beta} - I_{0r} \Omega \dot{\alpha} \\ M_{r_{x3}} &= I_{r_{x3}} \ddot{\alpha} + I_{0r} \Omega \dot{\beta}. \end{aligned}$$

We wzorze (3.19) wyrażenia $-I_{or}\Omega\dot{\alpha}$ i $I_{or}\Omega\dot{\beta}$ oznaczają momenty giroskopowe działające w kierunku rotacyjnych współrzędnych uogólnionych q_{r_3} i q_{r_4} r -tego SES. Wobec powyższego blok uogólnionych sił giroskopowych działających na r -ty SES można przedstawić w postaci

$$(3.20) \quad \Gamma_r^* = \text{col}\{0, 0 - I_{or}\Omega q_{r_3}, I_{or}\Omega q_{r_4}\}.$$

Równanie (3.20) możemy przedstawić w postaci iloczynu

$$(3.21) \quad \Gamma_r^* = -G_r \cdot \dot{q}_r,$$

gdzie:

$$(3.22) \quad G_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{or}\Omega \\ 0 & 0 & -I_{or}\Omega & 0 \end{bmatrix},$$

jest blokiem oddziaływań giroskopowych odpowiadającym r -temu SES. Następnie tworzymy macierz kolumnową o wymiarach $4u \times 1$

$$(3.23) \quad \Gamma_r = \text{col}\{0, \dots, 0, \Gamma_r^*, 0, \dots, 0\}.$$

Wektor uogólnionych sił żyroskopowych całego układu otrzymamy po zsumowaniu wektorów Γ_r dla wszystkich SES

$$(3.24) \quad \Gamma = \sum_{r=1}^u \Gamma_r = -G \cdot q,$$

gdzie:

$$(3.25) \quad G = \text{diag}\{G_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, u,$$

jest macierzą giroskopową całego układu.

Wektor niepotencjalnych sił uogólnionych określa związek [5]

$$(3.26) \quad Q_\sigma^* = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = 1, \dots, n,$$

gdzie L oznacza sumę prac wszystkich osiowych sił przekrojowych. Oznaczając przez $v = v(x)$ oraz $w = w(x)$ ugięcia pręta w jego głównych płaszczyznach zginania a przez $N(x)$ osiową siłę przekrojową, pracę tej siły określa znana formuła energetyczna

$$(3.27) \quad L = \frac{1}{2} \int_{(i)} N(x) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

gdzie

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cong q_{r_3}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \cong q_{r_4}.$$

W modelu dyskretnym, pracę sił osiowych określa się sumując prace wykonane na przemieszczeniach wszystkich sztywnych elementów skończonych.

Zakłada się że wielkości tych sił nie zmieniają się na długości poszczególnych SES.

Oznaczając przez N_r siłę obciążającą r -ty sztywny element skończony, pracę tej siły określa związek (przy założeniu niewielkich kątów obrotu)

$$(3.28) \quad L_r = \frac{1}{2} N_r \cdot l_r (q_{r_3}^2 + q_{r_4}^2).$$

Związek (3.28) zapisujemy w postaci macierzowej. Tworzymy macierz \mathbf{K}_G^r o wymiarach $4u \times 4u$, w której r -ty blok na głównej przekątnej przyjmuje postać

$$(3.29) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & N_r l_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & N_r l_r \\ \hline \end{array}$$

Wówczas

$$(3.30) \quad L_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_G^r \mathbf{q},$$

gdzie \mathbf{q} jest wektorem współrzędnych uogólnionych.

Sumowanie wszystkich prac prowadzi do utworzenia macierzy sztywności geometrycznej układu o strukturze jak (3.29)

$$(3.31) \quad L = \sum_{r=1}^n L_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_G \mathbf{q},$$

gdzie:

$$(3.32) \quad \mathbf{K}_G = \sum_{r=1}^n \mathbf{K}_G^r.$$

Wprowadzając (3.31) do równania (3.26) otrzymujemy

$$(3.33) \quad \mathbf{Q}_G^* = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{q}.$$

Wprowadzając związki (3.7), (3.24) i (3.33) do (3.6) otrzymujemy

$$(3.34) \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_G \mathbf{q}.$$

Podstawiając (3.3) i (3.34) do równania (3.1) otrzymujemy równania ruchu układu w postaci

$$(3.35) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G)\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

4. Drgania swobodne

Po wprowadzeniu podstawienia

$$(4.1) \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}$$

równanie (3.35) przyjmie postać

$$(4.2) \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

W równaniu (4.2) macierz \mathbf{A} jest skośnie symetryczna a \mathbf{B} jest symetryczna i dodatnio określona. Podstawiając do równania (4.2) rozwiązanie w postaci $\mathbf{y} = \gamma e^{pt}$ otrzymujemy układ $2n$ równań (n -liczba stopni swobody układu)

$$(4.3) \quad (\mathbf{B} + p\mathbf{A})\gamma = \mathbf{0}$$

Do rozwiązania równania (4.3), czyli do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych wykorzystano metodę łańcuchów Sturma w połączeniu z techniką odwrotnej iteracji [7]. W tym celu równanie (4.3) przekształca się do postaci

$$(4.4) \quad (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{A}^*)\gamma = \mathbf{0}$$

gdzie $\mathbf{A}^* = i\mathbf{A}$ jest macierzą skośnie hermitowską, $\lambda = ip$ jest liczbą rzeczywistą a „ i ” jednostką urojoną. Zastosowana metoda polega na wykorzystaniu w pierwszym etapie własności łańcuchów Sturma do ustalenia liczby pierwiastków znajdujących się w dowolnym zadanym przedziale (a, b) , a następnie drogą kolejnego dzielenia przedziału (a, b) na ustaleniu przedziałów zawierających tylko po jednym pierwiastku. Wyizolowane w ten sposób pierwiastki są następnie obliczane z żądaną dokładnością. Do tego celu, jak wspomniano, wykorzystuje się technikę odwrotnej iteracji. W procesie odwrotnej iteracji równocześnie z wartościami własnymi obliczane są odpowiadające im wektory własne. Rozwiązanie równania (4.4) uzyskuje się w postaci par pierwiastków rzeczywistych $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_n$ a odpowiadające im wektory są zespolone i parami sprzężone. Wartości własne równania (4.3) są równe λ/i z czego wynika, że są one urojone. Wektory własne nie ulegają zmianie. Zastosowanie takiej metody rozwiązania zagadnienia własnego (4.3) zapewnia:

- ekonomiczne wykorzystanie pamięci operacyjnej komputera dzięki zachowaniu pasmowego charakteru macierzy,
- stabilność numeryczną, pozwalającą na wyznaczanie wartości własnych z dowolną dokładnością,
- możliwość obliczania zadanej liczby najniższych wartości własnych w określonym przedziale.

Wyznaczone w procesie odwrotnej iteracji wektory własne są następnie normowane tak, aby pierwsza różna od zera składowa była równa jedności. Z otrzymanych w ten sposób wektorów modalnych

$$(4.5) \quad \gamma^{(i)} = \text{col}(1, \gamma_2^{(i)}, \gamma_3^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, 2n)$$

można zbudować macierz modalną o postaci

$$(4.6) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \dots & \gamma_2^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n^{(1)} & \gamma_n^{(2)} & \dots & \gamma_n^{(2n)} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania (4.2) można zapisać w postaci

$$(4.7) \quad \mathbf{q} = \mathbf{H}e^{P^t}\boldsymbol{\beta}$$

gdzie:

$$(4.8) \quad e^{P^t} = \text{diag}(e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \dots, e^{p_{2n} t}),$$

oraz

$$(4.9) \quad \boldsymbol{\beta} = \text{col}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}),$$

jest wektorem o składowych, które wyznacza się z przyjętych dla rozwiązywanego przypadku warunków początkowych.

5. Program obliczeń

Program obliczeń drgań obrotowych wałów i wirników napisano w języku FORTRAN IV i uruchomiono na komputerze ICL-70. Program realizuje trzy zasadnicze etapy obliczeń

- 1) generowanie parametrów modelu obliczeniowego na podstawie danych o geometrii układu i stałych materiałowych,
- 2) budowa macierzy charakterystycznych układu,
- 3) obliczenie drgań swobodnych.

Szczególne uwagę zwrócono na proces przygotowania danych i kontrolę ich poprawności. Automatyzacja tej fazy obliczeń zwiększa efektywność korzystania z programu, przyczyniając się do wzrostu jego praktycznego znaczenia. Przykładowo, liczba danych opisujących linię wałów na statku o przeciętnej długości z 450 w przypadku przygotowania „ręcznego”, zmniejsza się do około 80 przy przygotowaniu automatycznym.

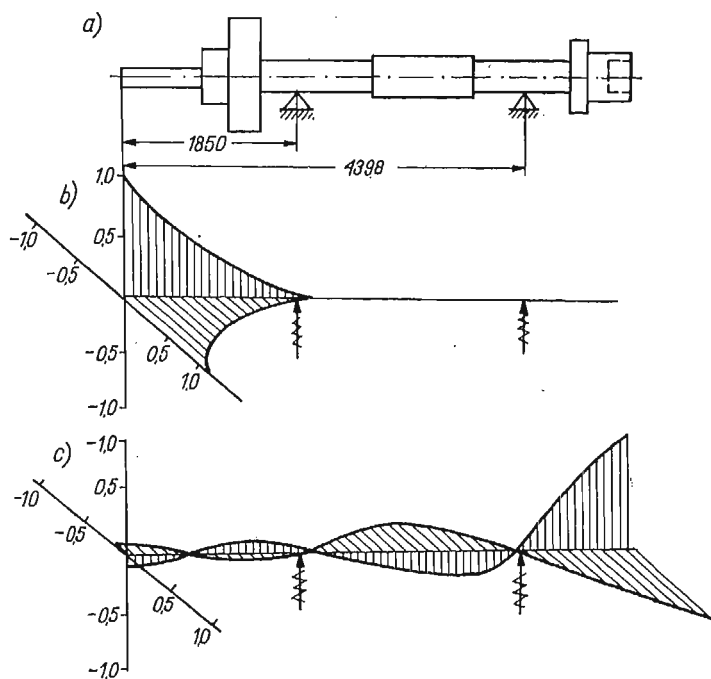
Program korzysta z pomocniczej pamięci zewnętrznej w postaci dysku magnetycznego, co umożliwia wykonywanie szeregu operacji na fragmentach macierzy, sukcesywnie ściąganych z dysku. Program zajmuje 150 kB pamięci operacyjnej i pozwala na obliczanie układów, których macierze charakterystyczne zawierają do 12000 elementów.

6. Przykład obliczeń

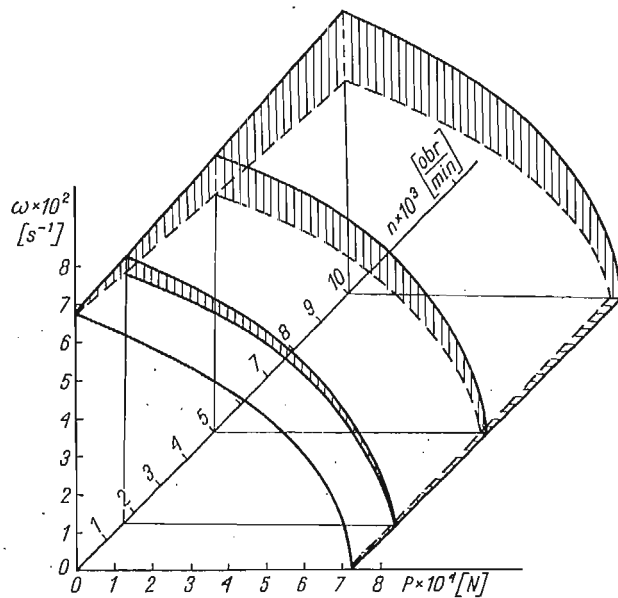
Wykonano obliczenia drgań obrotowych wirnika przedstawionego na rys. 4a. Geometrię wirnika opisano w tablicy 1. Wirnik jest wykonany ze stali o następujących stałych materiałowych

- moduł Younga $E = 2.1 \cdot 10^6$ [kG/cm²]
- moduł Kirchoffa $G = 0.83 \cdot 10^6$ [kG/cm²]
- ciężar właściwy $= 0.78 \cdot 10^{-2}$ [kG/cm³]

Wirnik podzielono na 10 sztywnych elementów skończonych i 11 elementów sprężystych (łącznie z ES reprezentującymi sztywności podpór). Wartości liczbowe parametrów modelu obliczeniowego zamieszczono w tablicach 2 i 3. W tablicy 3 przez r i p oznaczono numery SES pomiędzy którymi znajduje się k -ty ES, przez c_{k1} i c_{k2} oznaczono współczynniki sztywności wału na ścinanie, przez c_{k3} i c_{k4} współczynniki sztywności wału na zginanie



Rys. 4. Wirnik podparty na dwóch podporach: a) schemat układu, b) postać drgań 1 stopnia, c) postać drgań 2 stopnia



Rys. 5. Zależność częstości drgań własnych wirnika ω od wartości siły osiowej P i liczby obrotów n

Tablica 1

Nr odcinka wału	Średnica [mm]		Długość [mm]
	zewnątrzna	wewnętrzna	
1	51	0	630
2	102	0	290
3	203	0	330
4	66	0	1250
5	72	0	1298
6	66	0	1250
7	185	0	112
8	102	0	232
9	102	65	170

Tablica 2

Nr SES	Masa	Masowy moment bezwładności
	[kg]	[kgm ²]
1	0.4994	0.04077
2	2.3547	0.57084
3	9.3476	1.69215
4	1.6615	0.51987
5	1.7737	0.57084
6	1.9775	0.62181
7	1.8960	0.58103
8	1.6615	0.51987
9	3.5168	1.15188
10	1.7227	0.16309

Tablica 3

r	p	$c_{k1} \times 10^{-10}$	$c_{k2} \times 10^{-10}$	$c_{k3} \times 10^{-10}$	$c_{k4} \times 10^{-10}$	S_{rk}	S_{pk}
		[N/m]		[Nm/rad]		[cm]	[cm]
1	2	0.0274		0.1130		15.1	-39.8
2	3	0.1442		1.5646		20.8	-19.8
3	4	0.0488		0.3383		40.7	-30.3
4	5	0.0459		0.3168		30.3	-31.5
5	6	0.0534		0.4259		29.0	-30.3
6	7	0.0547		0.4488		30.3	-29.4
7	8	0.0481		0.3444		31.2	-30.3
8	9	0.0459		0.3168		30.3	-43.7
9	10	0.0718		0.7321		16.9	-11.8
4	4	0.0429	0.0627	0.8589	0.9547	3.3	—
8	8	0.0407	0.0472	0.5156	0.6130	15.9	—

a przez s_{rk} i s_{pk} oznaczono współrzędne zamocowania k -tego ES w lokalnym układzie odniesienia odpowiednio r -tego i p -tego SES. W dwóch ostatnich wierszach tablicy 3 podano współczynniki sztywności podpór oraz numery SES ($r = p$) do których są one dołączone.

W rezultacie przeprowadzonych obliczeń przebadano wpływ sił osiowych i efektów żyroskopowych, działających łącznie, na częstości drgań obrotowych wirnika. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie graficznej na rys. 5. Dodatkowo w tablicy 4 zestawiono częstości drgań własnych wirnika obliczone dla wybranych prędkości obrotowych wirnika i różnych wartości sił osiowych. Należy zaznaczyć, że obliczenia wykonano przy założeniu występowania jedynie precesji współbieżnej. Dwie pierwsze postaci drgań wirnika (dla $n = 0$) pokazano na rys. 4.

Tablica 4

$P \times 10^{-4} [N]$	$n \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right]$	Postać drgań	0	500	1500	5000	10000
			0	I	652.36	681.52	696.34
		II	839.27	878.95	898.38	913.16	942.72
1	I	634.42	662.35	677.24	688.42	710.76	
	II	818.49	856.92	876.14	890.55	919.38	
3	I	589.48	615.36	629.20	639.58	660.34	
	II	775.21	811.72	829.82	843.46	870.77	
5	I	538.64	562.35	574.99	584.48	603.45	
	II	729.05	763.29	780.40	793.24	818.91	
10	I	378.80	395.48	404.37	411.05	424.38	
	II	583.65	611.05	624.75	635.03	655.58	
12	I	274.08	286.14	292.58	297.40	307.05	
	II	505.75	529.50	541.37	550.27	568.09	
13	I	206.86	209.08	220.82	224.46	231.75	
	II	461.61	467.02	494.12	502.25	518.51	
13.5	I	153.19	159.94	163.53	167.29	171.68	
	II	434.99	455.41	465.71	472.31	488.69	

Bibliografia

1. J. JENSEN, F. NIORDSON, P. PEDERSEN — *Autor and kwick index on rotor dynamics*, IUTAM Symposium on Rotor Dynamics, Lyngby, Denmark, 1974.
2. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITBRODT, F. NAJBAR, S. GRABOWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, 1975.

3. K. MAGNUS, *Giroskop — teoria i primienienije*, Izd. Mir, Moskwa 1974.
4. A. MUSZYŃSKA, *Z zagadnień dynamiki wirników*, Prace IPPT Nr 14, 1971.
5. W. OSTACHOWICZ, *Dyskretny model obliczania drgań własnych i stateczności prętów osiowo obciążonych o dowolnie zmiennym przekroju*. Mech. Teor. i Stosow., 3, 13 1975.
6. J. TARNOWSKI, *Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń drgań wałów okrętowych z uwzględnieniem efektów giroskopowych*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 22, Nr 3, 1974.
7. K. K. GUPTA, *On a combined Sturm sequence and inverse iteration technique for eigenproblem solution of spinning structures*, Int. J. Num. Meth. Engng, 7, 1973.

Резюме

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ НАГРУЖЕННЫХ
ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

В работе представлено влияние гироскопических эффектов и осевых сил на собственные колебания валов и роторов. На основе метода жестких конечных элементов принято вычислительную модель. Работу иллюстрирует конкретный пример. Метод разработан с точки зрения применения цифровых вычислительных методов. Вычислительная программа написана в языке Фортран IV.

Summary

ANALYSIS OF VIBRATIONS OF ROTATING SHAFTS LOADED BY AXIAL FORCES

The influence of gyroscopic effects and axial forces, acting simultaneously on natural frequencies of shafts has been examined.

The stiff finite element model has been used. Numerical results are presented for representative structures, solved by the computer program written in FORTRAN IV for the ICL-70 computer.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI
MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lutego 1978 r.