

## DRGANIA SPRĘŻYSTO LEPKOPLASTYCZNEJ POWŁOKI KULISTEJ

WIESŁAW WOJEWÓDZKI, JANUSZ SOKAŁSKI (WARZAWA)

### 1. Wprowadzenie

Uwzględnienie efektów lepkości, wzmocnienia materiału i zmian geometrii w konstrukcjach obciążonych dynamicznie jest konieczne dla poprawnej oceny charakteru procesu deformacji, wielkości odkształceń i naprężeń. Problem ten był przedmiotem wielu prac teoretycznych i doświadczalnych. Obszerne prace WIERZBICKIEGO [1] i JONESA [2] zawierają przegląd dotychczasowych osiągnięć w tej dziedzinie. Problem deformacji cienkiej powłoki kulistej obciążonej wybuchem w jej wnętrzu był rozpatrywany w kilku pracach. BAKER [3] przedstawił rozwiązanie dla powłoki z materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem bez efektu lepkości. Otrzymane teoretyczne wyniki porównano z eksperymentalnymi osiągając dobrą ich zgodność. W pracy SZCZEPIŃSKIEGO [4] uwzględniając duże odkształcenia powłoki zbadano oddzielny i łączny wpływ efektu wzmocnienia i lepkości materiału na wielkość przemieszczeń. Stwierdzono, że uwzględnienie obu efektów daje duże zmniejszenie końcowych odkształceń. Wyniki otrzymane przez DUFFEY [5, 6] wskazują, że również w zakresie małych deformacji powłoki wzmocnienie odkształceniowe i lepkość materiału zmniejszają znacznie przemieszczenia. Stwierdzono, że wpływ lepkości materiału na wielkość maksymalnych przemieszczeń wzrasta gdy wartość impulsu rośnie. Dla ustalonej wartości impulsu ciśnienia wpływ ten maleje ze wzrostem czasu działania impulsu. Największe przemieszczenia powstają w przypadku obciążenia idealnym impulsem ciśnienia. Podane rozwiązanie analityczne odnosi się tylko do początkowego okresu deformacji nie dając informacji o szybkości tłumienia drgań w dalszym procesie odkształcenia.

W niniejszej pracy rozpatrywać będziemy cienką pełną powłokę kulistą z materiału sprężystolepkoplastycznego obciążoną pojedynczym prostokątnym impulsem ciśnienia bądź też kilkoma prostokątnymi impulsami. Impuls jest skierowany radialnie na zewnątrz powłoki. Rozpatrywany problem cechuje kulista symetria. Celem pracy jest analiza całego procesu drgań w zakresie małych odkształceń, określenie czasu początkowego uplastycznienia, zbadanie wpływu lepkości materiału i wielkości impulsu na podstawowe parametry drgań. Badany będzie również wpływ chwili przyłożenia powtórnego impulsu i obciążenia cyklicznego na wielkość przemieszczeń.

### 2. Równanie ruchu

Przyjmujemy równania konstytutywne dla materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia, wyprowadzone przez PERZYŃĘ [7] w następującej postaci:

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{\gamma}{2} \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk},$$

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1, \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & \text{dla } F > 0 \\ 0 & \text{dla } F \leq 0, \end{cases}$$

gdzie  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  oznaczają odpowiednio składowe tensora odkształcenia i naprężenia,  $e_{ij}$ ,  $s_{ij}$  są dewiatorami tych tensorów,  $\mu$ ,  $K$  oznaczają odpowiednio moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego,  $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ ,  $\sigma_0$  jest statyczną granicą plastyczności materiału,  $\gamma$  współczynnikiem lepkości, a  $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$  oznacza drugi niezmiennik dewiatora

naprężenia. Kropką oznaczono różniczkowanie względem czasu. Równania powyższe opisują liniowe efekty sprężyste, statyczne uplastycznienie według warunku Hubera-Misesa, izotropowe wzmocnienie materiału oraz liniowy wpływ prędkości odkształcenia. W przejściu granicznym dla  $\gamma = \infty$ ,  $\sqrt{J_2} = k$  otrzymuje się równania dla ośrodka sprężysto-idealnie-plastycznego. W rozpatrywanym przypadku kulistej symetrii ( $\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma$ ,  $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \varepsilon$ ) z (2.1) otrzymujemy

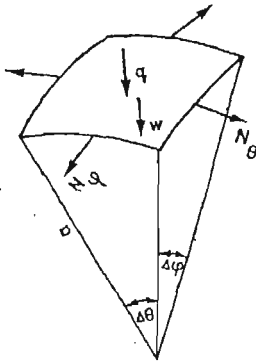
$$(2.2) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1-\nu}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sqrt{3}\gamma}{6\sigma_0} (\sigma + m\sigma_0) \quad \text{dla } |\sigma| > \sigma_0,$$

$$(2.3) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1-\nu}{E} \dot{\sigma} \quad \text{dla } |\sigma| \leq \sigma_0,$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga,  $\nu$  oznacza współczynnik Poissona zaś  $m = +1$  dla ściskania i  $m = -1$  dla rozciągania.

Równanie ruchu elementu powłoki, rys. 1, jest następujące

$$(2.4) \quad 2N = a(\rho h \ddot{w} - q(t)),$$



Rys. 1 Element powłoki. Dodatkowo kierunki sił i przemieszczeń

gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału,  $h$  jest grubością powłoki,  $N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz$  jest siłą podłużną na jednostkę długości, pozostałe wielkości są określone na rysunku. Przyjmujemy, że materiał powłoki jest nieściśliwy. Prędkość odkształcenia punktów powierzchni środkowej wynosi  $\dot{\varepsilon} = -\dot{w}/a$ . Uwzględniając (2.2) równanie ruchu (2.4) dla  $|N| > N_0$  zapisujemy w następującej postaci

$$(2.5) \quad \ddot{\ddot{w}} + 2\alpha \dot{\ddot{w}} + \omega^2 \ddot{w} = \frac{2\alpha\sigma_0}{\rho a} \left[ -2m + \frac{1}{Q_0} \left( \frac{1}{\alpha} \dot{q}(t) + 2q(t) \right) \right],$$

gdzie

$$(2.6) \quad 2\alpha = \frac{\gamma E}{2\sqrt{3}(1-\nu)\sigma_0}, \quad \omega^2 = \frac{2E}{(1-\nu)\rho a^2},$$

$\omega$  jest częstotliwością sprężystych drgań własnych o okresie  $T = 2\pi/\omega$ , zaś  $Q_0 = 2\sigma_0 h$  jest nośnością graniczną powłoki. W fazie sprężystej deformacji,  $|N| < N_0$  ( $N_0 = \sigma_0 h$ ) równanie ruchu ma postać

$$(2.7) \quad \ddot{w} + \omega^2 \dot{w} = \frac{1}{\rho h} \dot{q}(t).$$

W ogólnym przypadku deformacji rozpatrywać będziemy następujące cztery fazy: 1 i 4 sprężyste gdy  $|N| < N_0$  i odpowiednio  $q \neq 0$ ,  $q = 0$ , 2 i 3 sprężystolepkoplastyczne gdy  $|N| > N_0$  i odpowiednio  $q \neq 0$ ,  $q = 0$ . Zakładamy, że jeśli przekrój powłoki uplastycznia się to jednocześnie cały w czasie odpowiadającym uplastycznieniu punktów na powierzchni środkowej. Dla cienkich powłok wpływ stopniowego uplastycznienia się przekroju na zachowanie powłok jest zaniedbywalny, DUFFEY, KRIEG [8]. Przy przejściu z jednej fazy do drugiej muszą być spełnione warunki ciągłości: przemieszczenia, prędkości oraz sił wewnętrznych.

W dalszej części zajmować się będziemy powłoką obciążoną prostokątnym impulsem ciśnienia o wielkości  $Q$  i czasie działania  $t_i$ ,

$$(2.8) \quad q(t) = \begin{cases} -Q & \text{dla } 0 \leq t \leq t_i, \\ 0 & \text{dla } t > t_i. \end{cases}$$

Impuls jest rozłożony równomiernie na całej wewnętrznej powierzchni i skierowany radialnie na zewnątrz powłoki. W zależności od wielkości impulsu  $I = Qt_i$  deformacja powłoki może odbywać się w różnych fazach. Rozpatrywać będziemy różne możliwości.

### 3. Fazy sprężyste

Zajmiemy się najpierw sytuacją gdy w całym procesie deformacji  $|N| < N_0$ . Rozwiązanie równania (2.7) w przypadku (2.8) ma postać

$$(2.9) \quad w = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C.$$

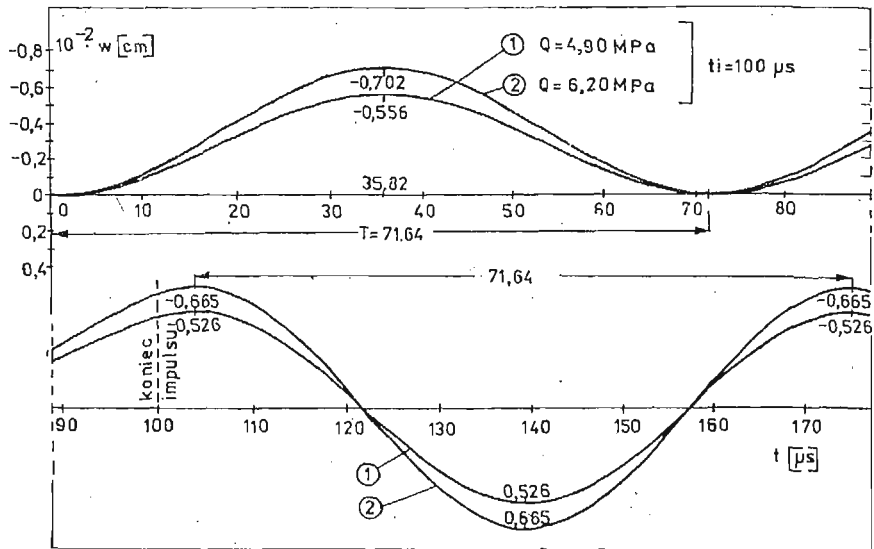
Wyznaczając stałe z warunków początkowych  $w(0) = \dot{w}(0) = 0$ ,  $\ddot{w}(0) = -Q/\rho h$  oraz z warunków ciągłości dla  $t = t_i$ , otrzymujemy

$$(2.10) \quad w = L(1 - \cos \omega t), \quad L = -\frac{Q}{\rho h \omega^2}, \quad 0 \leq t \leq t_i,$$

$$(2.11) \quad w = L[(\cos \omega t_i - 1) \cos \omega t + \sin \omega t_i \sin \omega t], \quad t > t_i.$$

Ze wzoru (2.10) wynika, że w czasie  $t = (n+1/2)T$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , przemieszczenia i siły wewnętrzne są największe i wynoszą

$$w = -2Q/\rho h \omega^2, \quad N = Qa, \quad \text{zaś } \dot{w}_0 = 0, \quad \ddot{w} = Q/\rho h.$$



Rys. 2. Zmiana przemieszczenia w czasie w zakresie sprężystym. Obciążenie impulsem ciśnienia: krzywa 1— $Q = 4,90 \text{ MPa}$   $t_i = 100 \mu\text{s}$  krzywa 2— $Q = 6,20 \text{ MPa}$ ,  $t_i = 100 \mu\text{s}$ .

Dla  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , obciążona powłoka osiąga najmniejsze odkształcenia i siły wewnętrzne,  $w = 0$ ,  $N = 0$  zaś  $\dot{w} = 0$ ,  $\ddot{w} = -Q/\rho h$ , rys. 2. Analizując (2.11) rozpatrzmy dwa skrajne przypadki. Przypadek pierwszy gdy  $t_i = (n+1/2)T$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Mamy wówczas  $w = (2Q/\rho h \omega^2) \cos \omega t$  i dla  $t = T(n+1)/2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , powłoka osiąga ekstremalne przemieszczenia i siły wewnętrzne  $w = \pm 2Q/\rho h \omega^2$ ,  $N = \pm Qa$ , zaś  $\dot{w} = 0$ ,  $\ddot{w} = \pm 2Q/\rho h$ . Przypadek drugi gdy  $t_i = (n+1)T$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , wtedy otrzymujemy  $w = \dot{w} = \ddot{w} = N = 0$ . Do obliczeń numerycznych w całej pracy przyjęto dane liczbowe zawarte w tabelicy 1.

Uwzględniając (2.10) (2.11) i warunek uplastycznienia w równaniu (2.3) otrzymujemy następujące wzory określające czas początkowego uplastycznienia powłoki

Tabela 1. Dane liczbowe do obliczeń numerycznych.

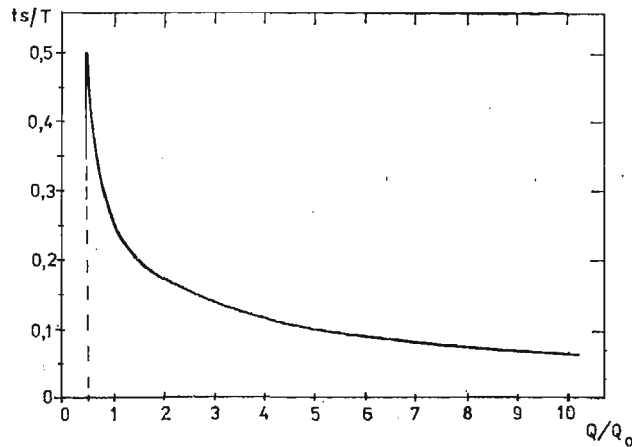
Materiał	$E$ [MPa]	$\nu$	$\sigma_0$ [MPa]	$\rho$ [Ns <sup>2</sup> /cm <sup>4</sup> ]	$\gamma$ [s <sup>-1</sup> ]	$a$ [cm]	$h$ [cm]
Miękka stal	$2,0594 \cdot 10^5$	0,3	206,9	$7,65 \cdot 10^{-5}$	10	10	0,3
					100		
					200		
					400		
					427,36		
					500		
					1 000		
					20 000		

$$(2.12) \quad ts = \frac{1}{\omega} \arccos \left( 1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \quad \text{dla } ts \leq ti,$$

$$(2.13) \quad ts = \frac{1}{\omega} \arcsin \left[ \frac{Q_0}{2Q} \frac{\sin \omega ti}{1 - \cos \omega ti} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \omega ti}{2} - \left( \frac{Q_0}{2Q} \right)^2} \right] + ti \quad \text{dla } ts \geq ti.$$

Największa wartość przemieszczenia w zakresie sprężystym określona z (2.10) wynosi  $w_{\max}^s = -2Q/\rho h \omega^2$  i występuje po raz pierwszy w czasie  $\pi/\omega$ . Zatem najmniejszy początkowy impuls uplastyczniający powłokę wynosi  $I_0 = (Q_0/2)(\pi/\omega) = (Q_0/2)(T/2)$ . Jeżeli przyłożone obciążenie ma wartość mniejszą od  $Q_0/2$  to dla dowolnie długiego czasu jego działania powłoka nie uplastyczni się. W rozpatrywanym szczegółowym przypadku (tablica 1)  $Q_0 = 12,42$  MPa. Wykres funkcji (2.12) przedstawiono na rys. 3. Czas pierwszego uplastycznienia dla impulsów  $I > I_0$  oblicza się ze wzoru (2.12) bądź (2.13).

W przypadku działania większych obciążeń gdy pojawiają się wielokrotnie fazy sprężystolepkoplastyczne wówczas aby określić cały proces deformacji, do opisu faz czwartych musimy korzystać z równania w postaci (2.9), a występujące trzy stałe określać z warunków ciągłości na granicach faz.



Rys. 3. Czas pierwszego uplastycznienia powłoki w funkcji obciążenia, (wzór (2.12)).

#### 4. Fazy sprężystolepkoplastyczne

Zajmować się będziemy drugą i trzecią fazą ruchu,  $|N| > N_0$ . Istnieją trzy rozwiązania (2.5) w zależności od relacji wielkości  $\alpha$  i  $\omega$ . Niech  $\xi = \alpha/\omega$ .

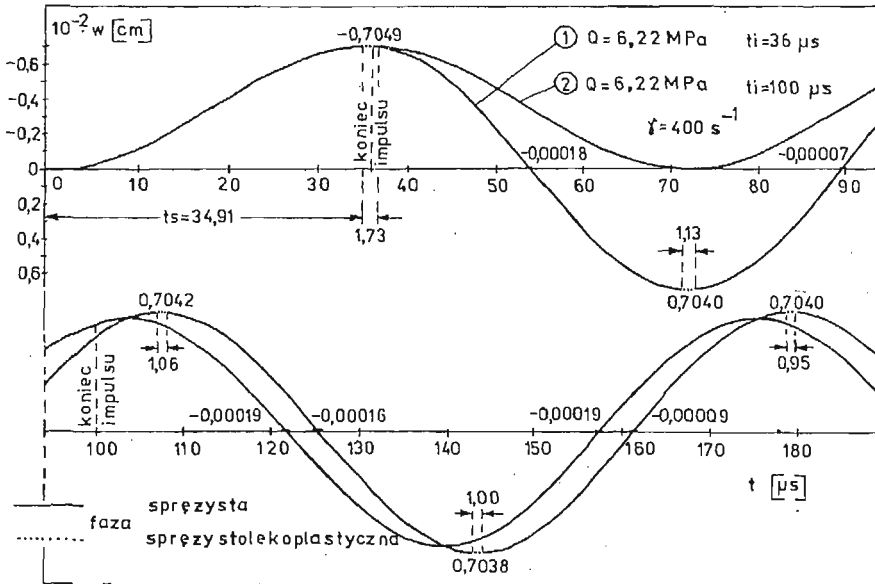
4.1. Przypadek słabego tłumienia,  $\xi < 1$ . Dla prostokątnego impulsu ciśnienia (2.8) otrzymujemy

$$(2.14) \quad w = [A \cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega t + B \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega t] e^{-\xi \omega t} - \frac{4\sigma_0 \xi}{\rho \omega a} \left( m + \frac{Q}{Q_0} \right) t + C,$$

gdzie  $A$ ,  $B$ ,  $C$  stałe całkowania. Jak widać, przemieszczenie (2.14) składa się z trzech części: cyklicznej, liniowej i stałej. Część cykliczna jest wytłumiana w czasie, szczególnie silnie dla większych wartości współczynnika lepkości  $\gamma$ .

Rozpatrzmy teraz sytuację gdy w drugiej fazie ruchu część cykliczna jest prawie wytłumiona a przemieszczenie (2.14) można aproksymować częścią liniową, która nie jest tłumiona i częścią stałą reprezentującą trwałe przemieszczenie. Część liniowa znika gdy obciążenie  $Q = Q_0$  i przy długim czasie jego działania  $w \rightarrow C$  tzn. powłoka dąży do stałego położenia równowagi. Gdy  $Q > Q_0$  część liniowa powoduje zwiększenie przemieszczeń wraz ze wzrostem współczynnika lepkości. Dla  $Q < Q_0$  część liniowa zmniejsza przemieszczenia. Kładąc  $Q = 0$  w wyrażeniu (2.14) dla drugiej fazy otrzymujemy odpowiedni opis ruchu fazy trzeciej.

Na rys. 4 przedstawiono przemieszczenia w przypadku działania niewielkiego obciążenia. Założono współczynnik lepkości  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ . Krzywa 1 odpowiada impulsowi  $Q = 6,22 \text{ MPa}$   $t_i = 36 \mu\text{s}$  a krzywa 2 impulsowi  $Q = 6,22 \text{ MPa}$ ,  $t_i = 100 \mu\text{s}$ . Krzywa 2 jest niemal identyczna z krzywą 2 na rys. 2. Różnica polega na małym przekroczeniu granicy sprężystości materiału. Faza sprężystolepkoplastyczna pojawia się tylko jednokrotnie. Jest to wpływ długości działania obciążenia na wielkość przemieszczenia. W przy-

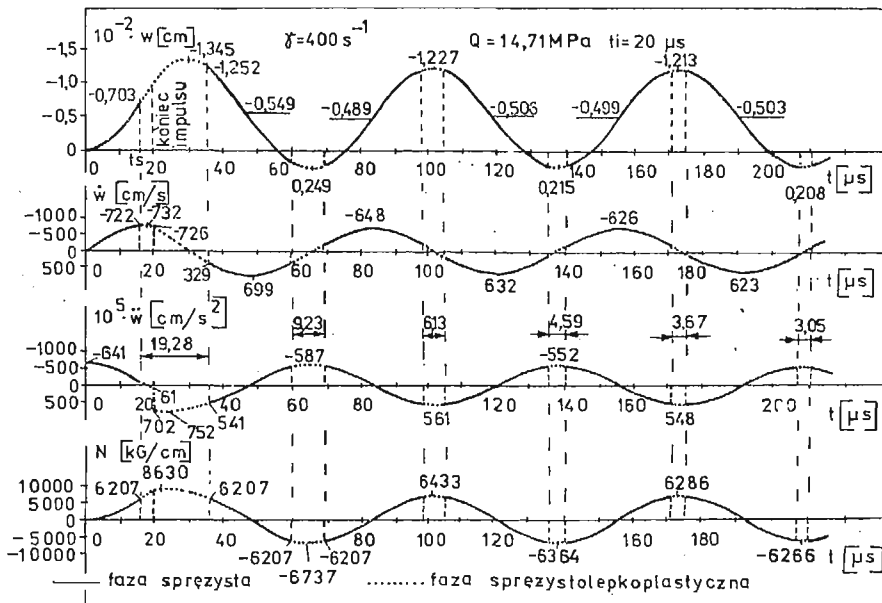


Rys. 4. Zmiana przemieszczenia w czasie. Przypadek słabego tłumienia,  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ . Krzywa 1— $Q = 6,22 \text{ MPa}$ ,  $t_i = 36 \mu\text{s}$ , krzywa 2— $Q = 6,22 \text{ MPa}$ ,  $t_i = 100 \mu\text{s}$

padku krzywej 1 fazy sprężystolepkoplastyczne pojawiają się wielokrotnie, są bardzo krótkie i nie wpływają w sposób istotny, dla  $t > t_i$  na postać drgań. Liczby umieszczone przy poziomych kreskach tuż nad osią odciętych, wyznaczają chwilowe położenia równowagi wokół których powłoka wykonuje oscylacje. Tym wartościom odpowiada siła  $N = 0$ . W powłoce powstają niewielkie odkształcenia trwałe. Na rysunku podano również wartości największych przemieszczeń w fazie sprężystolepkoplastycznej i czas trwania tych faz. Wartości te maleją z upływem czasu.

Na rys. 5 podano typowy wykres przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia i siły podłużnej dla obciążenia impulsem  $Q = 14,71 \text{ MPa}$   $t_i = 20 \mu\text{s}$ . Przyjęto  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ .

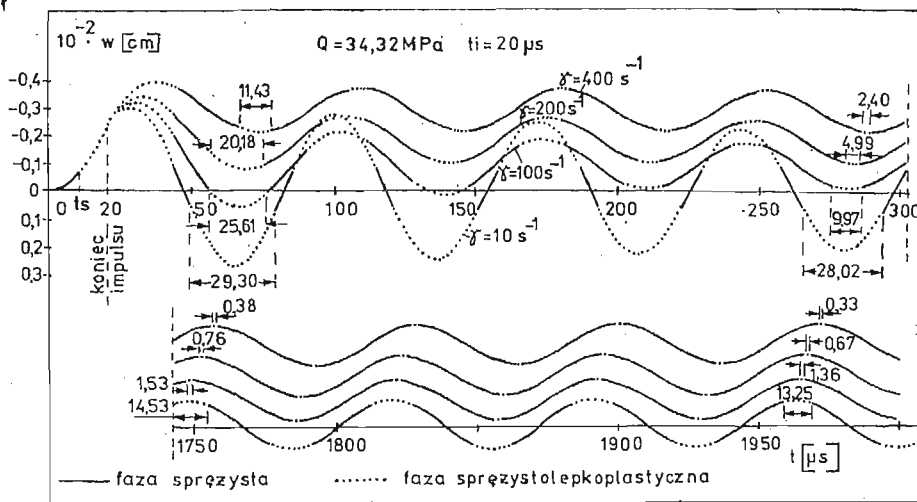
W czasie  $t_s = 16,12 \mu\text{s}$  powłoka uplastycznia się przechodząc z fazy sprężystej w fazę sprężystolepkoplastyczną. Osiąga ona w tym czasie maksymalne przemieszczenia sprężyste wynoszące  $0,00703 \text{ cm}$ . Stanowią one  $0,023$  grubości powłoki. Siła podłużna osiąga wartość  $N_0 = 6207,6 \text{ N/cm}$ . Po zdjęciu w  $20 \mu\text{s}$  obciążenia, przemieszczenia i siła podłużna w dalszym ciągu narastają ale coraz wolniej. Po  $22 \mu\text{s}$  (w  $2 \mu\text{s}$  po zdjęciu obciążenia) siła podłużna osiąga największą wartość  $N = 8625,9 \text{ N/cm}$  po czym stopniowo maleje do wartości  $N_0$  w chwili  $35,4 \mu\text{s}$  i wówczas następuje czwarta faza ruchu (odciążenie sprężyste). Po fazie czwartej następuje powtórnie trzecia faza ruchu ale przekroczenie granicy plastyczności występuje przy ściskaniu. Fazy trzecia i czwarta wielokrotnie się powtarzają. W miarę upływu czasu  $|N|$  dąży do  $N_0$  i tak w chwili  $t = 2036 \mu\text{s}$   $N = 6208,2 \text{ N/cm}$ . Przemieszczenie osiąga największą wartość  $0,013447 \text{ cm}$  w chwili  $30 \mu\text{s}$ . Prędkość odkształcenia jest największa w chwili  $18,3 \mu\text{s}$  i wynosi  $731,8 \text{ cm/s}$ . Wielkości przemieszczeń (liczby przy poziomych kreskach) określające chwilowe położenie równowagi stopniowo



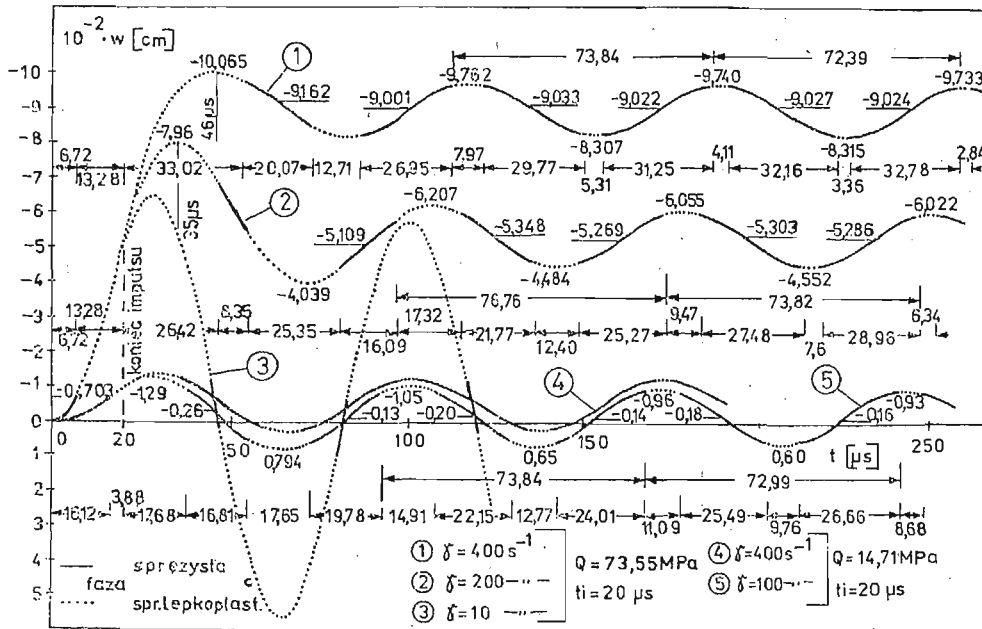
Rys. 5. Zmiana przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia i siły podłużnej w czasie dla obciążenia impulsem  $Q = 14,71 \text{ MPa}$   $t_i = 20 \mu\text{s}$  i dla  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$

ulegają stabilizacji reprezentując trwałe odkształcenia. I tak w chwili  $t = 2018 \mu\text{s}$  trwałe ugięcie wynosi  $0,00501422 \text{ cm}$ . Różnica między maksymalnymi odchyleniami powłoki od położenia równowagi powoli maleje do wartości maksymalnej amplitudy drgań sprężystych wynoszącej  $0,007033 \text{ cm}$  i na przykład w chwili  $t = 2036 \mu\text{s}$  wynosi  $0,0070341 \text{ cm}$ . W skutek tłumienia długości faz sprężystolepkoplastycznych maleją i okres drgań dąży do okresu drgań sprężystych  $T = 71,64 \mu\text{s}$ . Np. w czasie około  $2000 \mu\text{s}$  wynosi on  $71,6452 \mu\text{s}$ .

Na rys. 6 i 7 przedstawiono wpływ lepkości materiału i wielkości obciążenia na przebieg drgań. Dla współczynnika lepkości  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$  i danych w tabelicy 1, w chwili  $t = 20 \mu\text{s}$   $e^{-\xi\omega t} = 1/5,15$  a w chwili  $t = 800 \mu\text{s}$   $e^{-\xi\omega t} = 1/(2,95 \cdot 10^{28})$ . Widać, że część cykliczna rozwiązania (2.14) jest już w początkowej fazie silnie wytłumiana i dla dużych



Rys. 6. Przesunięcie powłoki w funkcji czasu i współczynnika lepkości. Przypadek słabego tłumienia. Obciążenie impulsem  $Q = 34,32 \text{ MPa}$ ,  $t_i = 20 \mu\text{s}$ .



Rys. 7. Przesunięcie powłoki w funkcji czasu, współczynnika lepkości i impulsu. Przypadek słabego tłumienia.

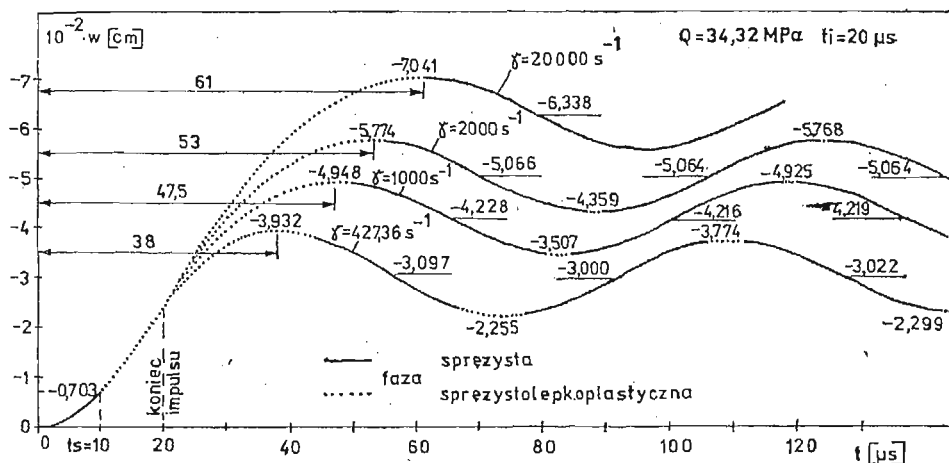


wartości czasu praktycznie nie ma żadnego wpływu na postać przemieszczenia. Dla małych współczynników lepkości przebieg tłumienia przebiega bardzo powoli. Np. dla  $\gamma = 10 \text{ s}^{-1}$  w chwili  $t = 20 \text{ }\mu\text{s}$   $e^{-\xi\omega t} = 1/1,04$ , a więc w tym przypadku tłumienie cyklicznej części drgań jest minimalne i okres drgań sprężystolepkoplastycznych jest bardzo zbliżony do okresu drgań sprężystych. Jednocześnie część liniowa jest 40 razy mniejsza niż dla  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$  i mało wpływa na postać przemieszczenia. Dla  $\gamma = 10 \text{ s}^{-1}$  i  $t = 800 \text{ }\mu\text{s}$   $e^{-\xi\omega t} = 1/5,15$ , a więc jest to wartość osiągnięta dla  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$  już w chwili  $t = 20 \text{ }\mu\text{s}$ . W czasie około  $1950 \text{ }\mu\text{s}$  długość fazy sprężystolepkoplastycznej dla  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$  wynosi  $0,33 \text{ }\mu\text{s}$  natomiast dla  $\gamma = 10 \text{ s}^{-1}$  wynosi ona  $13,25 \text{ }\mu\text{s}$ , rys. 6. Reasumując, wzrost współczynnika lepkości powoduje wzrost maksymalnych przemieszczeń i czasu ich pojawienia się, wzrost odkształceń trwałych, szybkie wytłumienie faz sprężystolepkoplastycznych a w konsekwencji szybsze dążenie procesu do drgań sprężystych, zmniejszenie wielkości sił wewnętrznych. Wzrost wielkości obciążenia  $Q$  powoduje wzrost ekstremalnych przemieszczeń i czasu ich występowania, wzrost odkształceń trwałych i sił wewnętrznych. Wpływ wielkości obciążenia  $Q$  na postać drgań a zwłaszcza na szybkość wytłumiania faz sprężystolepkoplastycznych jest bardzo mały, rys. 7. Wraz ze wzrostem czasu trwania obciążenia  $t_i$  szczególnie dla większych  $\gamma$  przemieszczenia (2.14) dążą do równania prostej i dla  $|Q| < Q_0$  maleją, dla  $|Q| = Q_0$  są stałe, zaś dla  $|Q| > Q_0$  rosną.

4.2. Przypadek granicznego tłumienia,  $\xi = 1$ . Dla obciążenia impulsowego (2.8) otrzymujemy w fazie drugiej

$$(2.15) \quad w = (A + Bt)e^{-\xi\omega t} - \frac{4\sigma_0\xi}{\rho\omega a} \left( m + \frac{Q}{Q_0} \right) t + C,$$

gdzie  $A$ ,  $B$ ,  $C$  stałe określone przez warunki ciągłości. Ruch nie jest oscylacyjny. Pierwszy człon jest silnie wytłumiany już w początkowym okresie fazy sprężystolepkoplastycznej. Człon drugi i trzeci jest identyczny jak w przypadku  $\xi < 1$ . Opis dla fazy trzeciej otrzymujemy podstawiając do (2.15)  $Q = 0$ . Dla danych w tabelicy 1 wielkości  $\xi = 1$  odpowiada współczynnik lepkości  $\gamma = 427,36 \text{ s}^{-1}$ . Drgania powłoki dla tego przypadku przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Przemieszczenia powłoki w funkcji czasu i współczynnika lepkości. Przypadek granicznego i silnego tłumienia. Obciążenie impulsem  $Q = 34,32 \text{ MPa}$ ,  $t_i = 20 \text{ }\mu\text{s}$

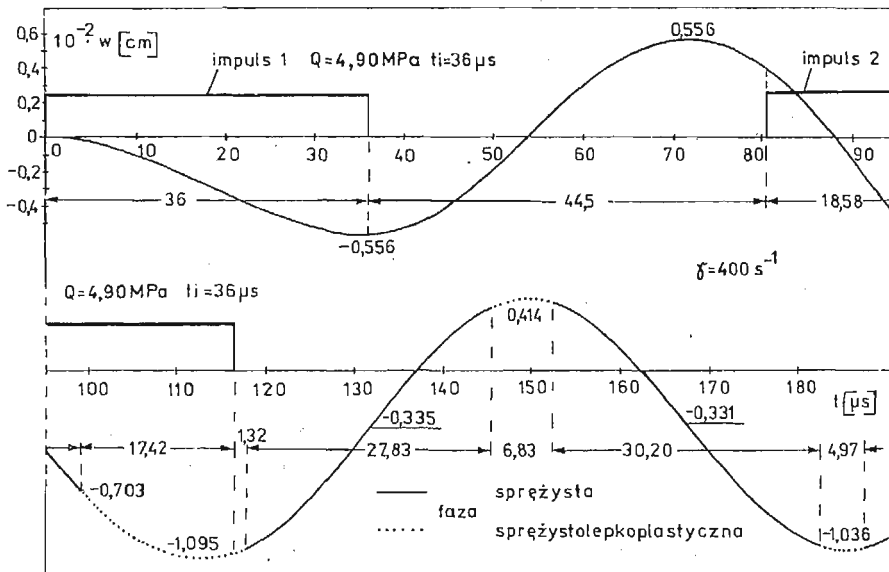
4.3. **Przypadek silnego tłumienia,  $\xi > 1$ .** Dla obciążenia prostokątnym impulsem (2.8) otrzymujemy w fazie drugiejj

$$(2.16) \quad w = Ae^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega t} + Be^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega t} - \frac{4\sigma_0 \xi}{\rho \omega a} \left( m + \frac{Q}{Q_0} \right) t + C.$$

Stałe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są określone przez warunki ciągłości. Jest to opis ruchu aperiodycznego. Pierwszy człon określony przez funkcję eksponencjalną jest silnie wytłumiany w początkowym okresie fazy sprężystolepkoplastycznej. Pozostałe człony liniowy i stały są identyczne jak w przypadku słabego tłumienia. Na rys. 8 przedstawiono zmianę przemieszczenia w czasie dla kilku współczynników lepkości materiału. Fazy sprężystolepkoplastyczne są silniej wytłumiane niż w poprzednim przypadku słabego tłumienia. Drgania konstrukcji szybko dążą do drgań sprężystych. Np. dla współczynnika lepkości  $\gamma = 20000 \text{ s}^{-1}$  po początkowej fazie sprężystej faza sprężystolepkoplastyczna występuje jednokrotnie i dalsza odpowiedź konstrukcji jest często sprężysta, a przejście z fazy sprężystolepkoplastycznej do sprężystej (odciążenie) występuje przy największej wartości przemieszczenia. Wnioski dotyczące wpływu lepkości i obciążenia podane w przypadku słabego tłumienia stosują się i w tym przypadku.

### 5. Obciążenie kilkoma prostokątnymi impulsami ciśnienia

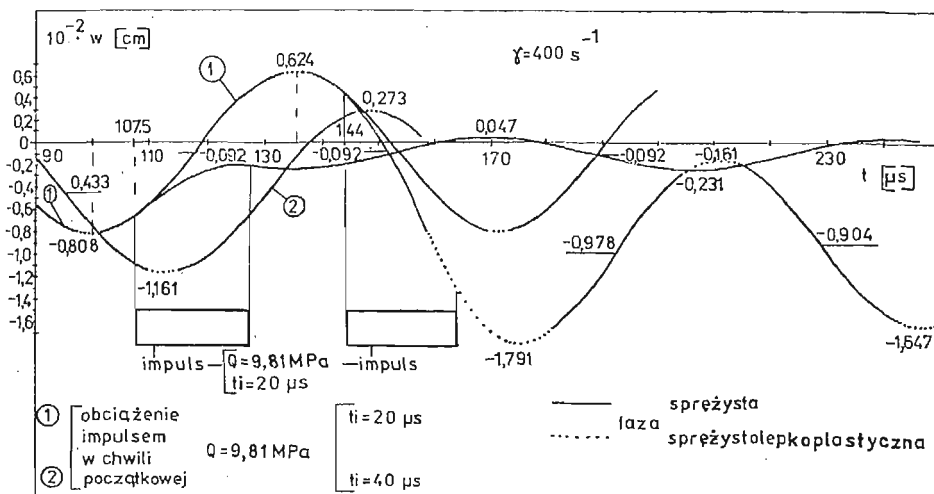
Na rys. 9 przedstawiono przemieszczenia powłoki ( $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ ) obciążonej dwoma jednakowymi impulsami ciśnienia  $Q = 4,90 \text{ MPa}$   $t_i = 36 \mu\text{s}$ . Pod wpływem obciążenia  $Q < Q_0/2$  przyłożonego w chwili początkowej powłoka nie uplastycznia się. Chwila przyłożenia drugiego impulsu została tak dobrana aby wektory prędkości i przyspieszenia



Rys. 9. Zmiana przemieszczenia w czasie. Obciążenie dwoma jednakowymi impulsami  $Q = 4,90 \text{ MPa}$   $t_i = 36 \mu\text{s}$   $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ .

przemieszczenia wywołane pierwszym impulsem były zgodne z wektorami prędkości i przyśpieszenia wywołanymi przez drugi impuls. W rezultacie zostaje przekroczony warunek plastyczności i powłoka przechodzi w fazę sprężystolepkoplastycznej deformacji.

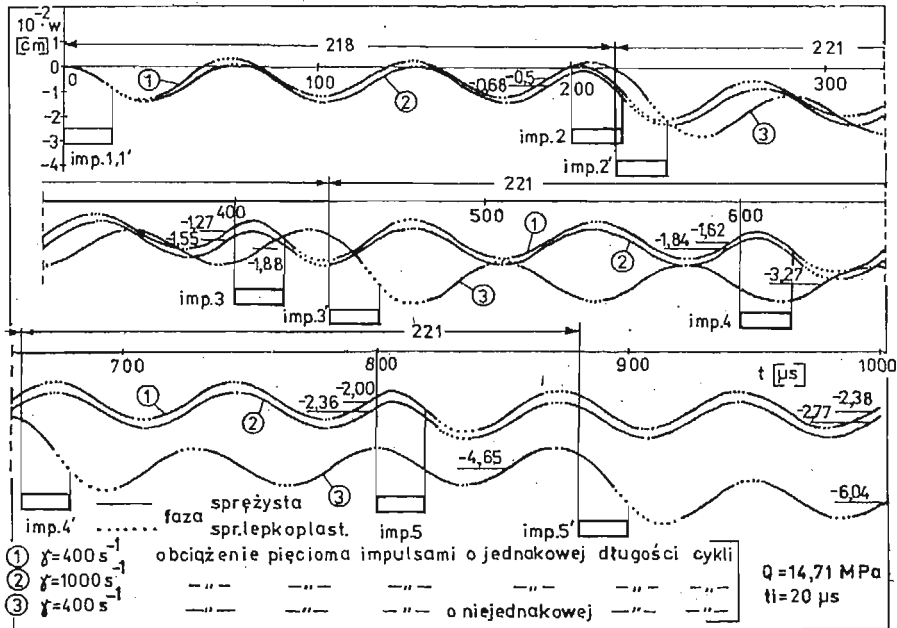
W dalszych rozważaniach zbadano wpływ chwili przyłożenia powtórnego obciążenia na wielkość przemieszczenia powłoki. Na rys. 10 krzywa 1 obrazuje fragment przebiegu drgań powłoki ( $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$ ) obciążonej pierwotnie w chwili początkowej impulsem  $Q = 9,81 \text{ MPa}$  przez okres  $t_i = 20 \mu\text{s}$ . Powłoka ta w chwili  $t = 100 \mu\text{s}$  osiąga maksymalne lokalne przemieszczenia w stanie rozciągania, a w chwili  $t = 135,5 \mu\text{s}$  w stanie ściskania. Następnie taki sam impuls przykładano powtórnie w różnych chwilach czasu i badano deformację powłoki. Stwierdzono, że zmniejszenie przemieszczenia występuje gdy obciążenie



Rys. 10. Wpływ chwili przyłożenia powtórnego impulsu na wielkość przemieszczenia. Przypadek słabego tłumienia,  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$

żenie jest przykładane w chwilach zawartych w przedziale czasu 100–117,5  $\mu\text{s}$ . W tym przedziale czasu wektory prędkości i przyśpieszenia drgań własnych i wymuszonych mają przeciwne zwroty. W rezultacie drgania zostają w znacznym stopniu mechanicznie wytłumione. Siły wewnętrzne maleją do wielkości  $|N| < N_0$ , a więc w powłoce będą występować jedynie niewielkie drgania sprężyste. Odkształcenia trwałe pozostają takie same jak przed wtórnym obciążeniem. Największe wytłumienie drgań wystąpi gdy powtarne obciążenie nastąpi 107,5  $\mu\text{s}$  tzn. w 7,5  $\mu\text{s}$  po czasie osiągnięcia przez powłokę maksymalnych odkształceń rozciągających. Natomiast zwiększenie przemieszczenia występuje gdy wektory prędkości i przyśpieszenia drgań własnych i wymuszonych działaniem wtórnego obciążenia są zgodne. Dla rozpatrywanej powłoki przemieszczenie zwiększa się gdy powtarne impuls jest przyłożony w chwili czasu pomiędzy 135,5 a 153,5  $\mu\text{s}$ . Największe przemieszczenie występuje gdy powtarne impuls jest przyłożony w chwili  $t = 144 \mu\text{s}$  tzn. w 8,5  $\mu\text{s}$  ( $\sim T/9$ ) po czasie odpowiadającym maksymalnym odkształceniom ściskającym. Obserwuje się wtedy znaczne zwiększenie odkształceń trwałych i faz sprężystolepkoplastycznych. Również na rys. 11 przedstawiono wpływ chwili przyłożenia powtórnego ob-





Rys. 12. Zmiana przemieszczenia w czasie. Obciążenie pięcioma jednakowymi impulsami o równych i nierównych długościach cykli.

długości cykli stwierdzono, że na cyklu przyrosty przemieszczeń maksymalnych, przyrosty przemieszczeń trwałych, czasy osiągnięcia granicy plastyczności i maksymalnego przemieszczenia na cyklu liczone od chwili przyłożenia kolejnego impulsu mają tendencję do stabilizacji. Ta stabilizacja została osiągnięta dla  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$  już po drugim cyklu, natomiast dla  $\gamma = 1000 \text{ s}^{-1}$  jest ona mniej wyraźna. Podobne efekty wyraźnej stabilizacji dla  $\gamma = 400 \text{ s}^{-1}$  stwierdzono w przypadku gdy dla jednakowych impulsów długości cykli nie były jednakowe.

#### Literatura cytowana w tekście

1. T. WIERZBICKI, *Dynamika powłok lepkoplastycznych*, Rozpr. Inż. 19, 4, 667—730, 1971.
2. N. JONES, *Recent progress in the dynamic plastic behavior of structures*, Massachusetts Institute of Technology, Report No. 78-1.
3. W. E. BAKER, *The elastic-plastic response of thin spherical shells to internal blast loading*, J. Appl. Mech., 27, 139-144, 1960.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Plastic strain of a spherical shell under dynamic loading by internal pressure*, Arch. Mech. Stos. 16, 1207-1214, 1964.
5. T. A. DUFFEY, *Significance of strain hardening and strain rate effects on the transient response of elastic-plastic spherical shells*, Int. J. Mech. Sciences, 12, 1970.
6. T. A. DUFFEY, *Influence of finite duration pressure pulse on the transient response of elastic-plastic strain-rate-sensitive cylindrical and spherical shells*, 1st Inter. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., Vol. 3 Part E, Germany, September 1971.

7. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., Vol. XX, 321-322, 1963.
8. T. DUFFEY, R. KRIEG, *The effects of strain hardening and strain rate sensitivity on the transient response of elastic-plastic spherical shells*, Int. J. Mech. Sc., 12, 811, 1970.

## Резюме

КОЛЕБАНИЯ УПРУГО — ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ

В работе представлен анализ колебания, в пределе малых деформации, для полной тонкой упруго-вязкопластической оболочки. Оболочка есть нагружена единичным радиальным импульсом давления или несколькими импульсами. Проблем характеризуется сферической симметрией. Определено величину первоначального импульса давления пластифицирующей оболочку. Исследовано влияние вязкости материала на основные параметры колебаний. Рассмотрено также влияние момента приложения повторного импульса и циклического нагружения на величину перемещения.

## Summary

## OSCILLATIONS OF ELASTOVISCOPLASTIC SPHERICAL SHELL

Oscillations of a complete thin elastoviscoplastic spherical shell is analysed in the range of small strains. The shell is subjected to a radial pressure impulse of rectangular shape or to several impulses. The magnitude of the initial impulse is determined resulting in the yielding of the shell. The influence of the viscosity of the material upon the basic parameters of vibrations is investigated. Also, the influence is considered of the instant of application of the second impulse and of the cyclic loading on the magnitude of deflections.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INST. MECH. KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 października 1978 roku*