

NUMERYCZNA ANALIZA OPLYWU PŁASKIEJ PODSTAWY WALCA KOŁOWEGO  
NADDZWIĘKOWYM STRUMIENIEM LEPKIEGO GAZU<sup>1)</sup>

ANDRZEJ TOPOLIŃSKI (BYDGOSZCZ)

1. Wstęp

Zagadnienia wyznaczania naddźwiękowych opływów ciał przez gazy nabrały szczególnie ważnego aspektu praktycznego wraz z rozwojem lotnictwa i kosmonautyki. Na dużych wysokościach lotu wartości charakterystyczne liczb Reynoldsa są już na tyle małe, że opracowania teoretyczne opływów muszą opierać się na rozwiązaniu pełnych równań Naviera - Stokesa. Kształty współczesnych aparatów latających a zwłaszcza statków kosmicznych, odpowiadają często modelowi ciała z silnie zatępionym czołem i z załamaniem tworzącymi jego konturów. Zatępienie ciał podyktowane jest przede wszystkim potrzebą minimalizacji pochłanianego ciepła, zaś załamanie konturów tworzących wynika m. in. z konieczności zapewnienia stałości form ciała w procesie unoszenia jego materiału konstrukcyjnego spowodowanego nagrzewaniem aerodynamicznym [8].

Naddźwiękowe opływy gazem lepkiem ciał z silnie zatępioną częścią czołową i z załamaniem ich tworzących doczekały się stosunkowo nielicznych teoretycznych opracowań. THOMMEN [1] wyznaczył niestacjonarny opływ czołowej części prostokątnej płytki gazem lepkiem i przewodzącym ciepło. Kryłow i Pawłow [5] wykonali serię eksperymentów numerycznych stacjonarnych opływów czołowych części płyty prostokątnej oraz walca kołowego. Autorzy obu wymienionych prac stawiają sobie za cel wypróbowanie nowych numerycznych, stąd przytoczone przez nich opisy opływów są fragmentaryczne i niepełne.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie osiowosymetrycznego opływu walca kołowego o płaskiej podstawie gazem lepkiem i przewodzącym ciepło.

2. Sformułowanie zagadnienia

W pracy przyjęto, że gaz opływający ciało jest ściśliwy, lepki, przewodzący ciepło oraz doskonały w sensie termodynamicznym ( $c_p = \text{const.}$ ,  $c_v = \text{const.}$ ). Brak w nim źródeł i upustów ciepła i masy, pominięte też zostały siły masowe.

Rozpatrywany będzie osiowosymetryczny, niestacjonarny przepływ w pobliżu podstawy walca kołowego o stałej temperaturze ścianek. Ograniczoną część płaszczyzny przepływu, przyjętą jako obszar całkowania  $\Omega$ , przedstawiono na rys. 1. Oś  $x$  jest tutaj osią symetrii — jej zwrot zgodny jest z kierunkiem napływającego strumienia gazu.

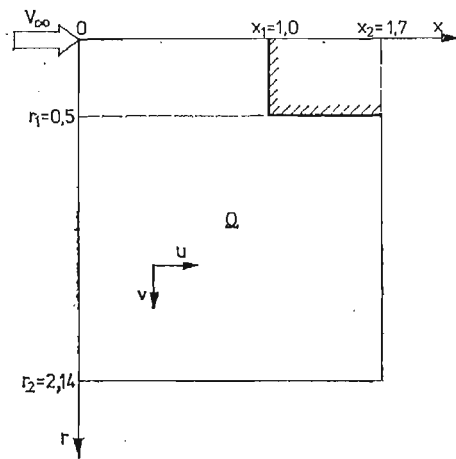
<sup>1)</sup> Praca zawiera wyniki rozprawy doktorskiej Autora, której promotorem był doc. dr hab. inż. Edward Walicki.

W bezwymiarowym układzie równań (2.1 - 2.3) rządzących ruchem płynu, wszystkie długości zostały odniesione do średnicy walca  $L$ , składowe prędkości  $u, v$  — do  $V_\infty$ , gęstość  $\rho$  do  $\rho_\infty$ , jednostkowa energia wewnętrzna  $e$  do  $V_\infty^2$ , ciśnienie  $p$  do  $\rho_\infty V_\infty^2$ , czas  $t$  do  $L/V_\infty$ , przewodność cieplna  $\lambda$  i lepkość  $\mu$  odpowiednio do  $\lambda_\infty$  i  $\mu_\infty$ . Układ ten ma następującą postać:

$$(2.1) \quad F_t = A_x + B_r + C + D,$$

$$(2.2) \quad p = (\kappa - 1)\rho e,$$

$$(2.3) \quad \lambda = \mu = [M_\infty \kappa (\kappa - 1) e]^{0,5},$$



Rys. 1

gdzie:

$$F = \rho \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e + \frac{v^2}{2} \end{bmatrix}, \quad A = -\rho \begin{bmatrix} u \\ u^2 + \frac{p}{\rho} \\ uv \\ u \left( e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix},$$

$$B = -\rho \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \frac{p}{\rho} \\ v \left( e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}, \quad C = -\frac{\rho v}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \end{bmatrix},$$

$$D = \frac{1}{Re_\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{4}{3} \frac{\mu}{r} \left( \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \\ - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \\ \frac{\kappa}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[ \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) u + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) v \right] + \frac{\partial}{\partial r} \mu \left[ \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) v + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u \right] + \frac{\mu}{r} \left[ \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) v + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u \right] \end{bmatrix}$$

Macierzowe równanie (2.1) wynika z zasady zachowania masy, pędu oraz energii; równanie (2.2) jest równaniem stanu, a (2.3) zależnością wiążącą przewodność cieplną i lepkość dynamiczną z jednostkową energią wewnętrzną gazu.

Warunki brzegowe zagadnienia są następujące (rys. 1):

1. Na brzegach  $x = 0$ ,  $0 \leq r \leq r_2$  oraz  $r = r_2$ ,  $0 \leq x \leq x_2$ , dostatecznie oddalonych od ciała, przyjęto warunki odpowiadające strumieniowi jednorodnemu:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u(x, r, t) &= 1, & v(x, r, t) &= 0, \\ \varrho(x, r, t) &= 1, & e(x, r, t) &= e_\infty = [\kappa(\kappa - 1)M_\infty^2]^{-1}. \end{aligned}$$

2. Na osi symetrii  $r = 0$ :

$$(2.5) \quad v = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial r} = 0.$$

3. Na powierzchni walca  $x = x_1$ ,  $0 \leq r \leq r_1$  oraz  $r = r_1$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$

$$(2.6) \quad u = v = 0, \quad e = ae_\infty.$$

Znana stała  $a(a > 0)$  określa stosunek temperatury powierzchni ciała do temperatury niezakłóconego strumienia gazu.

4. Na granicy prawostronnej  $x = x_2$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , wartości  $\varrho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $e$  wyznaczono z wnętrza obszaru  $\Omega$  za pomocą kwadratowej ekstrapolacji — co odpowiada użyciu przybliżonych, „miękkich” warunków brzegowych:

$$(2.7) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0,$$

gdzie  $f$  — dowolna z funkcji  $\varrho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $e$ .

Jako warunki początkowe przyjęto spełnienie w obszarze  $\Omega$  zależności (2.4) — za wyjątkiem powierzchni walca na której prędkość i temperatura spełnia (2.6) a  $\varrho = 1$ . Warunki te są równoznaczne z nagłym umieszczeniem walca w jednorodnym strumieniu gazu.

### 3. Schemat różnicowy

Numeryczne rozwiązanie układu (2.1 - 2.3) opiera się na zastąpieniu ciągłego rozkładu funkcji i argumentów ich wartościami w węzłach siatki różnicowej. Jeśli przez  $m, l, n$  oznaczymy numery węzłów, przez  $h_1, h_2, \tau$  — odległość między węzłami siatki w kierunkach  $x, r, t$ , to przez  $f_{m,l}^n$  rozumieć będziemy wartość  $f$  w punkcie  $mh_1, lh_2, n\tau$ .

Do obliczeń przyjęto dwustopniowy, jawny schemat różnicowy typu Laxa - Wendroffa [1].

Pierwszy krok umożliwia obliczenie  $F_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}$  oraz  $F_{m,l\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  (2.1) — przykładowo na kierunku osi  $x$ :

$$(3.1) \quad F_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ F_{m,l}^n + F_{m\pm 1,l}^n + \frac{\tau}{2} \left[ \pm \frac{1}{h_1} (A_{m\pm 1,l}^n - A_{m,l}^n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2h_2} (B_{m,l+1}^n + B_{m\pm 1,l+1}^n - B_{m,l-1}^n - B_{m\pm 1,l-1}^n) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{m,l}^n + C_{m\pm 1,l}^n + D_{m,l}^n + D_{m\pm 1,l}^n \right] \right\} + O(\Delta^3).$$

Z powyższego wyznacza się  $A_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $B_{m,l\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  oraz  $C_{m,l\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  i  $C_{m\pm\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}$ . Drugi krok pozwala na obliczenie wartości  $F_{m,l}^{n+1}$ :

$$(3.2) \quad F_{m,l}^{n+1} = F_{m,l}^n + \tau [(A_x)_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + (B_r)_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + C_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + D_{m,l}^n] + O(\Delta^3).$$

Stabilność użytego schematu różnicowego zbadana została dla równań modelowych uzyskanych z linearyzacji układu (2.1) 2.3). Ograniczenie nakładane na krok czasowy  $\tau$  ma lokalny charakter i jest następujące:

$$(3.3) \quad \tau \leq \min \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{h}{|u| + |v| + c\sqrt{2}}, \frac{h\varrho}{8\nu} \right\},$$

gdzie:

$$h = \max(h_1, h_2),$$

$$\nu = \max \left( \frac{1}{\text{Re}_\infty}, \frac{\kappa}{\text{Re}_\infty Pr} \right),$$

$c$  — lokalna prędkość dźwięku.

Obserwowany w trakcie obliczeń niemonotoniczny przebieg procesu zbieżności — szczególnie silny w obszarach formowania się dużych gradientów — spowodował konieczność użycia filtra numerycznego tłumiącego tę niedogodność. Zastosowano tutaj automatyczny filtr Shumana [2, 6, 7], którego współczynniki zostały tak dobrane, aby pozostały spełnione: warunek liniowej stabilności schematu różnicowego [6] oraz warunek zapewniający odpowiednią relację między wpływem filtracji i rzeczywistą lepkością gazu [9].

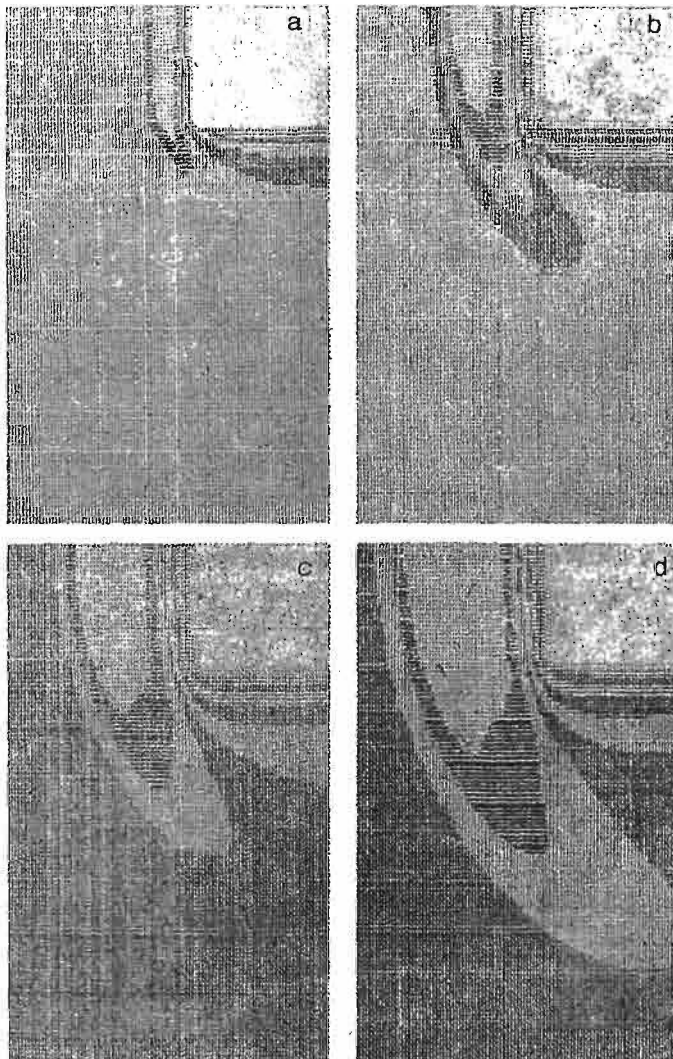
## 4. Obliczenia numeryczne

Obliczenia wykonane były dla czterech zestawów parametrów:

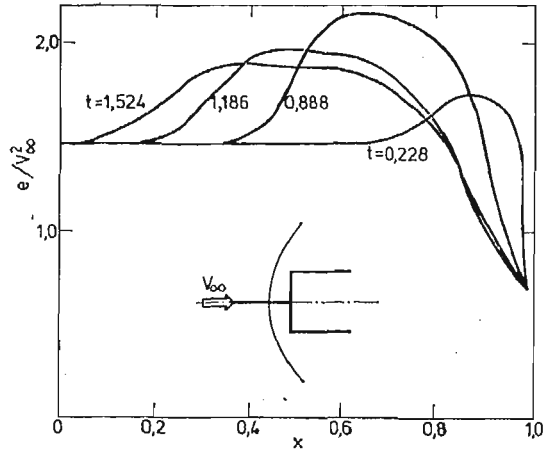
1.  $M_\infty = 1.1$ ;  $a = 0.5$ ;
2.  $M_\infty = 2.5$ ;  $a = 1.5$ ;
3.  $M_\infty = 3.0$ ;  $a = 1.5$ ;
4.  $M_\infty = 4.0$ ;  $a = 3.0$ .

Dla każdego wariantu przyjęto:  $\kappa = 1.4$ ;  $Pr = 0.74$ ,  $Re_\infty = 50$ ;  $h_1 = h_2 = 0.066666667$ . Przedstawione w niniejszej pracy wykresy warstwiczne pochodzą z drukarki wierszowej ODRY-1305, na której były wykonywane obliczenia. Wykresy przedstawiają proces formowania się stacjonarnych pól opływów w obszarze  $\Omega$  (rys. 1). Przyjęto, że przepływ będzie uważany jako stacjonarny, jeśli spełniona będzie nierówność:

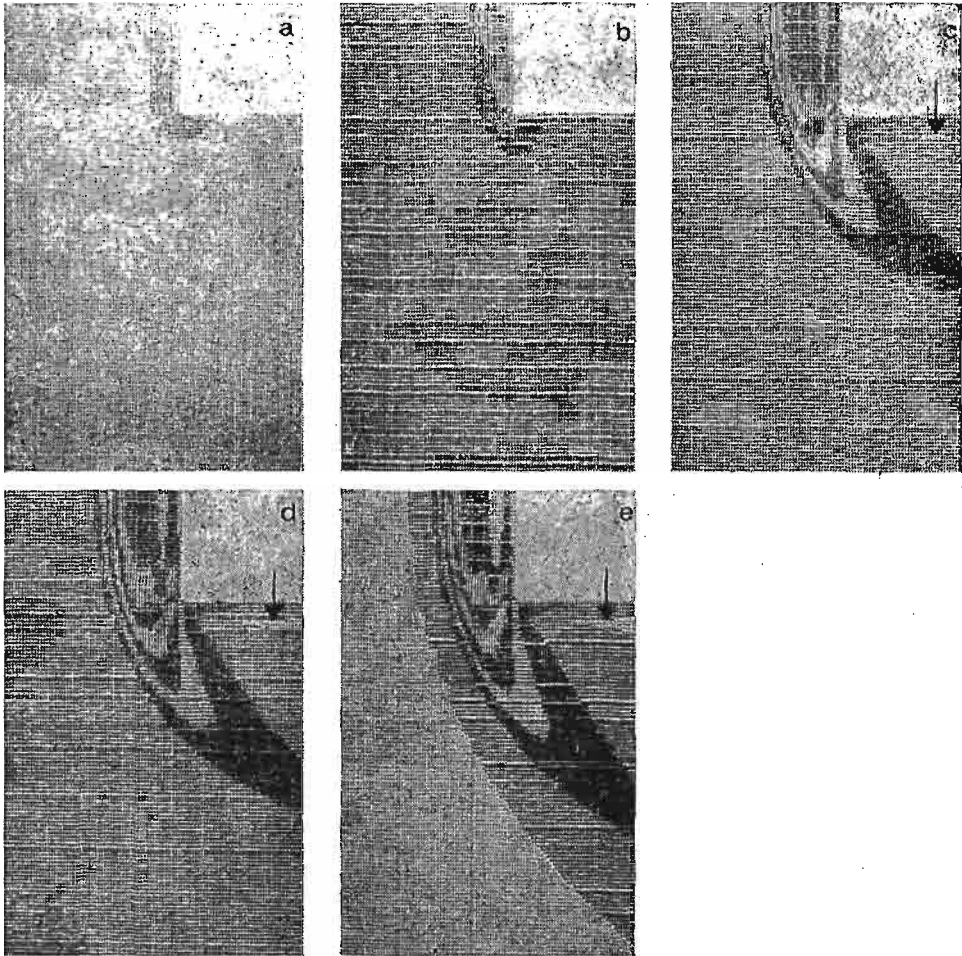
$$\frac{1}{\varrho_{m,l}^{n+1}} \frac{|\varrho_{m,l}^{n+1} - \varrho_{m,l}^n|}{\tau} \leq 0,03$$



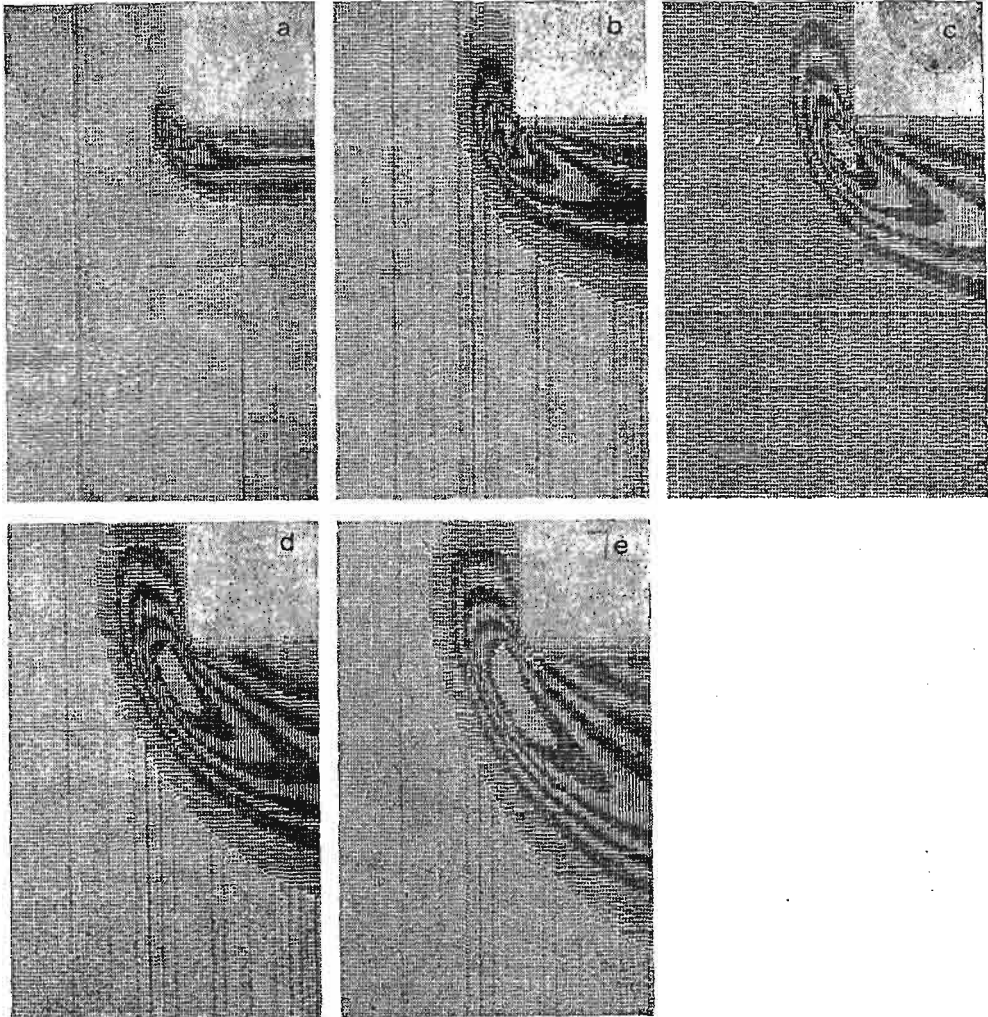
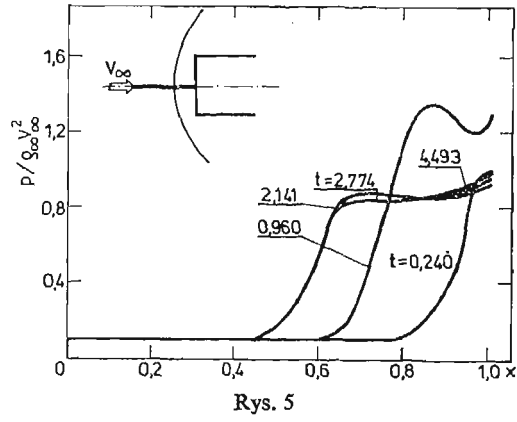
Rys. 2



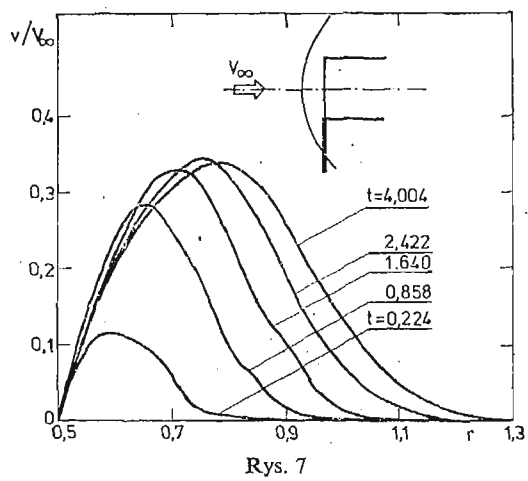
Rys. 3



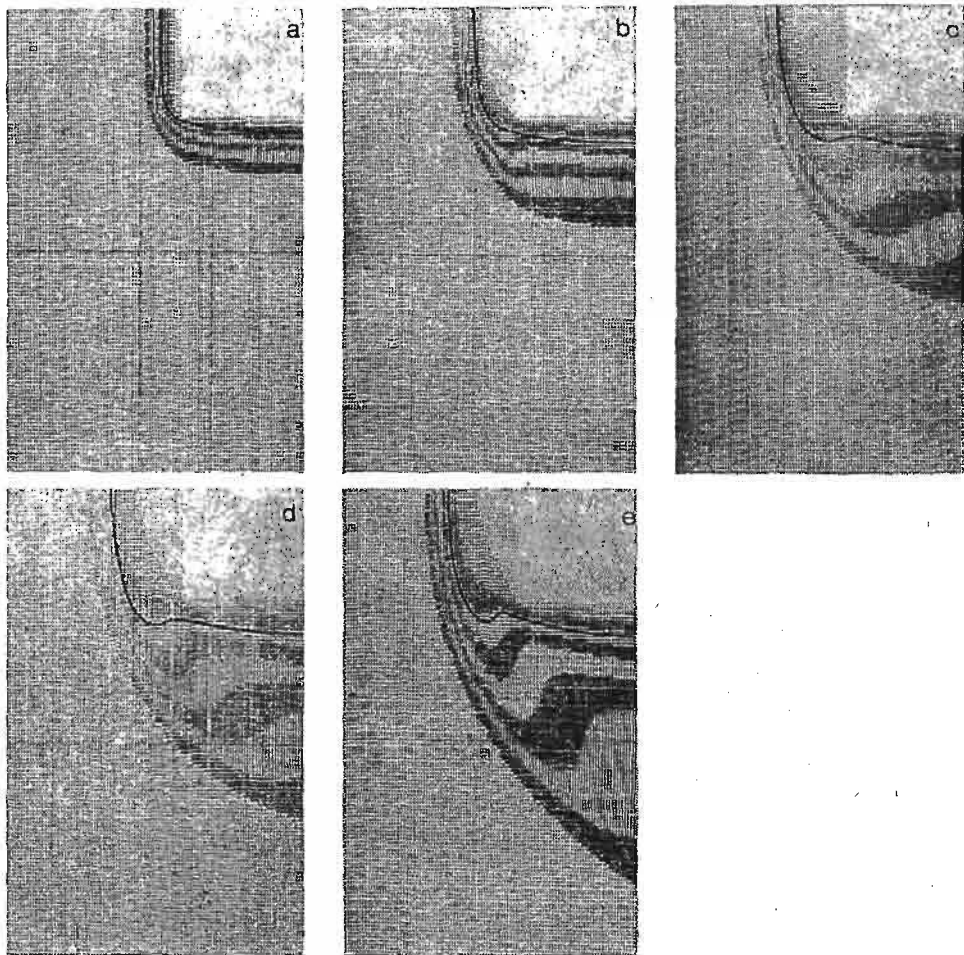
Rys. 4



Rys. 6



Rys. 7



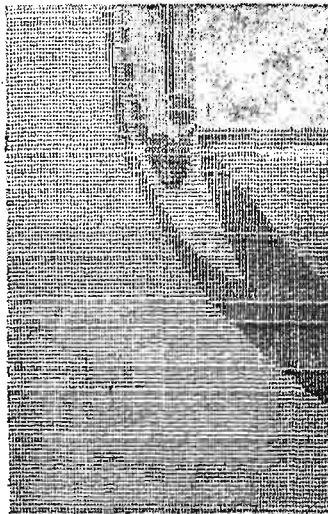
Rys. 8



Warunek powyższy nie został osiągnięty dla pierwszego wariantu obliczeń  $M_\infty = 1.1$  z przyczyn natury technicznej; przy przyjętych parametrach obliczeniowych, czoło fali uderzeniowej stacjonarnego opływu musiałoby znaleźć się poza możliwym do przyjęcia obszarem całkowania. Ilustracją tego wariantu jest rys. 2, przedstawiający formowanie się w polu przepływu jednostkowej energii wewnętrznej dla bezwymiarowych czasów — odpowiednio  $t = 0.228; 0.888; 1.186$  i  $1.524$ . W celu zorientowania się w wartościach odpowiadających symbolom wykresu (nie naniesionym dla przejrzystości odczytu na rys. 2) — służy rys. 3, pokazujący rozkład energii wewnętrznej na osi symetrii przepływu dla tychże chwil.

Rysunek 4 pokazuje kształtowanie się ciśnienia (dla  $M_\infty = 2.5$ ) w obszarze obliczeniowym. Wykresy otrzymane są odpowiednio dla:  $t = 0.240; 0.960; 2.141; 2.774$  i  $4.493$ . Uzupełnieniem powyższych wykresów jest rys. 5 przedstawiający rozkład ciśnienia na osi symetrii. Interesującym szczegółem rysunku 4 są oznaczone strzałką zamknięte obszary obniżonego ciśnienia (poniżej ciśnienia strumienia jednorodnego).

Na rysunku 6 ukazane są obrazy składowej prędkości  $v$  ( $M_\infty = 4$ ) dla  $t = 0.224; 0.858; 1.640; 2.422$  i  $4.004$ . W określeniu wartości odpowiadających poszczególnym symbolom tworzącym wykresy, pomocnym jest rys. 7, obrazujący odpowiednie rozkłady na prostej  $x = x_1, r \geq r_1$ .



symbol	wartość
.	0,1133
+	0,7168
#	1,3202
-	1,9237
0	2,5271
:	3,1306
8	3,7340
!	4,3375
M	4,9409
,	5,5443
	6,1478

Rys. 9

Wykresy rozkładów lokalnych liczb Macha dla wariantu z  $M_\infty = 3$  ( $t = 0.240; 0.974; 2.083; 2.599; 4.291$ ) pokazuje rys. 8. Na wszystkich pokazano zmiany i ostateczne ustalenie się położenia linii dźwiękowej (oznaczonej linią ciągłą na rys. 8). Jak wykazały doświadczenia numeryczne, przybliża się ona do czoła i ku powierzchni bocznej ciała wraz ze wzrostem liczby Macha niezakłóconego strumienia gazu, ale oddala przy wzrastającej temperaturze ścianek walca.

Na rysunku 9 przedstawiony został rozkład gęstości ustalonego ( $t = 4.291$ ) opływu czołowej części walca dla  $M_\infty = 2.5$ . Tuż za narożem, na powierzchni bocznej ciała występuje obszar silnego rozrzedzenia gazu oraz obniżona jego gęstość (w stosunku do  $\rho_\infty$ ) wzdłuż tworzącej walca z tendencją do wolnego wzrostu w kierunku przepływu. Nie zaobserwowano wyraźnego związku rozkładu gęstości z parametrami przepływu na wspomnianym wyżej kierunku.

Program, którym się posłużono umożliwił śledzenie zbieżności procesów obliczeniowych. Stwierdzono, że 70% czasu, przy którym nastąpiło umowne ustalenie, jest zużywane na uformowanie się przybliżonego obrazu przepływu (1-2 cyfry znaczące), a pozostałe 30% na „udokładnianie” wyników. Proporcje te nie są zachowane w całym badanym obszarze. Najszybciej następuje zgrubne uformowanie rozkładów funkcji przy czołowej części ciała. Proces „zwiększania dokładności” wyników dłużej trwa w obszarach występowania najwyższych gradientów — tj. na fali uderzeniowej i w okolicy naroża ciała.

Powyższe spostrzeżenia posłużyły do podjęcia prób skrócenia czasu otrzymywania stacjonarnych rozwiązań. Dokonano tego na drodze zastosowania uproszczeń równań (2.1) w początkowym czasie zgrubnego formowania się rozkładów funkcji oraz „wyłączenia” części obszaru całkowania  $\Omega$  w późniejszej fazie obliczeń. Oszczędność czasu przy zastosowaniu tych zabiegów sięgała 30%.

Przedstawione tutaj wyniki obliczeń uzyskane na drodze eksperymentów realizowanych przez maszynę cyfrową, wskazują na realne możliwości prowadzenia ich na krajowych komputerach średniej mocy.

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. U. THOMMEN, *Numerical Integration of the Navier-Stokes Equations*. ZAMP, 17, No 5, 1966.
2. A. C. VLEIGENTHART, *The Shuman Filtering Operator and the Numerical Computation of Shock Waves*. J. Eng. Math., vol. 4, No 4, 1970.
3. W. PROSNAK, *Mechanika plynów*, T. 2, WNT, Warszawa 1971.
4. P. J. ROACHE, *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, N. M., Harmosa Press 1972.
5. Б. В. КРЫЛОВ, Б. М. ПАВЛОВ, *Применение разностной схемы к расчету обтекания торца сверхзвуковым потоком вязкого газа*. Выч. Мет. и Progr. XIX, Изд. Моск. Унив., Москва 1972.
6. A. HARTEN, G. ZWAS, *Switched Numerical Shman Filters for Shock Calculations*. J. Eng. Math., vol. 6, No 2, 1972.
7. K. SRINIWAS, J. GURURAJA, K. K. PRASAD, *An Assessment of the Quality of Selected Finite Difference Schemes for Time Dependent Compressible Flow*. J. Comp. Phys., 20, 1976.
8. В. Г. ВОРОНЦЫН, В. В. ЛУНЕВ, А. Н. НИКУЛИН, *О стационарной форме тел при их разрушении за счет аэродинамического нагрева*. Изв. АН СССР МЖГ, № 2, 1978.
9. A. TOPOLIŃSKI, *Analiza numeryczna pewnych przepływów gazu lepkiego*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1978 (niepublikowane).

#### Резюме

#### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОГО ОСНОВАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

В работе приведены численные результаты осесимметричного обтекания продольного цилиндра с плоским торцом. Задача решается с помощью явной двухшаговой разностной схемы типа Лакса-Вендроффа, аппроксимирующей дифференциальную систему со вторым порядком точности [1].

С целью выглушения осциляционного момента вычислений, применены процедуры сглаживания основанные на фильтре Шумана [2, 6, 7].

Вычисления сделаны для четырех вариантов параметров. Во всех одинаковы было число Рейнольдса —  $Re_{\infty} = 50$ .

Распределения функции поля течения иллюстрированы в работе на элюрах и на изогипсных планах.

#### Summary

#### NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW AROUND A FLAT BASE OF CIRCULAR CYLINDER BY SUPERSONIC STREAM OF VISCOUS GAS

In this work numerical results of axisymmetrical flow round a cylinder with a flat front has been accomplished.

The calculations were made by means explicit, two-step Lax-Wendroff type scheme [1], which approximates the set of differential equations with the second order of accuracy.

In order to damp an oscillating course of calculations smoothing procedures based on Shuman's filter were applied [2, 6, 7].

The calculations were accomplished for four various sets of parameters. Reynolds number was constant in all of them, and equaled  $Re_{\infty} = 50$ .

Distribution of function of surface of the flow was represented on diagrams and contour graphs.

BYDGOSZCZ  
AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 maja 1979 roku*

---