

DRGANIA UKŁADU PRĘTOWEGO Z TARCIEM COULOMBA NA POWIERZCHNIE
NIECIĄGŁOŚCI¹⁾

ALFRED ZMITROWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

Liczne urządzenia mechaniczne posiadają konstrukcyjne nieciągłości w postaci połączeń, miejsc podparcia, powierzchni rozdziału. Wśród nich wyróżnia się te nieciągłości, które charakteryzują się wyraźnym ruchem względnym stykających się powierzchni, zwanym poślizgiem lub makropoślizgiem. W tych przypadkach zazwyczaj pomija się odkształcalność stykających się powierzchni i traktuje je jako idealnie sztywne. Osobną grupę stanowią połączenia w których zachodzą t.zw. mikropoślizgi, wskutek sprężystości powierzchniowej styku lub obecności dodatkowych elementów sprężystych (nity, śruby, sworznie).

Towarzyszące poślizgowi i mikropoślizgowi siły tarcia suchego powodują rozpraszanie energii ruchu, przemieszczających się względem siebie elementów. Przez zjawisko dysypacji energii drgającego układu mechanicznego, tarcie suche przyczynia się do redukcji odkształceń i naprężeń dynamicznych a tym samym do zwiększenia niezawodności i żywotności urządzenia. Tłumienie drgań na skutek tärciowego oddziaływania stykających się powierzchni jest szczególnie pożądane tam gdzie wymiary, ciężar, stopień złożoności lub koszt urządzenia odgrywają decydującą rolę. Ponadto tarcie powierzchniowe stykających się elementów jest na ogół większe od tarcia materiałowego i w wielu maszynach jest głównym mechanizmem tłumienia [1, 2, 3].

Stosowany opis sił oporu w konstrukcyjnych nieciągłościach nie zawsze jest związany z określonym sposobem dysypacji energii. Zazwyczaj tłumienie to jest przedstawiane w 3 znanych postaciach (lepkie, histerezyowe, tärciowe) lub ich kombinacji. Tarcie suche generowane podczas ruchu najczęściej określa się znanym wzorem Amontonsa i Coulomba. Przyjęcie liniowej zależności siły tarcia od wersora prędkości poślizgu i wielkości wzajemnego docisku, wprowadza nieliniowości do równań ruchu.

Drgania złożonych układów konstrukcyjnych z tärciem suchym na powierzchniach nieciągłości zazwyczaj opisuje się zastępczym układem o 1 stopniu swobody. Taki model dynamiczny przyjmowano dla belek warstwowych [1, 4, 5] oraz belek wspornikowych z niewielkim obszarem styku [1, 4]. Podobnie postępowano w przypadku prętwów z tärciem suchym w obszarze zamocowania [1, 4, 6, 7]. W [8] modelem dynamicznym łopatki maszyny wirnikowej z tärciem konstrukcyjnym w zamocowaniu jest układ o zmiennej

¹⁾ Praca wykonana w ramach planu badań MR 1/26, temat 09.3.

liczbie stopni swobody (1 lub 2). Stan sztywnego i przesuwnego zamocowania a tym samym liczbę stopni swobody układu określa zależność ujmująca wszystkie parametry układu. Przeszczenia łopatki sprężarki z tarcie suchym w styku t.zw. półek opisano w [9] dynamicznymi liczbami wpływowymi. Przy tym założono zlinearyzowaną postać siły tarcia suchego. Ciągłe układy belkowe z tarcie suchym na powierzchni rozdziału i w zamocowaniu rozważano w [10, 11, 12]

Prosty układ o 1 stopniu swobody z tłumieniem tarciovym jest przedmiotem analizy zamieszczonej w podręcznikach teorii drgań np.: [13, 14, 15, 16]. Jego ruch opisuje nieliniowe równanie różniczkowe. Równanie to można przedstawić w postaci 2 równań liniowych których rozwiązania „zszywa się” ze sobą w chwilach zmiany znaku prędkości. Wiele prac poświęcono analizie rozwiązań bardziej złożonych równań różniczkowych zwyczajnych ze składnikiem uwzględniającym wpływy tarciove np.: [17, 18]

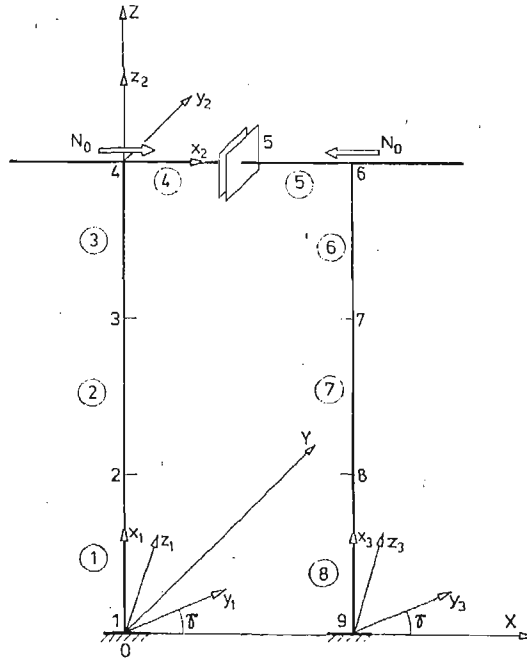
Trudności związane z opisem sił oporu w miejscach nieciągłości oraz z poszukiwaniem rozwiązań nawet najprostszycych równań ruchu sprawiły, że w cytowanych powyżej pracach rozpatrywano jedynie wybrane zagadnienia dynamiki. Można stwierdzić, że przyjęcie złożonego układu dynamicznego z reguły pociągało za sobą uproszczenie modelu tarcia suchego (np. jego linearyzację) i na odwrót. Między innymi teoria układów o przeliczalnej ilości stopni swobody z udziałem sił tarcia suchego jest jeszcze w trakcie opracowywania.

W niniejszej pracy podjęto próbę sformułowania metody analizy drgań układu prętowego z tarcie suchym w miejscu konstrukcyjnej nieciągłości. W odróżnieniu od znanych rozważań [1, 4, 9] modelem dynamicznym jest układ o wielu stopniach swobody. Ogólny opis sił tarcia suchego na powierzchni styku otrzymano przy wykorzystaniu tensora tarcia Coulomba. Na przykładzie drgań pakietu łopatek turbinowych wskazano na efekty wzbudzeń drgań przez tarcie oraz sprzężeń poprzez sprężystość i anizotropię tarcia suchego.

2. Sposób dyskretyzacji

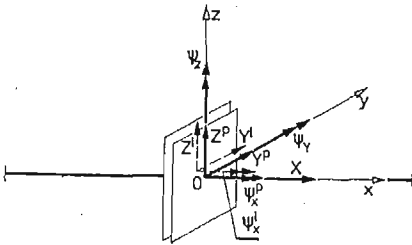
Rozważmy pokazany na rys. 1 układ ramowy z powierzchnią nieciągłości i sztywnym podparciem. Załóżmy pewien inercjalny układ współrzędnych $OXYZ$, rys. 1. Postępując zgodnie z formalizmem metody elementów skończonych i korzystając z jednowymiarowych elementów prętowych o 12 stopniach swobody [19, 20], można dokonać dyskretnego opisu układu. Przyjęto, że deformację prętowych elementów skończonych określają równania technicznej teorii zginania (z pominięciem deplanacji przekroju) oraz równania teorii skręcania swobodnego. Założenie o płaskich przekrojach dotyczy również powierzchni kontaktu. Środki ścinania pokrywają się ze środkami ciężkości przekrojów pręta.

Z rozwiązania równania różniczkowego pręta ściskanego (rozciąganego), zginanego i skręcanego określa się elementy macierzy funkcji kształtu. Te same funkcje interpolują przemieszczenia statyczne i dynamiczne na długości elementu prętowego. Wyznaczone zgodnie z powyższymi założeniami lokalne macierze mas i sztywności podane są w literaturze przedmiotu [19, 20]. Przy tym w konsystentnej macierzy mas uwzględniono wyrazy odpowiadające bezwładności obrotowej i skrętnej.



Rys. 1. Schemat układu dynamicznego. Numeracja węzłów i elementów.

Podział układu ramowego na elementy skończone przeprowadza się tak aby w miejscu nieciągłości wystąpił węzeł. W węźle tym dopuszcza się względny ruch translacyjny na płaszczyźnie Oyz oraz względny ruch wirowy wokół osi Ox , rys. 2. Stanem zespolenia nazywa się przypadek gdy stykające się powierzchnie nie przemieszczają się względem



Rys. 2. Przesunięcia węzła nieciągłości w stanie całkowitego poślizgu.

siebie zaś stanem poślizgu gdy powierzchnie ślizgają się po sobie. W niniejszej pracy wyróżnia się 4 różne stany współpracy kontaktujących się powierzchni: stan całkowitego zespolenia, stan zespolenia w ruchu translacyjnym i poślizgu w ruchu wirowym, poślizgu w ruchu translacyjnym i zespolenia na względny obrót oraz stan całkowitego poślizgu.

Niech każdy z elementów skończonych mający jeden węzeł w miejscu nieciągłości deformuje się pod wpływem obciążeń i ruchu jak belka wspornikowa o swobodnym końcu w węźle nieciągłości. Ponadto w zależności od stanu współpracy stykających się powierzchni nakłada się warunki zgodności przemieszczeń węzłowych kontaktujących się elementów na ustalonych kierunkach. I tak w stanie całkowitego zespolenia przyjmuje się więzy zgod-

ności wszystkich przemieszczeń i obrotów węzła. Wówczas przemieszczenia i odpowiednie siły węzłowe w miejscu nieciągłości opisują wektory,

$$(2.1) \quad X^W = [X, Y, Z, \psi_x, \psi_y, \psi_z]^T,$$

$$(2.2) \quad F^W = [F_x, F_y, F_z, W_x, W_y, W_z]^T.$$

Podczas całkowitego poślizgu w węzle nieciągłości nakłada się więzy zgodności przemieszczeń X i obrotów ψ_y i ψ_z z lewej i prawej strony węzła, rys. 2. W stanie tym przemieszczenia i siły określają wektory,

$$(2.3) \quad X^W = [X, Y^l, Y^p, Z^l, Z^p, \psi_x^l, \psi_x^p, \psi_y, \psi_z]^T,$$

$$(2.4) \quad F^W = [F_x, F_y^l, F_y^p, F_z^l, F_z^p, W_x^l, W_x^p, W_y, W_z]^T.$$

Wskaźniki l i p oznaczają wielkości związane odpowiednio z lewą i prawą stroną węzła.

W zależności od ilości możliwych poślizgów w węzle nieciągłości należy odpowiednio zbudować wektory przemieszczeń, sił węzłowych, lokalne macierze mas i sztywności elementów z węzłem nieciągłości. W celu zachowania ogólnej reguły agregacji globalnych macierzy mas i sztywności oraz uwzględnienia niezależnego opisu translacji i wirowania dla obu powierzchni styku, wektory stanu elementów z węzłami nieciągłości mają wyrazy zerowe a macierze zerowe wiersze i kolumny. Niech wektorami stanu elementów z węzłem nieciągłości, podczas całkowitego zespolenia, będą

$$(2.5) \quad U^l = [U_1^l, U_2^l, \dots, U_{12}^l]^T,$$

$$(2.6) \quad U^p = [U_1^p, U_2^p, \dots, U_{12}^p]^T.$$

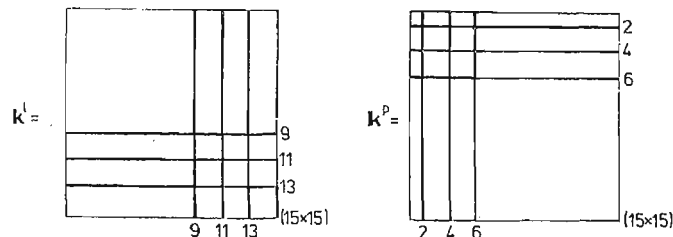
W przypadku całkowitego poślizgu wektory te przyjmują postać

$$(2.7) \quad U^l = [U_1^l, \dots, U_8^l, 0, U_9^l, 0, U_{10}^l, 0, U_{11}^l, U_{12}^l]^T,$$

$$(2.8) \quad U^p = [U_1^p, 0, U_2^p, 0, U_3^p, 0, U_4^p, \dots, U_{12}^p]^T.$$

Szkic lokalnych macierzy elementów z węzłem nieciągłości pokazano na rys. 3, gdzie liniami ciągłymi oznaczono ciągi wyrazów zerowych dla stopni swobody których dany element nie określa. Tak zmodyfikowane macierze mas i sztywność zachowują symetrię układu.

Transformacji układu inercjalnego $OXYZ$ w układ lokalny $O_i x_i y_i z_i$ związany z wybranym elementem prętowym dokonuje się przez równoległe przesunięcie początków tych układów oraz przez wykonane kolejno trzy obroty skończone. Dwa kąty obrotu określone są współrzędnymi końców pręta w układzie globalnym a kąt γ obrotu do koła osi pręta jest wielkością daną. Macierz takiej transformacji ortogonalnej C po-



Rys. 3. Schemat lokalnych macierzy sztywności elementów z węzłem nieciągłości.

dana jest np.: w [19, 20]. Ze względu na zmianę macierzy mas i sztywności elementów z węzłem nieciągłości, należy zmienić macierze transformacji tych elementów, wstawiając odpowiednio zerowe wiersze i kolumny z jedynkami na przekątnej.

Korzystając z ogólnego formalizmu metody elementów skończonych buduje się następnie globalne macierze mas M i sztywności K dla całego układu. Na macierzowe równania ruchu nakłada się warunki brzegowe sztywnego zamocowania.

3. Drgania układu zachowawczego

Nietłumione drgania swobodne układu opisuje równanie

$$(3.1) \quad M\ddot{x} + Kx = O,$$

gdzie x jest globalnym wektorem przemieszczeń uogólnionych. Ponieważ ilość stopni swobody układu zależy od liczby możliwych poślizgów w węzle nieciągłości dlatego należy analizować różne przypadki współpracy kontaktujących się powierzchni.

Częstości własne drgań (ν) i formy (Φ) są nietrywialnymi rozwiązaniami zagadnienia na wartości własne,

$$(3.2) \quad (K - \nu^2 M)\Phi = O.$$

Znane są liczne metody poszukiwania rozwiązań zagadnienia (3.2). W zamieszczonych w pracy przykładach obliczeń numerycznych przyjęto następujący tok postępowania. Równanie (3.2) sprowadza się do postaci standardowej korzystając z symetrycznego rozkładu macierzy M na macierze trójkątne L , zgodnie z metodą Cholesky-Banachiewicza [21, 22].

$$(3.3) \quad M = LL^T.$$

Po redukcji równanie (3.2) ma postać

$$(3.4) \quad AW = \lambda W,$$

gdzie

$$(3.5) \quad A = L^{-1}K(L^T)^{-1}, \quad W = L^T\Phi, \quad \lambda = \nu^2.$$

Następnie macierz A przedstawia się w postaci symetrycznej trójdzielnej za pomocą procedury Householdera [21, 22]. Korzystając z własności ciągów Sturm, metodą bisekcji określa się przybliżone wartości własne [21, 22]. Za pomocą metody odwrotnych iteracji wyznacza się przybliżone wektory własne macierzy trójdzielnej. Zgodnie z przyjętą transformacją (3.5) postacię drgań własnych układu określa równanie

$$(3.6) \quad \Phi = (L^T)^{-1}W.$$

Wektory własne są ortogonalne względem macierzy mas i unormowane tak, że

$$(3.7) \quad \Phi^T M \Phi = I,$$

$$(3.8) \quad \Phi^T K \Phi = D,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową zaś D jest macierzą diagonalną której elementami są ν_i^2 .

4. Dyskretny element tarcłowy

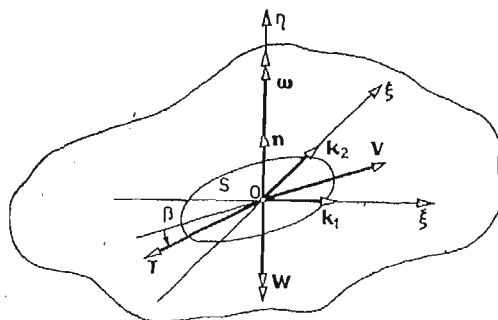
Względny ruch cząstek stykających się powierzchni można złożyć z ruchu translacyjnego z prędkością V i ruchu obrotowego z prędkością Ω . Z warunku styczności wynika zgodność przemieszczeń i prędkości w kierunku normalnym do styku. Wobec tego składowa prędkości translacji V_n (normalna do styku) jest równa zero. Ruch obrotowy można przedstawić jako czyste toczenie o składowej Ω_t w płaszczyźnie styczności do obu powierzchni i wirowanie określone składową Ω_n normalną do styku. Składowa pozioma reakcji więzów podczas czystego toczenia z prędkością Ω_t ma charakter tarcia statycznego. Wobec tego wystarczająco do opisu tarcia podczas ruchu, pole prędkości względnych określają, wektor prędkości translacji v i wektor prędkości wirowania ω

$$(4.1) \quad v = \frac{V_t}{|V_t|}, \quad \omega = \frac{\Omega_n}{|\Omega_n|}.$$

gdzie V_t jest składową styczną prędkości translacji.

Względnym ruchom w obszarze styku przy zapewnionym docisku towarzyszą siły tarcia suchego. Przyjmijmy model tarcia wg Amontonsa i Coulomba.

W styku o obszarze S założmy układ współrzędnych $O\xi\zeta\eta$ o bazie (k_1, k_2, n) , rys. 4.



Rys. 4. Dyskretny element tarcłowy.

Wektor sił tarcia Coulomba w dowolnym punkcie A styku s , podczas poślizgu, zgodnie z opisem zaproponowanym w [23], określa równanie.

$$(4.2) \quad T_A = -N_A Q v = -N_A Q^{ij} v_j k_i, \quad i, j = 1, 2$$

gdzie Q^{ij} są elementami reprezentacji tensora tarcia Coulomba Q , v_j są składowymi kowariantnymi wektora prędkości poślizgu v , N_A jest wielkością docisku w punkcie A . Reprezentację tensora tarcia Q wyznaczono przy założeniu analogii rozkładu sił tarcia z rozkładem naprężeń w płaskim stanie napięcia oraz przy założeniu reguły składania tensorów [23, 24]. Opis składowych tensora Q , uwzględnia kierunkowość chropowatości każdej z powierzchni oraz chwilową konfigurację styku.

Podczas względnego ruchu wirowego wokół normalnej z wektorem n do styku, tarcie w punkcie A styku S , odniesione do środka wirowania, określa wektor siły tarcia T_A i wektor momentu tarcia W_A ,

$$(4.3) \quad T_A = -N_A R_A^l \omega k_l, \quad l = 1, 2$$

$$(4.4) \quad W_A = -N_A R_A^3 \omega n,$$

gdzie ω jest składową wersora prędkości wirowania na osi n , R_A^k ($k = 1, 2, 3$) są charakterystykami tarciovymi styku [24]. Charakterystyki R_A^k zależą od kształtu obszaru styku oraz od jego zmienności w czasie.

Pole sił tarcia w styku S , podczas ruchu można opisać wypadkowym wektorem sił tarcia $T = T^i k_i$ ($i = 1, 2$) oraz wypadkowym wektorem momentu sił tarcia $W = W_n$, rys. 4. Zgodnie z przyjętymi założeniami [23, 24] istnieje liniowe odwzorowanie [L] wypadkowego wektora sił tarcia i wersora pola prędkości względnych,

$$(4.5) \quad \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ W \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Wyrazy odwzorowania [L] zwanego charakterystyką dyskretnego elementu tarciovego tworzy się przez redukcję pola sił tarcia opisanego wzorami (4.2), (4.3) i (4.4), do środka 0,

$$(4.6) \quad [L] = - \begin{bmatrix} Q^{ij} \int_S N_A dS & \int_S N_A R_A^k dS \\ \dots & \dots \\ O^i & \dots \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A \subset S \\ i, j = 1, 2 \\ k = 1, 2, 3. \end{array}$$

Opis sił tarcia za pomocą (4.5) i (4.6) uwzględnia anizotropię każdej z kontaktujących się powierzchni, kształt styku, chwilowe pole prędkości względnych, chwilową konfigurację stykających się powierzchni oraz dowolny rozkład docisku.

Definicja: Dyskretnym elementem tarciovym nazwano taki model chropowatego styku ciał, który ustalonym punktowi styku S przyporządkowuje własności bieguny pola prędkości względnych w tym styku oraz własności środka redukcji, powstałego podczas ruchu pola sił tarcia.

5. Wektor sił tarcia Coulomba

Podczas drgań analizowanego układu prętowego (rys. 1), siły tarcia suchego są generowane tylko na powierzchniach konstrukcyjnej nieciągłości. Wobec tego globalny wektor tarcia zawiera wyrazy zerowe i wektor tarcia T^w w węźle nieciągłości,

$$(5.1) \quad T = [O; T^w; O]^T.$$

W przypadku całkowitego poślizgu T^w może mieć 6 niezerowych składowych na kierunkach ruchu względnego,

$$(5.2) \quad T^w = [T_y^l, T_y^p, T_z^l, T_z^p, W^l, W^p]^T.$$

Zgodnie z zasadą o wzajemnym oddziaływaniu

$$(5.3) \quad T_y^l = -T_y^p, \quad T_z^l = -T_z^p, \quad W^l = -W^p.$$

liczba składowych wektora T^w wynika z chwilowego stanu współpracy kontaktujących się powierzchni.

Każda z powierzchni styku może mieć własną anizotropową chropowatość opisaną współczynnikami tarcia $\mu_{ij}^{(s)}$ ($i, j = 1, 2; s = l, p$) np. dla kierunków pokrywających się z głównymi osiami bezwładności kontaktujących się powierzchni pręta. Powierzchnie styku

złożono ze sobą w chwili początkowej tak, że kierunki pomiarowe tarcia (główne osie bezwładności przekrojów) pokrywają się. Kąt wirowania określający wzajemny obrót układów odniesienia na powierzchniach styku w tym przypadku równy jest różnicy kątów obrotu lewej i prawej powierzchni nieciągłości,

$$(5.4) \quad \varphi = \psi_x^l - \psi_x^p.$$

Kąt wirowania w miejscu styku praktycznie w każdej deformacji (rys. 1) jest wielkością pomijalnie małą ($\varphi \cong 0$). Stąd przyjęto, że podczas wirowania styk zachowuje swój pierwotny prostokątny kształt. Ponadto w styku panuje stały i równomierny docisk a N jest wielkością wypadkowej sił docisku z całej powierzchni kontaktu.

Zgodnie z opisem dyskretnego elementu tarciowego i powyższymi założeniami składowe siły tarcia w miejsce nieciągłości (odniesione do lewej strony węzła) opisują następujące równania,

$$(5.5) \quad \begin{bmatrix} T_y^l \\ T_z^l \\ W^l \end{bmatrix} = -N \begin{bmatrix} Q^{11} & Q^{12} & 0 \\ Q^{21} & Q^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_3}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y^l \\ v_z^l \\ \omega^l \end{bmatrix}.$$

Elementami macierzowej reprezentacji tensora tarcia Q w tym przypadku są,

$$(5.6) \quad \begin{aligned} Q^{11} &= \kappa(\mu_{11}^{(l)} + \mu_{11}^{(p)}), & Q^{12} &= \kappa(\mu_{12}^{(l)} + \mu_{12}^{(p)}), \\ Q^{21} &= \kappa(\mu_{21}^{(l)} + \mu_{21}^{(p)}), & Q^{22} &= \kappa(\mu_{22}^{(l)} + \mu_{22}^{(p)}), \end{aligned}$$

gdzie κ jest t.z.w. współczynnikiem złożenia [24]. Ponieważ środkiem wirowania styku prostokątnego o wymiarach $(a \times b)$ jest środek symetrii, więc charakterystyką tarciową styku [24] jest

$$(5.7) \quad R_3 = N(Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4),$$

gdzie

$$(5.8) \quad \begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{12} \left[a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - a^3 \ln \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} \right) + 2b^3 \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) \right], \\ A_4 &= \frac{1}{12} \left[ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - b^3 \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) + 2a^3 \ln \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Składowe wersora prędkości poślizgu w miejscu nieciągłości określają wzory

$$(5.9) \quad v_y^l = \frac{\dot{Y}^l - \dot{Y}^p}{\sqrt{(\dot{Y}^l - \dot{Y}^p)^2 + (\dot{Z}^l - \dot{Z}^p)^2}}, \quad v_z^l = \frac{\dot{Z}^l - \dot{Z}^p}{\sqrt{(\dot{Y}^l - \dot{Y}^p)^2 + (\dot{Z}^l - \dot{Z}^p)^2}},$$

$$\omega^l = \text{sign}(\dot{\psi}_x^l - \dot{\psi}_x^p)$$

gdzie \dot{Y}^l , \dot{Y}^p , \dot{Z}^l , \dot{Z}^p , $\dot{\psi}_x^l$, $\dot{\psi}_x^p$ są składowymi wektora prędkości lewej i prawej strony węzła nieciągłości, rys. 2.

6. Drgania tłumione siłami tarcia Coulomba

Załóżmy, że drgania układu odbywają się wokół pewnego stanu odkształconego wskutek działania obciążeń statycznych określonych wektorem G . Stan deformacji statycznej x_{st} opisuje równanie

$$(6.1) \quad Kx_{st} = G.$$

W zamieszczonych w pracy obliczeniach numerycznych rozwiązania równania (6.1) poszukiwano metodą eliminacji Gaussa [21, 22].

Ruch układu dyskretnego z tarcieniem, dla ustalonego stanu współpracy w miejscu nieciągłości, we współrzędnych uogólnionych określa równanie

$$(6.2) \quad M\ddot{x} + Kx = F + T(\dot{x}),$$

gdzie F i $T(\dot{x})$ są globalnymi wektorami sił zewnętrznych i sił tarcia Coulomba.

Wiadomo, że w przypadku drgań nieliniowych z udziałem tarcia Coulomba, okres drgań tłumionych jest równy okresowi drgań układu zachowawczego — przy tych samych charakterystykach sprężystych i bezwładnościowych, [1, 4, 13, 14, 15, 16].

W ustalonym stanie współpracy stykających się powierzchni rozwiązanie równania ruchu (6.2) może być przedstawione jako liniowe rozwinięcie według form drgań własnych

$$(6.3) \quad x = y_1(t)\Phi_{(1)} + y_2(t)\Phi_{(2)} + \dots + y_n(t)\Phi_{(n)} \equiv \Phi y,$$

y jest wektorem a Φ macierzą zbudowaną z postaci drgań,

$$(6.4) \quad \Phi = [\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \dots, \Phi_{(n)}].$$

Należy zaznaczyć, że liczba stopni swobody n zależy od przyjętego podziału na elementy skończone oraz od ilości możliwych, w danej chwili, ruchów względnych w miejscu styku. Równanie (6.3) określa transformację współrzędnych uogólnionych x do współrzędnych y zwanych normalnymi lub głównymi. Wprowadzając operacje transformacji macierzy i wektorów równanie (6.2) przyjmuje postać,

$$(6.5) \quad (\Phi^T M \Phi)(\Phi^{-1}\ddot{x}) + (\Phi^T K \Phi)(\Phi^{-1}x) = \Phi^T F + \Phi^T T(\dot{x}).$$

Równanie (6.5) można zapisać w prostej formie

$$(6.6) \quad m\ddot{y} + ky = f + t(\dot{y}),$$

przy następujących oznaczeniach

$$(6.7) \quad \begin{aligned} m &= \Phi^T M \Phi, & k &= \Phi^T K \Phi, \\ \ddot{y} &= \Phi^{-1}\ddot{x}, & y &= \Phi^{-1}x, \\ f &= \Phi^T F, & t(\dot{y}) &= \Phi^T T(\dot{x}). \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku nie można sformułować wektora tarcia t poprzez współrzędne normalne. Fakt ten zmusza do powrotu do współrzędnych uogólnionych na każdym etapie w którym określa się siły tarcia. Z warunku unormowania wektorów własnych (3.7) i (3.8) wynika, że m jest macierzą jednostkową a k macierzą diagonalną z elementami v_i^2 . Macierz odwrotną Φ^{-1} można określić korzystając z własności opisanej równaniem (3.7). Mnożąc (3.7) prawostronnie przez Φ^{-1} otrzymuje się

$$(6.8) \quad I\Phi^{-1} = \Phi^T M \Phi \Phi^{-1},$$

stąd

$$(6.9) \quad \Phi^{-1} = \Phi^T M.$$

Przy tak określonej macierzy Φ^{-1} współrzędne normalne wyrażają się poprzez współrzędne uogólnione następującym wzorem

$$(6.10) \quad y = \Phi^T M x.$$

Uwzględnienie w rozwinięciu (6.3) tylko k -tej ($k \leq n$) liczby niższych form drgań własnych sprowadza opis układu do k pierwszych równań typu (6.6). Wtedy macierz transformacji jest niepełną macierzą Φ , ograniczoną do k pierwszych wektorów. Posługując się pełnymi macierzami M , K i pełnymi wektorami x , F , T , działania opisane równaniami (6.7) i (6.9) są formalnie takie same, również dla niepełnej macierzy Φ . Uzyskane z operacji (6.7) i (6.9) wyniki obliczeń są elementami pełnych macierzy m , k , Φ^{-1} oraz pełnych wektorów y , f , $t(\dot{x})$. W ten sposób otrzymano wygodne narzędzie analizy jakościowej drgań złożonych układów.

Równania ruchu (6.6) w przypadku drgań nietłumionych rozprzegają się. Tarcie sprawia wzajemne sprzężenie tych równań, które odpowiadają formom drgań z względnymi przemieszczeniami w miejscu nieciągłości. Równania (6.6) opisują ruch tak długo jak długo liczba kierunków poślizgu w miejscu nieciągłości a tym samym liczba stopni swobody układu jest niezmienna.

Tylko w przypadku gdy macierz transformacji Φ składa się z 1 wektora własnego, równanie (6.6) można rozwiązać w sposób ścisły. W celu uzyskania ogólnej procedury rozwiązywania zagadnienia (6.6) skorzystano z jednej z metod przybliżonego, bezpośredniego całkowania układu równań różniczkowych [25, 26]. Wybrano metodę jednokrokowego całkowania równań wg Newmarka [25, 26, 27]. Metoda ta dla stosownie dobranych współczynników Newmarka i kroku całkowania, charakteryzuje się dobrą zbieżnością.

Zadane warunki początkowe ruchu we współrzędnych uogólnionych

$$(6.11) \quad x(t_0) - x_0 = O, \quad \dot{x}(t_0) - \dot{x}_0 = O,$$

według wzoru (6.10) formułuje się we współrzędnych normalnych

$$(6.12) \quad y_0 = \Phi^T M x_0, \quad \dot{y}_0 = \Phi^T M \dot{x}_0.$$

Następnie z równanie (6.6) wyznacza się przyspieszenia początkowe

$$(6.13) \quad \ddot{y}_0 = -D \dot{y}_0 + f(t_0) + t(\dot{x}_0).$$

Korzystając z parametrów ruchu wyznaczonych w $(i-1)$ chwili czasu, ruch w chwili i -tej określamy: równanie ruchu (6.6) i następujące wzory Newmarka [25, 26, 27]

$$(6.14) \quad \begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h \dot{y}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) h^2 \ddot{y}_{i-1} + \alpha h^2 \ddot{y}_i, \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_{i-1} + (1 - \delta) h \ddot{y}_{i-1} + \delta \ddot{y}_i, \\ h &= t_i - t_{i-1}. \end{aligned}$$

W oparciu o obliczenia testowe, jako wsp. Newmarka przyjęto

$$(6.15) \quad \alpha = 1/4 \quad \text{i} \quad \delta = 1/2.$$

a jako optymalny krok całkowania

$$(6.16) \quad h = 0,1 \frac{\pi}{\nu_{(i)}}$$

gdzie $\nu_{(i)}$ jest częstością analizowanych drgań. Kryterium doboru wsp. Newmarka i kroku czasowego stanowiły: dokładność i stabilność numeryczna amplitudy i częstości w kolejnych cyklach drgań oraz rozsądnie długi czas obliczeń.

Z powodu nieliniowości równania ruchu (6.6), w przypadku stanu częściowego i całkowitego poślizgu jego rozwiązanie poszukuje się w sposób iteracyjny. Zgodnie z wzorami Newmarka i przedstawionymi powyżej własnościami układu w każdym kroku czasowym t_i iteracyjnie rozwiązuje się następujący układ równań

$$(6.17) \quad \left(\frac{4}{h^2} \mathbf{I} + \mathbf{D} \right) \mathbf{y}_i = \frac{4}{h} \left(\frac{1}{h} \mathbf{y}_{i-1} + \dot{\mathbf{y}}_{i-1} \right) + \ddot{\mathbf{y}}_{i-1} + \mathbf{f}_i + \mathbf{t}(\dot{\mathbf{x}}_i),$$

$$(6.18) \quad \dot{\mathbf{y}}_i = \dot{\mathbf{y}}_{i-1} + \frac{h}{2} (\ddot{\mathbf{y}}_{i-1} + \ddot{\mathbf{y}}_i),$$

$$(6.19) \quad \ddot{\mathbf{y}}_i = \frac{4}{h^2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}) - \frac{4}{h} \dot{\mathbf{y}}_{i-1} - \ddot{\mathbf{y}}_{i-1}.$$

Równanie (6.17) jest równaniem ruchu (6.6) zapisanym w przemieszczeniach \mathbf{y}_i . Powracając z rozwiązaniem do wsp. uogólnionych, ruch w i — tej chwili określają

$$(6.20) \quad \mathbf{x}_i = \Phi \mathbf{y}_i, \quad \text{i.t.d.}$$

Cykl iteracji nieliniowej funkcji wektora tarcia rozpoczyna się od oszacowania prędkości w i — tej chwili w oparciu o znane parametry ruchu w chwili $(i-1)$, według wzoru

$$(6.21) \quad \dot{\mathbf{x}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{x}}_{i-1} + h \ddot{\mathbf{x}}_{i-1}.$$

Stąd pierwszym przybliżeniem wektora tarcia jest

$$(6.22) \quad \mathbf{T}_i^{(1)} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}_i^{(0)}), \quad \mathbf{t}_i^{(1)} = \Phi^T \mathbf{T}_i^{(1)}.$$

Równanie (6.17) rozwiązuje się z tak oszacowanym wektorem tarcia. Z otrzymanych rozwiązań (6.18) określa się odpowiadający im wektor tarcia,

$$(6.23) \quad \mathbf{T}_i^{(2)} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}_i^{(1)}), \quad \mathbf{t}_i^{(2)} = \Phi^T \mathbf{T}_i^{(2)},$$

z którym ponownie rozwiązuje się równania (6.17). W analogiczny sposób, s — tym przybliżeniem wektora tarcia jest

$$(6.24) \quad \mathbf{T}_i^{(s)} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}_i^{(s-1)}).$$

Kryterium zakończenia procesu iteracyjnego stanowi zbieżność wektora tarcia z dwóch kolejnych iteracji, do wartości ustalonej

$$(6.25) \quad |\mathbf{T}_i^{(s)} - \mathbf{T}_i^{(s-1)}| \leq \delta,$$

gdzie δ jest nałożoną dokładnością iteracji. Na ogół, korzystając z wzoru (6.21) uzyskuje się zbieżności iteracji z błędem nie przekraczającym 1% już w 1 - 2 kroku. Trudności z zapewnieniem zbieżności występują tam gdzie kierunek siły tarcia, co prawda w sposób ciągły lecz gwałtowny, zmienia się o kąt bliski π . W tych przypadkach można konstruować inne procedury trafniejszego wyboru wektora tarcia spełniającego chwilowe warunki równowagi dynamicznej układu. Najprostszym (lecz czasochłonnym) sposobem poprawy zbieżności jest zmniejszenie wielkości kroku całkowania równań ruchu.

Korzystając z lokalnej macierzy sztywności elementu prętowego oraz jego przemieszczeń węzłowych przetransformowanych do układu lokalnego, można określić chwilowe siły przywęzłowe w danym elemencie prętowym.

Niech N^l i N^p są chwilowymi siłami normalnymi na lewej i prawej powierzchni miejsca

nieciągłości. Brane są pod uwagę tylko te przypadki ruchu podczas których N^I i N^P są siłami ściskającymi. Warunek ten gwarantuje wprowadzany do układu, odpowiednio duży, niezależny od czasu, docisk technologiczny określony siłami N_0 , rys. 1. Za miarę docisku w styku przyjmuje się

$$(6.26) \quad N = 0,5|N^I - N^P|.$$

Podczas procesu iterowania chwilowego wektora tarcia, przemieszczenia podlegają niewielkim zmianom. Stąd można założyć, że w cyklu iteracyjnym docisk jest stały i równy np. dociskowi obliczonemu w chwili poprzedniej. W zamieszczonych w pracy przykładach wielkość docisku N praktycznie nie różniła się od $|N_0|$. Wynika to stąd, że dopuszczalne deformacje sprężyste układu, przy nieobciążonym siłami normalnymi węzle nieciągłości, dają niewielkie siły normalne w tym węzle.

Istnieje klasa zadań w których wektor tarcia ma stały w czasie kierunek działania. Wtedy również w pewnych chwilach czasu prędkość względna w styku przyjmuje wartość zero. W chwilach tych wektor tarcia jest nieokreślony, zaś funkcje przyspieszeń mają nieciągłość. Dla tych zadań formułuje się dodatkową procedurę znajdowania miejsca zerowego funkcji prędkości poślizgu i sposobu przejścia przez miejsce nieciągłości funkcji przyspieszeń. Oszacowaną prędkość względną w kroku i — tym w oparciu o parametry ruchu w kroku $(i-1)$ według wzoru (6.21) porównuje się z prędkością kroku $(i-1)$. W ten sposób określa się przedział czasowy $< t_{i-1}, t_i >$ w którym może nastąpić zmiana kierunku prędkości poślizgu. Znaleziony przedział dzieli się na mniejsze o wielkości θ . Następnie porównując rozwiązania równań (6.17) — (6.19) w tak określonych podprzedziałach czasu, lokalizuje się miejsce zerowe prędkości poślizgu z dokładnością θ . Różnicę wartości przyspieszeń obliczonych dla najbliższego otoczenia miejsca zerowego prędkości poślizgu, przyjmuje się za skok funkcji przyspieszeń.

Dodatkowej procedury wyznaczania wektora tarcia w chwili bliskiej t_0 wymagają te zadania w których prędkość początkowa jest równa zero. Wówczas po wyznaczeniu przyspieszeń w chwili t_0 (bez udziału tarcia) szacuje się wielkość prędkości w chwili bliskiej t_0 , z wzoru

$$(6.27) \quad \dot{x}(t_0 + \varepsilon) = \varepsilon \ddot{x}_0, \quad \varepsilon < h.$$

Dla tak określonej prędkości wyznacza się wektor sił tarcia

$$(6.28) \quad T(t_0) \cong T(\dot{x}(t_0 + \varepsilon))$$

Następnie z równania (6.13) określa się przyspieszenie \ddot{y}_0 które jest wielkością startową do analizy ruchu w kroku pierwszym. Powyższa procedura okazała się wystarczającą jedynie w przypadku ruchu układu opisanego jedną formą drgań własnych.

Ważnym jest określenie momentu w którym nastąpi przejście ze stanu poślizgu w stan zespolenia i odwrotnie. Najogólniej można stwierdzić, że poślizg rozpocznie się wtedy gdy zostaną zerwane więzy tarcia statycznego w styku. Natomiast zakończenie poślizgu (zwane zespoleniem) nastąpi gdy ustanie ruch względny w miejscu konstrukcyjnej nieciągłości i zostaną nawiązane więzy tarcia statycznego. W zamieszczonych w pracy przykładach obliczeń pokazano tylko przypadek ruchu z całkowitym poślizgiem. W tym celu tak dobrano warunki początkowe ruchu aby stan ten panował już w chwili t_0 . Moment zakończenia poślizgu można określić badając parametry ruchu układu. W pracy przyjęto, że na-

stąpi to w chwili gdy prędkość względna ma miejsce zerowe a przyspieszenie względne liczone dla sił tarcia dynamicznego zmieniałoby znak.

7. Przykład zastosowań do analizy układów łopatkowych turbin. Opis problemu.

Łopatki turbinowe zakończone fragmentem bandaża mogą być zestawiane ze sobą w pakiety. Wzajemne usytuowanie odcinków bandaża wpływa na charakter pracy łopatek. Przy tym możliwe jest zachowanie luzu, monolityczne złączenie lub kontakt z zapewnionym dociskiem. Jednym ze sposobów zagwarantowania docisku jest takie wykonywanie łopatek aby płaszczyzna końca bandaża była przesunięta względem płaszczyzny stopy łopatki. Po zestawieniu ze sobą 2 - 4 łopatek osiąga się znaczny docisk na powierzchni nieciągłości bandaża. Najczęściej powierzchnia nieciągłości jest prostopadła lub ukośna względem brzegu bandaża. Znane są również połączenia z uskokiem w środku szerokości bandaża. Podczas ruchu na powierzchniach styku bandaża generowane są siły tarcia suchego [28]

Zasadniczym zadaniem mechanizmów tarciovych maszyn wirnikowych jest rozpraszanie energii dostarczanej do układu na skutek oddziaływań zaburzonego przepływu czynnika lub drgającego wirnika. W szczególności wymuszenia mogą pochodzić od źle wykonanego kanału przepływowego w tarczy kierowniczej lub od nieszczelności na powierzchni podziału tarczy. Trudno ocenić jakiej wielkości są to oddziaływania. Nie ma jednoznacznych opisów wartości sił i ruchów wymuszających drgania elementów turbiny [28]

Rozważmy parę cylindrycznych łopatek turbinowych z odcinkiem bandaża. Powierzchnia styku, fragmentów bandaża jest prostopadła do jego osi. Załóżmy, że siły docisku technologicznego zapewniają ciągły kontakt a przemieszczenia względne w styku bandaża są makropoślizgami. Pakiet znajduje się w stacjonarnym polu sił masowych. Kształt kanału przepływowego wymaga ukośnego usytuowania łopatek względem płaszczyzny tarczy wirnikowej. Stąd główne osie bezwładności przekrojów łopatek i bandaża nie są wzajemnie równoległe. Załóżmy, że inercjalny układ współrzędnych $OXYZ$ jest związany z wieńcem tarczy wirnikowej. Płaszczyzna OXZ pokrywa się z płaszczyzną tarczy. Niech modelem dynamicznym pakietu będzie układ prętowy przedstawiony na rys. 1. W zamieszczonych w pracy przykładach liczonego pakietu złożony z łopatek o szerokości 0,03 [m] i wysokości 0,172 [m]. Obliczenia przeprowadzono na EMC ODRA 1204.

W niewielu publikacjach zajmowano się tak postawionym problemem teoretycznym. W [29] analizowano drgania własne 2 łopatek z monolitycznym bandażem korzystając z modelu ramy płaskiej. Wyniki badań eksperymentalnych nad wpływem docisku w miejscu nieciągłości podczas drgań rezonansowych pary łopatek zaprezentowano w [30].

8. Wyniki obliczeń drgań własnych pakietu łopatek

Rezultaty obliczeń pierwszych częstości drgań własnych układu, dla podziału na 4, 6 i 8 elementów, przedstawiono w tabl. 1. Za każdym razem bandaż dzielono na 2 elementy. W węźle nieciągłości, możliwy jest całkowity poślizg. Łopatki osadzono ukośnie

względem płaszczyzny tarczy wirnikowej ($\gamma = 10^\circ$). Uzyskane wyniki wskazują na dobrą zbieżność, pierwszych częstotliwości drgań układu dyskretyzowanego. Według J. THOMASA [29] optymalny podział pakietu ze względu na pierwsze częstotliwości to 3 elementy na łopatkę

Tablica 1

Częstotliwości drgań własnych dla różnych podziałów na elementy skończone (p — ilość elementów) w stanie całkowitego poślizgu i dla $\gamma = 10^\circ$ (w [1/s]).

p	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(II)}$	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(IV)}$	$\nu_{(V)}$	$\nu_{(VI)}$	$\nu_{(VII)}$	$\nu_{(VIII)}$
4	1907,55	3591,11	3629,77	17535,64	19044,12	19442,59	33331,27	33814,39
6	1904,33	3584,72	3623,73	12249,47	12676,71	19135,14	23886,06	24280,37
8	1904,03	3584,14	3623,18	12140,28	12610,20	19087,96	23757,04	24154,22

i 2 na bandażu. Niniejsza analiza potwierdza ten wniosek również w przypadku pakietu z nieciągłym bandażem. Dalsze wyniki uzyskano dla takiego podziału układu na elementy skończone.

Dopuszczenie względnych ruchów na kierunkach poślizgów w węźle nieciągłości, daje znacznie niższe wartości niektórych częstotliwości drgań własnych w porównaniu z tym samym pakietem o monolitycznym bandażu. W tabl. 2 zestawiono częstotliwości drgań własnych pakietu ($\gamma = 10^\circ$) gdy przemieszczenia węzła nieciągłości bandaża opisuje 6 składowych

Tablica 2

Częstotliwości drgań własnych w różnych stanach współpracy stykających się powierzchni (m — ilość stopni swobody w miejscu nieciągłości) gdy $\gamma = 10^\circ$ (w [1/s]).

m	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(II)}$	$\nu_{(III)}$	$\nu_{(IV)}$	$\nu_{(V)}$	$\nu_{(VI)}$	$\nu_{(VII)}$	$\nu_{(VIII)}$
6	2907,48	3584,14	10708,54	12140,28	15683,14	23757,04	26238,42	35800,52
7	2901,35	3584,14	10672,29	12140,28	15625,53	23757,04	24074,72	35800,52
8	1938,71	3584,14	4584,45	12140,28	12730,03	19126,27	23757,04	26471,07
9	1904,03	3584,14	3623,18	12140,28	12610,20	19087,96	23757,04	24154,22

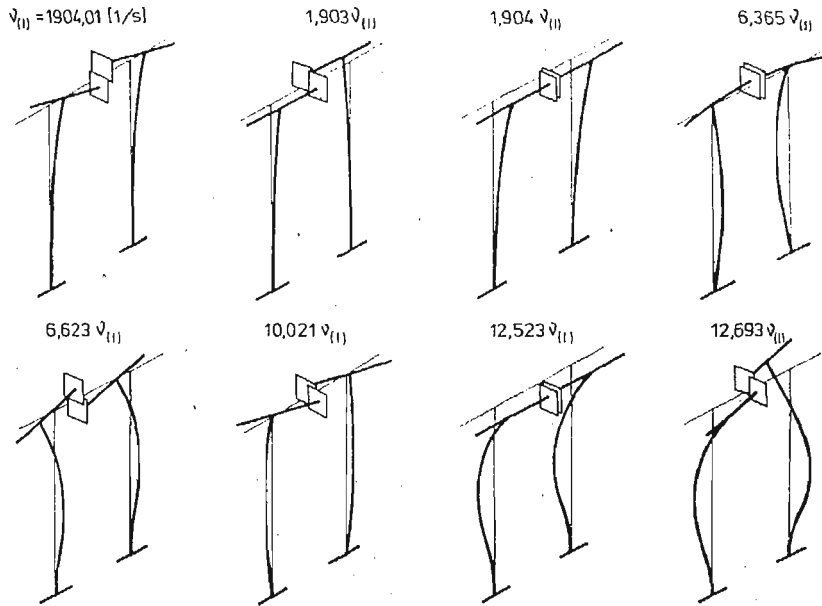
(całkowite zespolenie), 7 (względne wirowanie), 8 (względny ruch translacyjny) i 9 (całkowity poślizg). Np. pierwsza częstotliwość drgań własnych jest mniejsza o 34,5% a trzecia o 66,2%, na skutek odsztywnienia układu. Częstotliwości II i IV charakteryzujące drgania bez względnych przemieszczeń w styku we wszystkich stanach współpracy są jednakowe. Częstotliwości w przypadku dopuszczonego względnego wirowania (7 składowych) są nieznacznie mniejsze od częstotliwości drgań w stanie całkowitego zespolenia (6 składowych). Oczywiście są identyczne w przypadku form bez względnego wirowania (II, IV, VI).

Zmiana kąta (γ) ukośnego usytuowania łopatek względem płaszczyzny tarczy wirnikowej, powoduje małe zmiany częstotliwości drgań układu co pokazano w tabl. 3.

Szkic pierwszych 8 form drgań w przypadku $\gamma = 0^\circ$ przedstawiono na rys. 5. Linia

Tablica 3
Częstości drgań własnych dla różnych kątów ukośnego usytuowania łopatek pakietu (γ) w stanie całkowitego poślizgu ($w[1/s]$)

γ	$\nu_{(I)}$	$\nu_{(II)}$	$\nu_{(III)}$	$\nu_{(IV)}$	$\nu_{(V)}$	$\nu_{(VI)}$	$\nu_{(VII)}$	$\nu_{(VIII)}$
0°	1904,01	3623,18	3624,62	12118,32	12609,54	19079,16	23844,87	24167,49
10°	1904,03	3584,14	3623,18	12140,28	12610,20	19087,96	23757,04	24154,22
20°	1904,09	3465,36	3623,16	12202,55	12612,90	19113,55	23503,74	24115,88
30°	1904,17	3276,20	3623,14	12294,86	12614,96	19153,46	23113,96	24056,71



Rys. 5. Szkic form drgań własnych w stanie całkowitego poślizgu gdy $\gamma = 0^\circ$

cienką oznaczono niezdeformowany stan pakietu. W dalszej części pracy postacie deformacji będą bliżej określone poprzez wyróżnienie płaszczyzn i kierunków dominującego ruchu, odniesionych względem układu $OXYZ$.

Siła tarcia jest generowana podczas drgań tylko z tymi formami, które mają względne przemieszczenie lub względny obrót w miejscu konstrukcyjnej nieciągłości. Z pierwszych 8 form drgań własnych, pokazanych na rys. 5, dysypacja energii występuje podczas drgań z 5 postaciami (I, II, V, VI, VIII) zaś drgania z 3 pozostałymi są zachowawcze.

Ukośne usytuowanie łopatek w wieńcu tarczy wirnikowej ($\gamma \neq 0^\circ$) wywołuje efekt sprzężenia drgań. Gdy kąt γ jest zerem to formy drgań własnych występują w czystej postaci, (bez wzajemnych sprzężeń). I tak, gdy $\gamma \neq 0^\circ$ drgania z I postacią są głównie drganiami w płaszczyźnie tarczy w kierunku OX . Nakładają się na nie drgania w kierunku OY z II formą. Z analizy I formy (tabl. 4) wynika, że ze wzrostem kąta γ zwiększa się udział w drganiach II formy, poprzez wzrost wartości składowych Y , ψ_x i ψ_z , pokazanych dla

węzła 4 i 5. Jednocześnie zmniejsza się wkład I formy, odpowiada temu spadek wartości X , Z i ψ_Y

Tablica 4

Sprzężenia drgań w płaszczyźnie tarczy ($\Phi_{(I)}, \gamma = 0^\circ$) i z płaszczyzny tarczy ($\Phi_{(II)}, \gamma = 0^\circ$) na skutek ukośnego usytuowania łopatek określonego kątem γ . Na przykładzie przemieszczeń węzła 4 i 5 w stanie całkowitego poślizgu

		$\Phi_{(I)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(I)}, \gamma = 10^\circ$	$\Phi_{(I)}, \gamma = 20^\circ$	$\Phi_{(I)}, \gamma = 30^\circ$
4	X	19,2996210	-0,0000035	19,0066846	18,1366670	16,7158496
	Y	-0,0000005	-19,2361931	3,3504032	6,5993992	9,6482273
	Z	-0,0002645	0,0000000	-0,0002604	-0,0002485	-0,0002291
	ψ_X	0,0000000	1,5730921	-0,2739447	-0,5395851	-0,7888365
	ψ_Y	1,5782049	-0,0000003	1,5542374	1,4830578	1,3668255
	ψ_Z	0,0000000	-0,1412941	0,0066147	0,0130297	0,0190500
	X	19,2998088	-0,0000035	19,0068697	18,1368436	16,7160124
5	Y^L	-0,0000005	-19,4073922	3,3584179	6,6151867	9,6713095
	Y^P	0,0000056	19,4427800	-3,3584344	-6,6151723	-9,6713155
	Z^L	-1,9100269	0,0000005	-1,8810203	-1,7948750	-1,6542044
	Z^P	1,9100268	-0,0000006	1,8810204	1,7948752	1,6542042
	ψ_X^L	0,0000000	1,5732363	-0,2739516	-0,5395987	-0,7888565
	ψ_X^P	-0,0000004	-1,5761300	0,2739531	0,5395976	0,7888569
	ψ_Y	1,5783579	-0,0000004	1,5543882	1,4832018	1,3669579
	ψ_Z	0,0000000	-0,1415520	0,0066268	0,0130536	0,0190850

Drgania z II postacią (gdy $\gamma \neq 0^\circ$) są drganiami z płaszczyzny tarczy, wzdłuż osi OY z III formą (dla $\gamma = 0^\circ$). Są one sprzężone z drganiami w płaszczyźnie na kierunku OZ z IV formą. Z analizy II postaci drgań własnych (tabl. 5) wynika, że wzrost wartości kąta ukośnego usytuowania łopatek w zasadzie nie ma wpływu na zmianę tej formy drgań.

Drgania z III postacią (gdy $\gamma \neq 0^\circ$) są drganiami z płaszczyzny tarczy w kierunku OY (z II formą dla $\gamma = 0^\circ$). Towarzyszą im drgania w płaszczyźnie tarczy na kierunku OX z I postacią (dla $\gamma = 0^\circ$) w przypadku względnego ruchu translacyjnego i całkowitego poślizgu w węzle nieciągłości. W przypadku stanu całkowitego zespolenia lub względnego ruchu wirowego w miejscu styku są one sprzężone z odpowiednią V formą drgań (dla $\gamma = 0^\circ$).

Podobną analizę efektów sprzężeń drgań poprzez sprężystość można przeprowadzić dla dalszych form drgań.

Tablica 5

Sprężenia drgań z płaszczyzny tarczy ($\Phi_{(III)}, \gamma = 0^\circ$) i w płaszczyźnie tarczy ($\Phi_{(IV)}, \gamma = 0^\circ$) na skutek ukośnego usytuowania łopatek, określonego kątem γ . Na przykładzie przemieszczeń węzła 4 i 5 w stanie całkowitego poślizgu

		$\Phi_{(III)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(IV)}, \gamma = 0^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 10^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 20^\circ$	$\Phi_{(II)}, \gamma = 30^\circ$
4	X	-0,0000027	0,0547074	0,0011286	0,0019027	0,0025771
	Y	19,2869399	-0,0000005	19,2600057	19,2387286	19,2146241
	Z	0,0000000	0,0132329	0,0000084	0,0000142	0,0000159
	ψ_x	-1,5771722	0,0000000	-1,5721831	-1,5631514	-1,5522302
	ψ_y	-0,0000002	-2,7013994	-0,0211946	-0,0381756	-0,0478345
	ψ_z	-0,0006294	0,0000001	0,0004834	0,0004559	0,0004063
5	X	-0,0000027	-0,0000019	0,0001002	-0,0000168	0,0000170
	Y^L	19,2874754	-0,0000003	19,2603696	19,2390738	19,2149314
	Y^P	19,2517460	0,0000008	19,2614216	19,2390239	19,2149796
	Z^L	0,0000003	1,6493734	0,0128274	0,0231134	0,0289573
	Z^P	-0,0000003	1,6493713	0,0128474	0,0231100	0,0289604
	ψ_x^L	-1,5773168	0,0000000	-1,5723241	-1,5632824	-1,5523465
	ψ_x^P	-1,5744205	-0,0000001	-1,5724093	-1,5632782	-1,5523504
	ψ_y	-0,0000003	-0,0000009	0,0000083	-0,0000014	0,0000013
	ψ_z	0,0001302	0,0000001	-0,0000047	-0,0000001	-0,0000006

9. Wyniki obliczeń drgań tłumionych pakietu łopatek

Tłumiącą rolę tarcia suchego oraz wpływ anizotropii tarcia na drgania pakietu łopatek rozpatrzono na przykładzie „czystych drgań”. Układ mechaniczny wykonuje „czyste drgania” o jednej tylko częstotliwości drgań własnych gdy jest wprawiony w ruch z konfiguracji lub z prędkością o rozkładzie zgodnym z wybraną formą drgań własnych. Podobnie, drgania rezonansowe z daną częstotliwością realizuje harmoniczna siła wymuszająca o częstotliwości rezonansowej i rozkładzie amplitudy z odpowiadającą danej częstotliwości formie drgań. Przy tym korzysta się z własności układów z tarcieciem suchym, że częstotliwość drgań układu tłumionego i nietłumionego jest jednakowa [4].

Wymuszając „czyste drgania” z wybraną formą drgań własnych jednocześnie wzbudza się drgania z innymi częstotliwościami. Liczba wzbudzanych form zależy od warunków ruchu, typu tarcia oraz od tego, czy uwzględnia się sprężenia poprzez sprężystość układu. Budując macierz transformacji Φ z wybranych wektorów własnych można ograniczyć rozważania efektu wzbudzenia drgań do kilku form. W ten sposób otrzyma się przybliżony

obraz drgań. O stopniu przybliżenia decyduje liczba wziętych do analizy wektorów własnych. Krok całkowania numerycznego dobiera się ze względu na formę z najwyższą częstotliwością drgań.

Rozważmy przypadek gdy macierz transformacji Φ zawiera tylko jedną formę drgań z względnymi przemieszczeniami w miejscu nieciągłości. Niech siły wymuszające i warunki początkowe mają rozkład zgodny z tą formą. Uzyskany obraz drgań będzie pierwszym przybliżeniem rzeczywistych drgań układu. Na rysunkach 6 przedstawiono przemieszczenia (rys. 6.1), prędkości (rys. 6.2) i przyspieszenia (rys. 6.3), drgań swobodnych węzła 4 w kierunku OX , wywołane deformacją początkową układu zgodną z I formą drgań (gdy $\gamma = 10^\circ$). Na wykresach umieszczono przebiegi drgań nietłumionych i drgań tłumionych siłami tarcia izotropowego, dla różnych wielkości tarcia przy stałym docisku technologicznym ($N_0 = 700$ [N]). Ekstremalne naprężenia normalne od zginania w stopie łopatkki, na skutek tłumienia ($\mu = 0,1$) zmniejszyły się około 10-krotnie, z 34,3 [mP] do 3,38 [mP]. Na rysunkach 7 pokazano przemieszczenia (rys. 7.1), prędkości (rys. 7.2) i przyspieszenia (rys. 7.3) drgań swobodnych węzła 4 w kierunku OY , wywołane prędkością początkową o rozkładzie zgodnym z III formą drgań własnych (gdy $\gamma = 10^\circ$). Wykresy ilustrują przebiegi drgań nietłumionych ($N_0 = 0$) oraz drgań tłumionych siłami tarcia izotropowego ($\mu = 0,1$) gdy docisk technologiczny N_0 przyjmuje różne wartości. Pod wpływem tłumienia ($N_0 = 150$ [N]) ekstremalne naprężenia normalne od zginania w stopie łopatkki z 33,35 [mP] zostały zredukowane do 4,32 [mP]. Na rys. 8.1, 8.2, 8.3 umieszczono przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia drgań z I częstotliwością rezonansową. Pakietowi łopatek nadano również deformację wstępną zgodną z I formą (gdy $\gamma = 10^\circ$). Na rysunkach pokazano drgania węzła 4 w kierunku OX . Wykresy zawierają przebiegi drgań nietłumionych ($\mu = 0$) i drgań tłumionych siłami tarcia izotropowego o różnych współczynnikach tarcia, przy tym samym docisku N_0 .

Przebiegi „czystych drgań” uzyskane dla macierzy transformacji zbudowanej tylko z jednego wektora własnego mają znane własności dynamiczne układu o 1 stopniu swobody z tarciem suchym [13, 14, 15, 16]. Są to takie cechy jak:

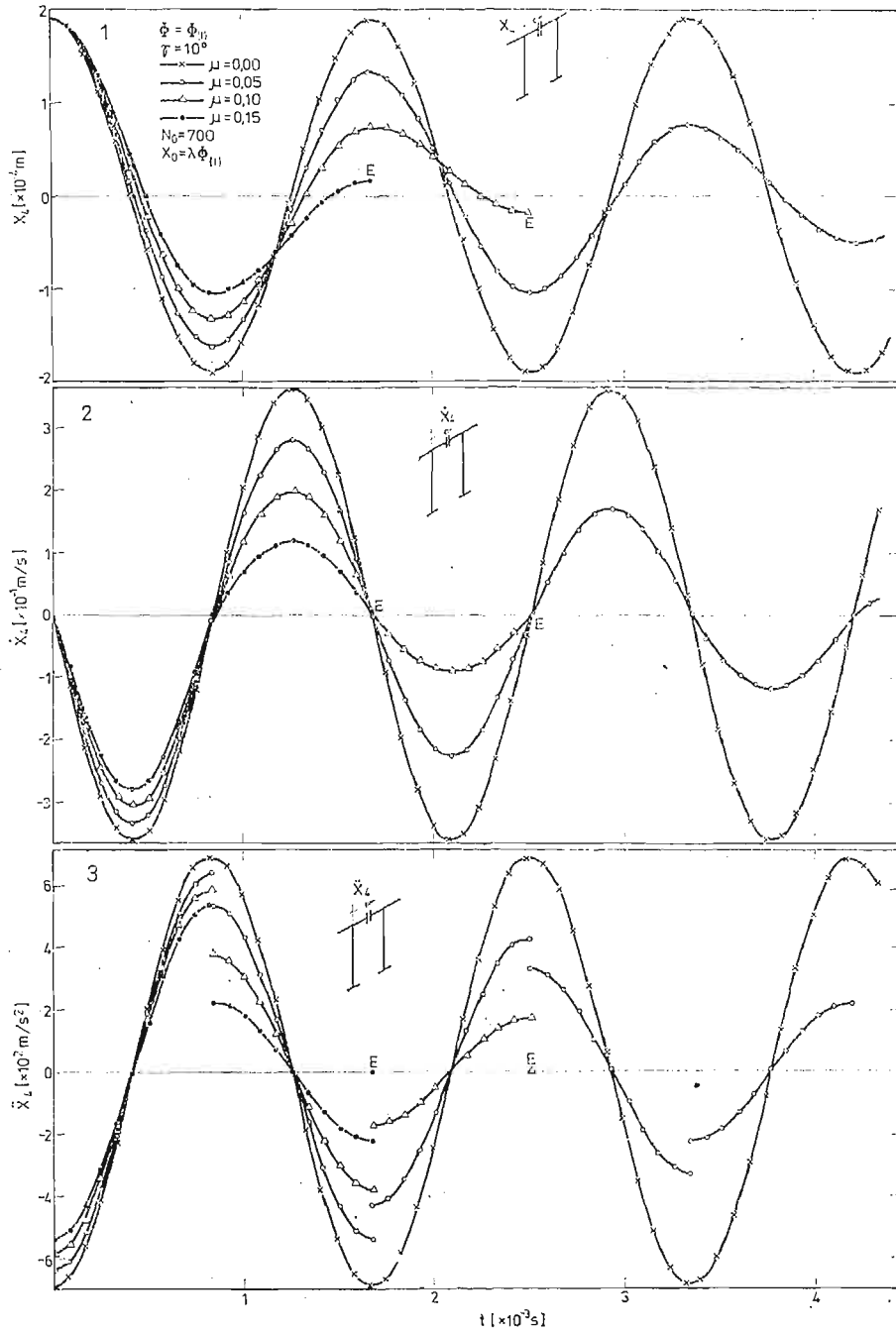
- występuje przesunięcie środka drgań o $\pm \Delta$,
- amplituda drgań maleje wg postępu arytmetycznego,
- funkcja przyspieszeń jest nieciągła (ze stałym skokiem $2\Delta\nu_{(i)}^2$) w miejscu zerowym prędkości i.t.d.

Dla rozpatrywanych układów o wielu stopniach swobody

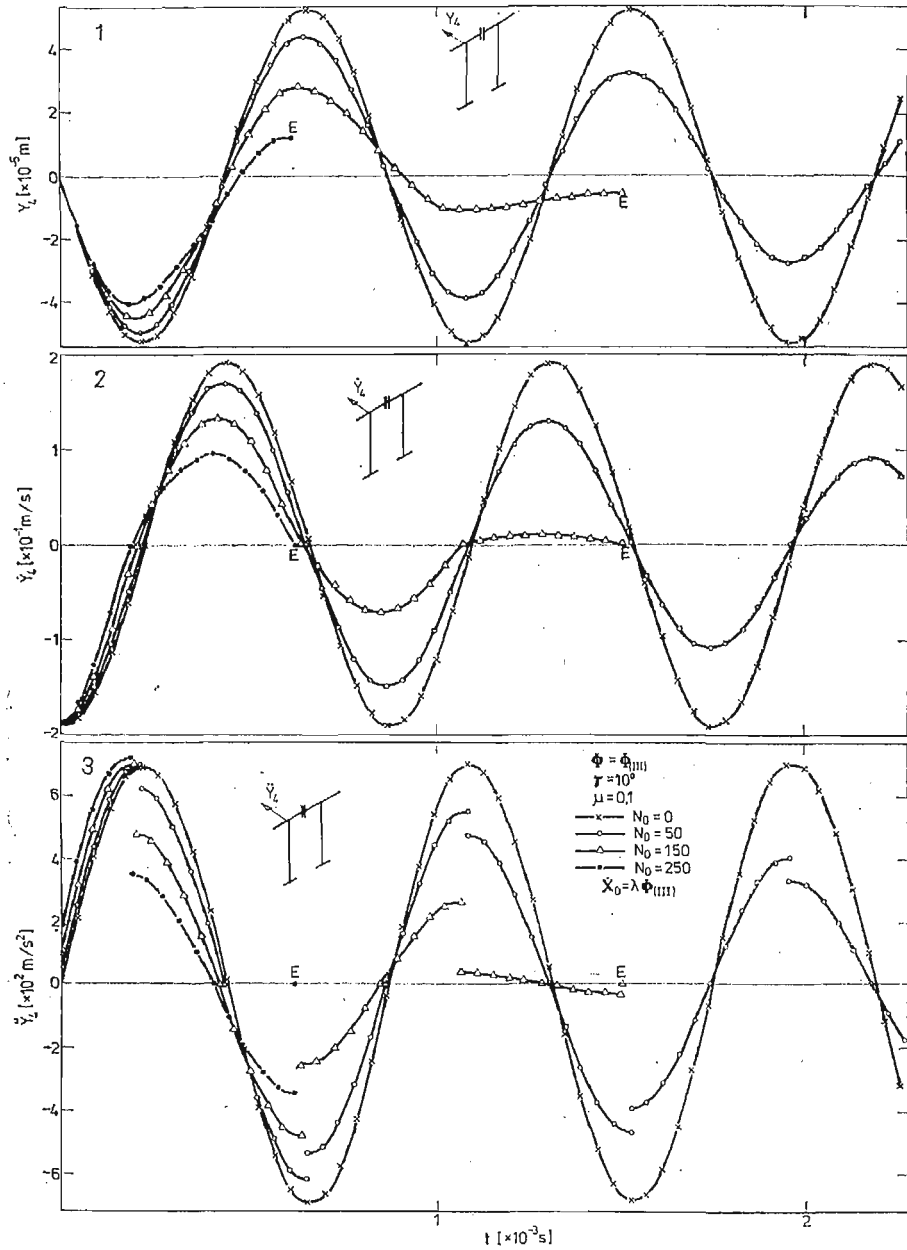
$$(9.1) \quad \Delta = \frac{|\Phi_{(i)}^T T|}{\nu_{(i)}^2},$$

gdzie $\Phi_{(i)}$ jest postacią analizowanych drgań, $\nu_{(i)}$ odpowiadającą jej częstotliwością, T wektorem generowanych podczas ruchu sił tarcia. Cechą charakterystyczną, tych zagadnień jest stały w czasie kierunek działania wektora tarcia na powierzchni styku (bez względu na typ tarcia).

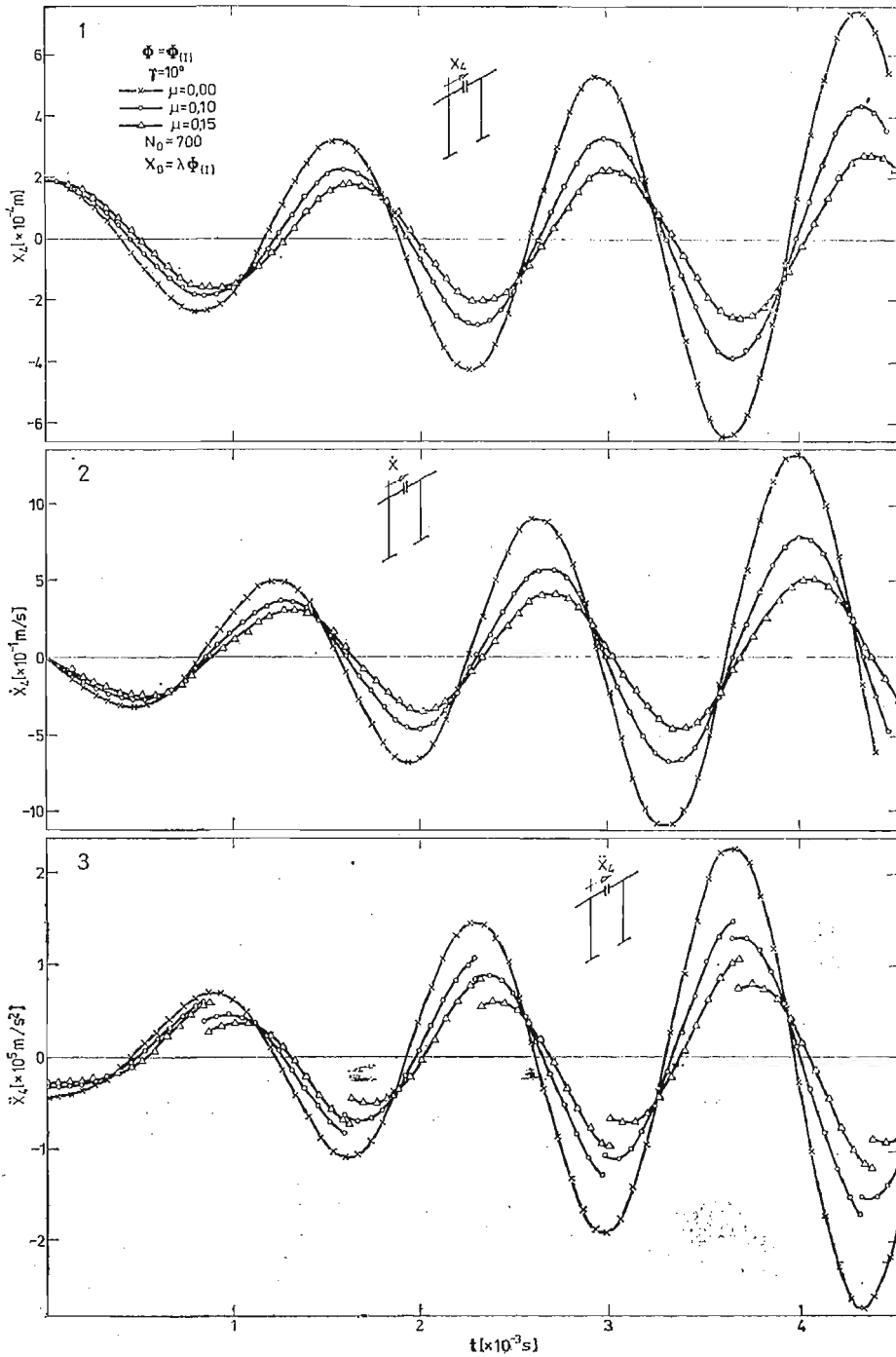
Wpływ ilości form drgań własnych wziętych do budowy macierzy transformacji Φ na obraz drgań, pokazano na przykładzie drgań swobodnych węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY , wywołanych prędkością zgodną z II formą drgań (gdy $\gamma = 0^\circ$). Na rysunkach 9 przedstawiono przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w przypadku tarcia izotro-



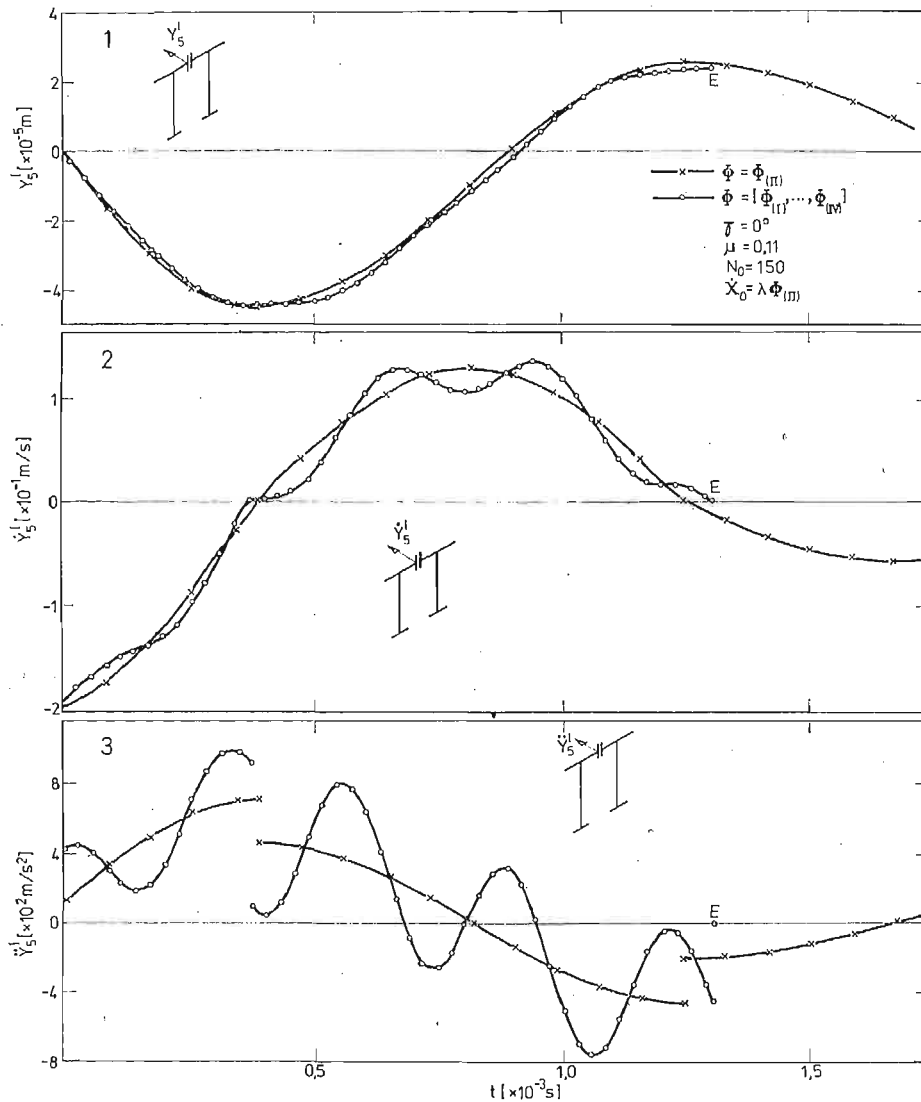
Rys. 6. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 4 w kierunku OX podczas drgań swobodnych z I formą (gdzie $\gamma = 10^\circ$).



Rys. 7. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 4 w kierunku OY podczas drgań swobodnych z III formą (gdy $\gamma = 10^\circ$).



Rys. 8. Przeszyczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 4 w kierunku OX podczas drgań rezonansowych z I częstotnością własną (gdy $\gamma = 10^\circ$)

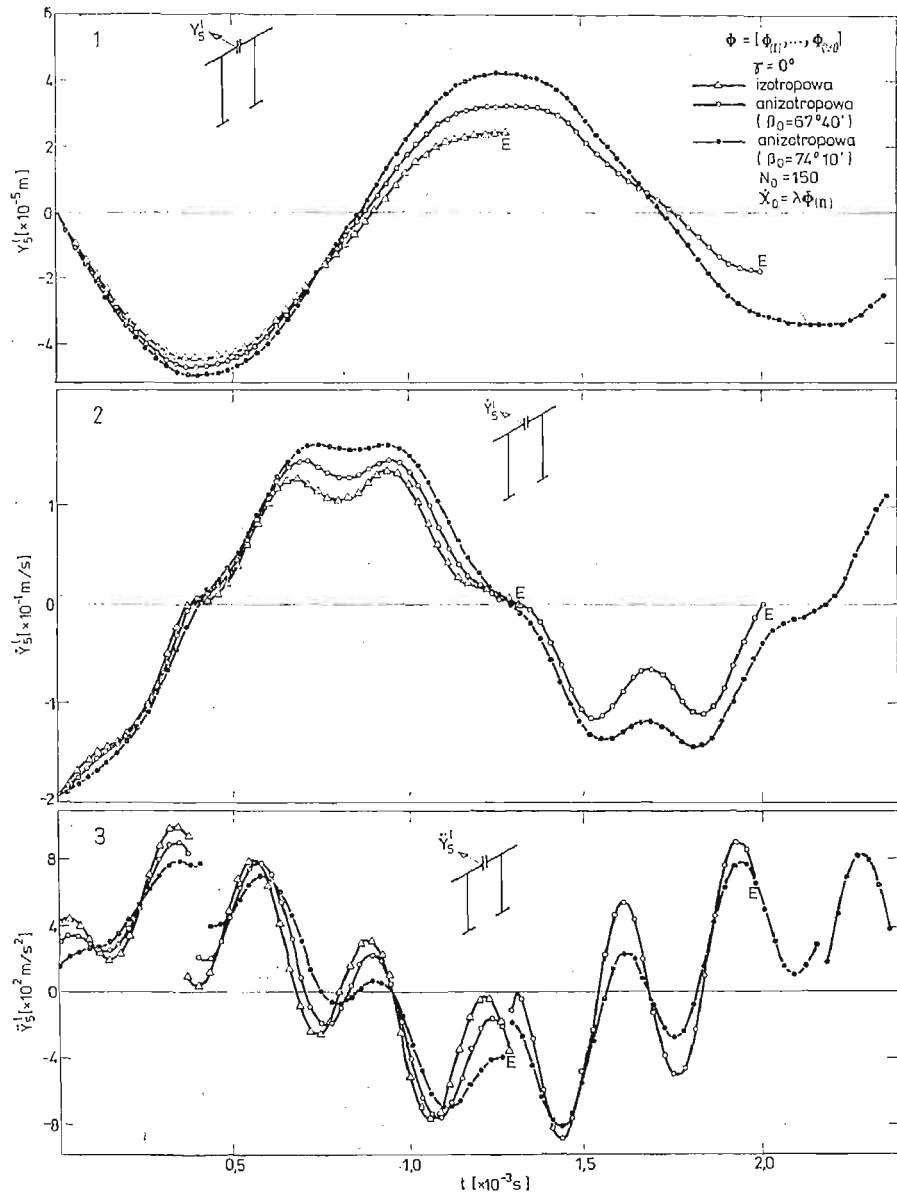


Rys. 9. Przemieszczenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY przy różnych opisach transformacji.

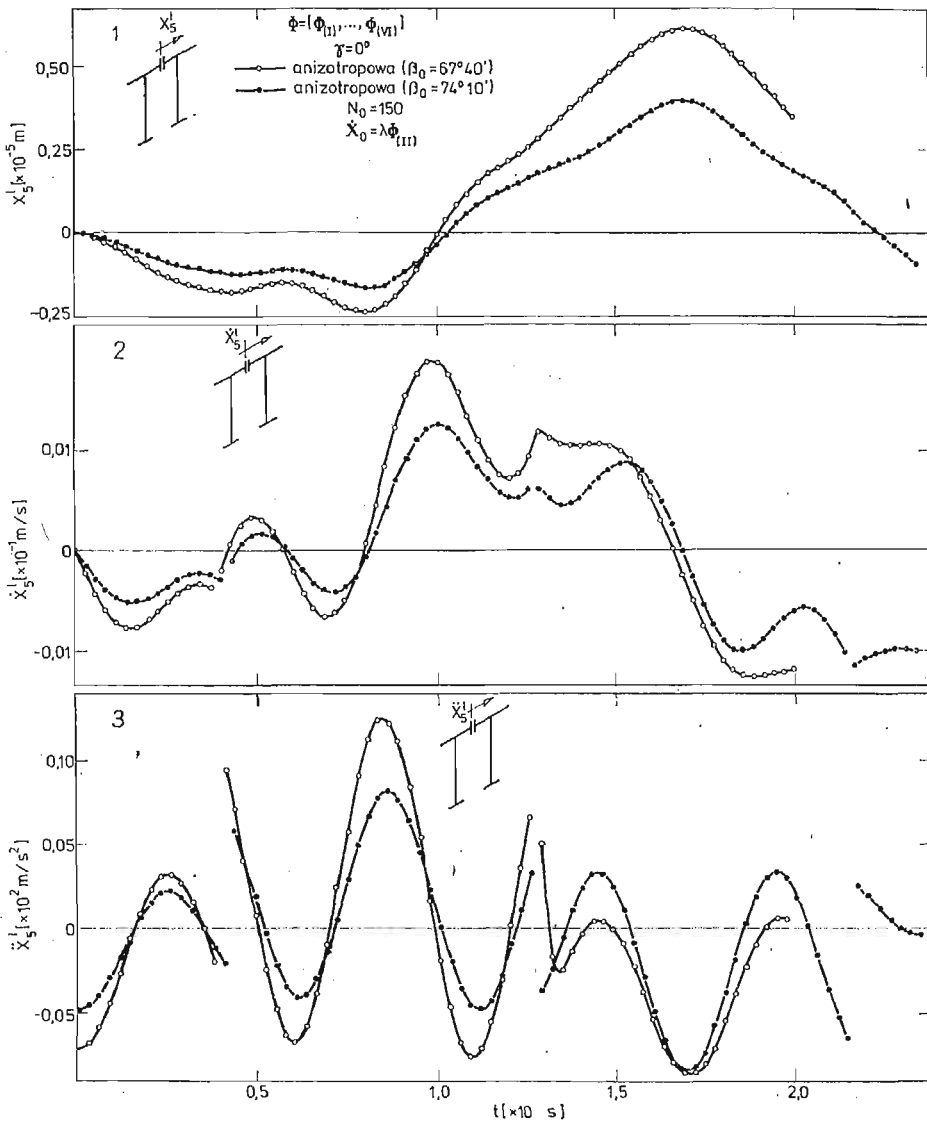
powego, gdy macierz Φ składa się tylko z drugiej formy drgań i gdy jest zbudowana z pierwszych sześciu postaci drgań własnych. Dla tak sformułowanego zagadnienia izotropowe tarcie suche wzbudza dodatkowo te formy drgań, które mają względne translacje w kierunku OY oraz względny obrót. Z pierwszych sześciu wektorów własnych tarcie wzbudza VI formę drgań własnych. Ogólnie, wzbudzone są te formy drgań na których tarcie wykonuje pracę, czyli

$$(9.2) \quad \Phi_{(i)}^T T \neq 0.$$

W następujących zadaniach przyjęto opis układu sześcioma pierwszymi formami drgań.

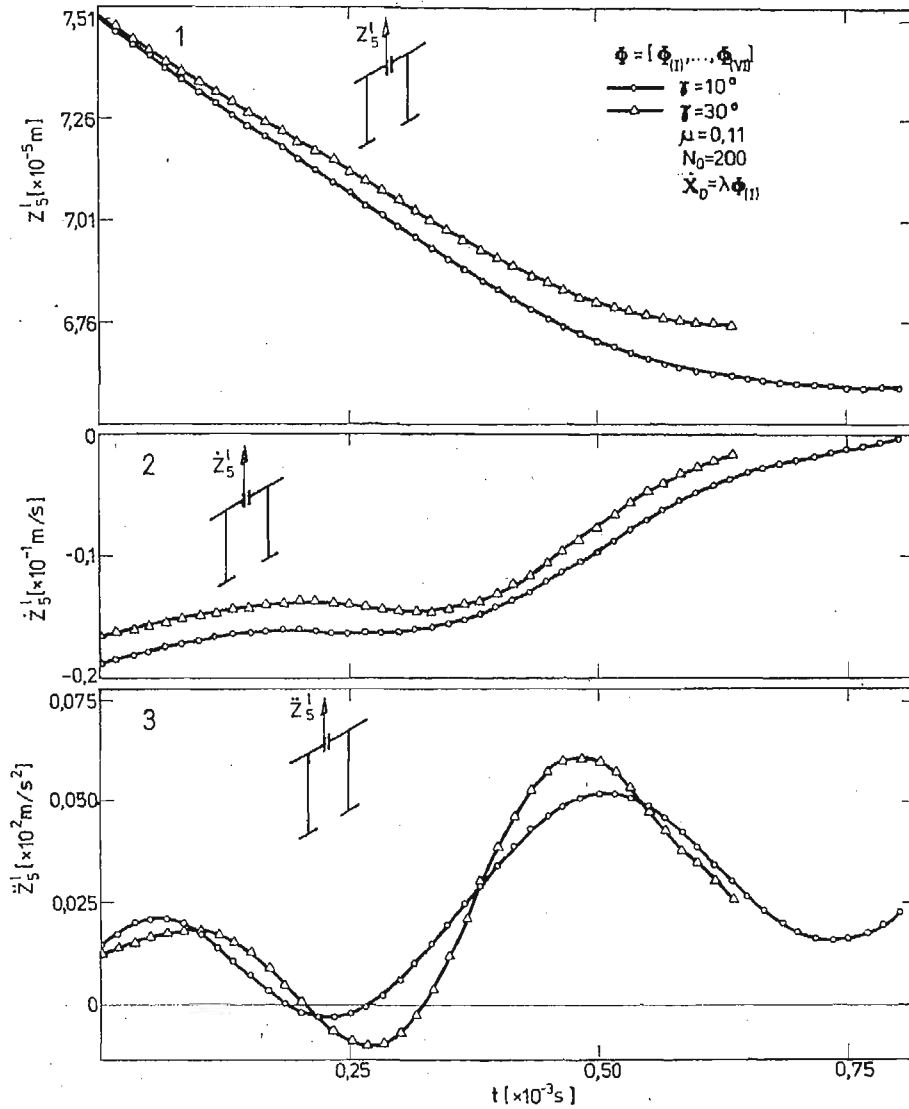


Rys. 10. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY podczas drgań swobodnych ze sprzężeniami poprzez anizotropię tarcia.



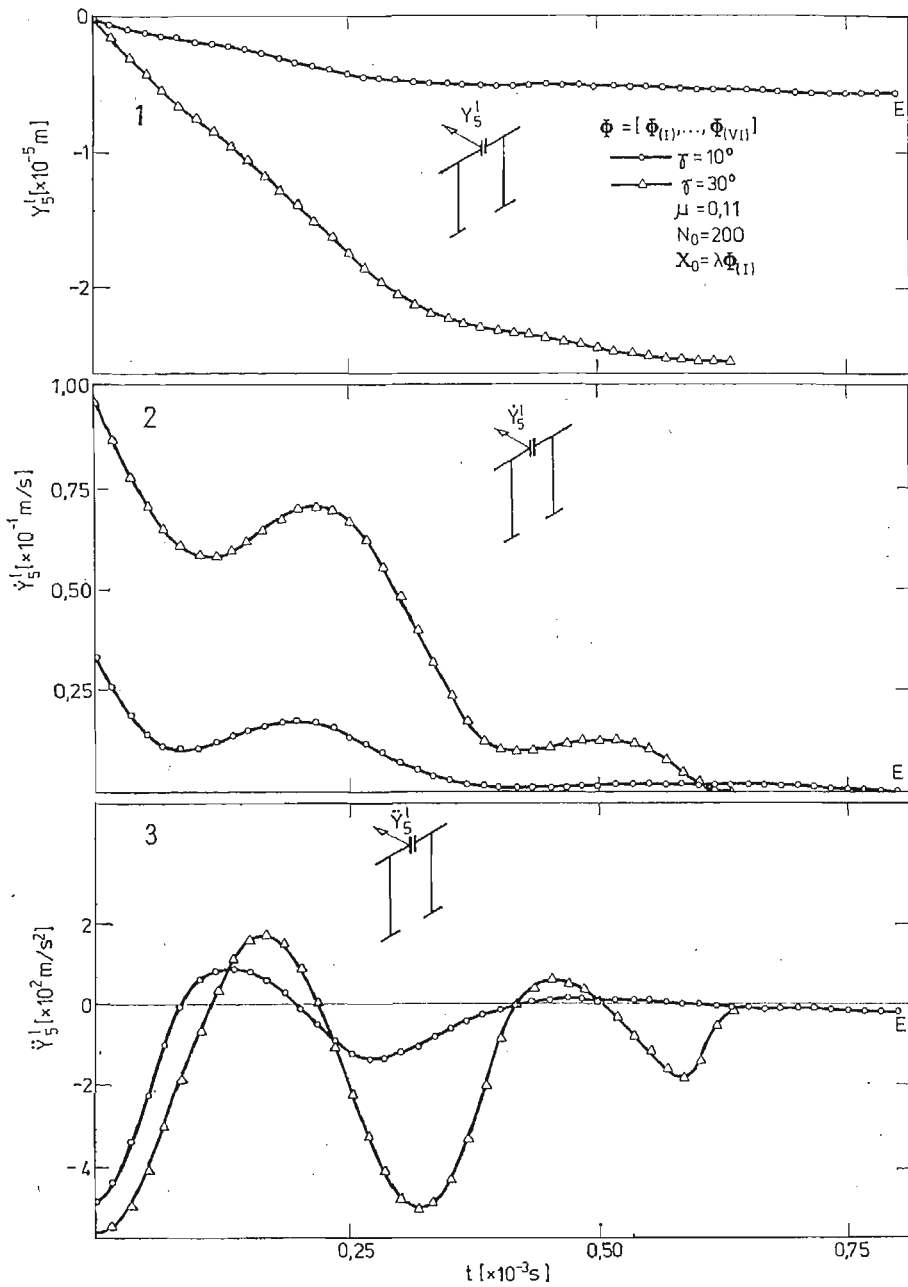
Rys. 11. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OX wywołane sprzężeniami poprzez anizotropię tarcia.

W przypadku drgań z formami bez sprzężeń sprężystych ($\gamma = 0^\circ$) tarcie anizotropowe generowane podczas ruchu z wybraną formą, wzbudza jednocześnie wszystkie formy z względnymi przemieszczeniami. Wynika to z własności wektora tarcia anizotropowego, który zbacza z kierunku wymuszonego ruchu względnego o kąt β . Mówimy wówczas o sprzężeniu drgań poprzez anizotropię tarcia suchego. Własność tę zilustrowano przykła-



Rys. 12. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OZ podczas drgań swobodnych z różnymi sprzężeniami poprzez sprężystość układu ($\gamma \neq 0^\circ$)

dem „czystych drgań” z płaszczyzny tarczy, wywołanych prędkością początkową o rozkładzie zgodnym z II formą drgań (gdy $\gamma = 0^\circ$). Na rysunkach 10 i 11 znajdują się przebiegi drgań tłumionych tarciami izotropowym ($\mu = 0,11$) oraz dwa przypadki tarcia anizotropowego: $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,07$, $\mu_{12} = -0,035$, $\mu_{21} = 0,17$, $\kappa = 0,55$ ($\beta_0 = 67^\circ 40'$) i $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,04$, $\mu_{12} = -0,11$, $\mu_{21} = 0,14$, $\kappa = 0,45$ ($\beta_0 = 74^\circ 10'$), przyjęto $\mu_{ij}^{(L)} =$



Rys. 13. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY dla różnych sprężyn sprężystych ($\gamma \neq 0^\circ$)

Tablica 6

Zmiana kierunku wektora sił tarcia izotropowego podczas drgań swobodnych z III formą gdy $\gamma = 10^\circ$

$$t_0 = 3,659 \times 10^{-4} [\text{s}]; h = 0,002 \frac{\pi}{v_{(III)}}; v_{(III)} = 3623,18 [\text{l/s}];$$

$t = t_0 + nT$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 18$
$T_y [\text{N}]$	14,98	14,97	14,95	14,90	14,56	0,13	-14,08	-14,67	-14,99	-15,00	-15,00	-14,99	-14,99	-14,98
$T_z [\text{N}]$	0,79	0,94	1,20	1,74	3,60	15,00	5,15	3,11	0,48	0,19	-0,04	-0,23	-0,39	-0,75
$W [\text{Nm}]$	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	0,02

Tablica 7

Zmiana kierunku wektora sił tarcia anizotropowego podczas drgań swobodnych z II formą gdy $\gamma = 0^\circ$

$$t_0 = 4,046 \times 10^{-4} [\text{s}]; h = 0,0008 \frac{\pi}{v_{(II)}}; v_{(II)} = 3623,18 [\text{l/s}];$$

$t = t_0 + nT$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
$T_y [\text{N}]$	7,48	7,59	5,77	2,03	-0,40	-1,69	-2,42	-2,90	-3,24	-3,48	-3,67	-3,81
$T_z [\text{N}]$	18,77	15,89	6,71	-4,63	-10,04	-13,09	-14,49	-15,35	-15,91	-16,31	-16,66	-16,84
$W [\text{Nm}]$	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	-0,13	0,13

$= \mu_i^{(p)}$. Rys. 10 przedstawia przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia drgań swobodnych węzła 5 (lewej strony) w kierunku OY . Wzbudzone drgania tego węzła w płaszczyźnie tarczy wskutek działania sił tarcia anizotropowego przedstawia rys. 11. Tarcie izotropowe nie wymusza drgań w płaszczyźnie OXZ .

W przypadku drgań ze sprzężonymi sprężystościami formami ($\gamma \neq 0^\circ$) tarcie (niezależnie od typu) generowane podczas drgań z wybraną formą, wzbudza wszystkie postacie ze względnyimi przemieszczeniami. Zilustrowano to przykładami drgań swobodnych tłumionych tarciami izotropowym $\mu = 0,11$ a wywołanych prędkością początkową o rozkładzie zgodnym z I formą drgań dla $\gamma = 10^\circ$ i $\gamma = 30^\circ$. Na rys. 12 przedstawiono obraz drgań swobodnych węzła 5 (lewa strona) w kierunku OZ a na rys. 13 drgania tego węzła w kierunku OY . W zdaniu tym nie uzyskano zbieżności interakcji wektora tarcia w chwili bliskiej momentowi wygaśnięcia ruchu względnego.

Wektor sił tarcia jest funkcją ciągłą względem czasu wtedy, gdy drgania są sprzężone poprzez sprężystość ($\gamma \neq 0^\circ$) lub poprzez anizotropię tarcia. Wynika to stąd, że składowe wektora prędkości translacji mają miejsca zerowe w różnych chwilach czasu. Jednak w wielu przypadkach zmiana kierunku wektora siły tarcia następuje w bardzo krótkim czasie (mniejszym od przyjętego kroku całkowania równań ruchu). Pokazuje to przykład (tabl. 6) zmiany kierunku wektora tarcia izotropowego ($\mu = 0,1$; $N_0 = 150$ [N]) podczas drgań z III formą drgań własnych (gdy $\gamma = 10^\circ$). Przypadek zmiany kierunku tarcia anizotropowego (dla $\beta_0 = 74^\circ 10'$) podczas drgań według II formy (gdy $\gamma = 0^\circ$), przedstawiono w tabl. 7. W obu przykładach składowe wektora tarcia iterowano z dokładnością $\delta = 2$ [%]. Z ciągłości wektorowej funkcji siły tarcia wynika ciągłość funkcji przyspieszeń. Jednak ze względu na bardzo krótki czas w którym zmienia się kierunek siły tarcia, otrzymany obraz funkcji jest zbliżony do przebiegu typu przeskok. Funkcja prędkości w tym przypadku może mieć gwałtowne ekstremum. W celu zachowania przejrzystego obrazu drgań na rys. 10 i 11 w przypadkach anizotropii nie naniesiono przebiegów funkcji prędkości i przyspieszeń w przedziałach czasowych zmiany kierunku wektora tarcia.

We wszystkich pokazanych przykładach tak dobrano warunki początkowe drgań aby siły tarcia dynamicznego były generowane już od chwili t_0 . Opis drgań kończono z chwilą ustania jednego (rys. 10, 11, 12, 13) lub wszystkich (rys. 6, 7, 9) ruchów względnych w miejscu nieciągłości. Moment ten oznaczono na wykresach literą E .

10. Wnioski

Zasadnicze własności dynamiczne pary łopatek turbinowych z tarciami suchym na powierzchni nieciągłości bandaży można sformułować następująco:

- Pakiet łopatek z nieciągłym bandażem ma dodatkowe stopnie swobody a jego częstotliwości drgań własnych, odpowiadające formom z względnyimi przemieszczeniami, są niższe od częstotliwości drgań układu z monolitycznym bandażem.
- Ukośne usytuowanie łopatek w wieńcu tarczy wirnikowej ($\gamma \neq 0^\circ$) wywołuje efekty sprzężeń drgań z różnych płaszczyzn ruchu (jest to sprzężenie drgań poprzez sprężystość).
- Drgania z postaciami bez względnych przemieszczeń w miejscu nieciągłości nie będą generowały sił tarcia.
- Przez odpowiedni dobór parametrów tarcia można uzyskać powolny wzrost amplitud rezonansowych, dopuszczalny w określonym czasie eksploatacji.

- e) Drgania pakietu z udziałem tarcia suchego są superpozycją ruchów z tymi formami własnymi na których generowana podczas ruchu siła tarcia wykonuje pracę. W zależności od warunków ruchu, typu tarcia oraz sprężystych sprzężeń form drgań, siły tarcia pracują na niektórych lub wszystkich formach z względnymi przemieszczeniami w miejscu styku. We wszystkich rozważanych przykładach ruch form rozpraszających energię ustaje jednocześnie.
- f) W przypadku sprzężenie sprzężonych form drgań ($\gamma \neq 0^\circ$) tarcie izotropowe i anizotropowe generowane podczas „czystych drgań” z wybraną formą, wzbudza wszystkie formy z względnymi przemieszczeniami, niezależnie od tego czy wywołano drgania o dominujących przemieszczeniach w płaszczyźnie tarczy wirnikowej czy z płaszczyzny.
- g) Siły tarcia izotropowego podczas „czystych drgań” z niesprężoną sprzężenie formą ($\gamma = 0^\circ$) wzbudzają tylko te postacie w których względne przemieszczenia występują na kierunkach przemieszczeń wymuszonej formy.
- h) Siły tarcia anizotropowego generowane podczas „czystych drgań” z niesprężonymi formami ($\gamma = 0^\circ$) zbaczają z kierunku wymuszonego ruchu i wzbudzają wszystkie formy z względnymi przemieszczeniami w miejscu nieciągłości (jest to sprzężenie drgań poprzez anizotropię tarcia).

Przedstawiona w pracy metoda analizy dynamicznej umożliwia liczenie układów o wielu stopniach swobody z udziałem sił tarcia na powierzchniach rozdziału. Uwzględniła ona typowe dla opisu tarcia suchego nieliniowości i nieciągłości.

Na zakończenie autor pragnie podziękować Panu mgr M. LIDKE za liczne uwagi i sugestie wykorzystane przy układaniu programów obliczeniowych na EMC.

Literatura cytowana w tekście

1. J. GIERGIEL, *Problemy tarcia konstrukcyjnego w dynamice maszyn*, Zeszyty Naukowe AGH, z. 44, 1971 r.
2. Z. OSIŃSKI, *Rozpraszania energii w nieliniowych układach mechanicznych*, Zag. Drgań Nielin., nr 9, 1968 r. s. 85 - 95
3. Z. OSIŃSKI, *Kierunki rozwojowe badań tłumienia drgań w procesach dynamicznych*, Zag. Drgań Nielin., nr 12, 1971 r., s. 87 - 99
4. Н. Г. Калинин и др., *Конструктивное демпфирование в неподвижных соединениях*, Изд. АНЛСРР, Рига 1960
5. J. MURIN, *Comments on the dynamic and damping properties of a layered system with dry friction*, Zag. Drgań Nielin., nr 14, 1973 r., s. 531 - 545
6. W. BOGUSZ, J. GIERGIEL, *Drgania przypadkowe wymuszone układu mechanicznego z tarciem suchym*, Zag. Drgań Nielin. nr 12, 1971 r., s. 169 - 176
7. Z. OSIŃSKI, K. WIKLIK, *The excited nonlinear vibrations of a system damped by the viscous and structural damping*, Zag. Drgań Nielin., nr 15, 1974 r., s. 381 - 391.
8. A. MUSZYŃSKA, *Wpływ efektu poślizgu w zamkach na tłumienie drgań łopatek maszyn wirnikowych* Prace IPPT, nr 55, 1977 r.
9. S. W. EARLES, E. J. WILLIAMS, *A linearized analysis for frictionally damped systems*, Jour. of Sound and Vibr., 24 (4), 1972 r., s. 445 - 458
10. J. WIĘCKOWSKI, *Dynamika belki warstwowej z tarciem suchym*, Biuletyn Inst. Maszyn Przepl., 21 (698) 1971 r.
11. J. WIĘCKOWSKI, *Sygnatury i analiza numeryczna drgań swobodnych łopatek pryzmatycznej z drutami tłumiącymi*, Biuletyn Inst. Maszyn Przepływ., 97 (763) 1974 r.

12. J. WIĘCKOWSKI, *Tłumienie drgań giętych w przecie przyzmatycznym z profilem odcinka zamocowania typu gwintowego*, Prace Inst. Maszyn Przepl., z. 49, 1970 r., s. 97 - 119
13. I. P. DEN HARTOG, *Drgania mechaniczne*, PWN, Warszawa 1971 r.
14. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1957 r.
15. S. KALISKI, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966 r.
16. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*, PWN, Warszawa 1978 r.
17. А. Ф. ФИЛИПОВ, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Мат. Сборник, Т51 (93), нр. 1, 1960, с. 99—128
18. K. TAUBERT, *Differenzverfahren für Schwingungen mit trockener und zäher Reibung und für Regelungssysteme*, Numer Math., нр 26, 1976 r., s. 379 - 395
19. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of matrix structural analysis*, Mc Graw-Hill, 1968 r.
20. J. SZMELTER i inni, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1973 r.
21. R. E. D. BISHOP i inni, *Macierzowa analiza drgań*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1972 r.
22. J. H. WILKINSON, C. REINSCH, *Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation*, Springer-Verlag, 1971 r.
23. A. ZMITROWICZ, *Tensor tarcia Coulomba*, Mech. Teor. i Stosow., нр 4, 1977 r., s. 517 - 527
24. A. ZMITROWICZ, *Sily tarcia Coulomba podczas wirowania*, Mech. Teor. i Stosow., нр 4, 1972 r. s. 583 - 600
25. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice — Hill Inc., 1976 r.
26. K. MOSZYŃSKI, *Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych na maszynach cyfrowych*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1971 r.
27. N. M. NEWMARK, *A method of computation for structural dynamics*, Proc. ASCE, Jour. Eng. Mech. Div., vol. 85, нр 3, 1959 r., s. 67 - 97
28. A. ZMITROWICZ, *Mechanizmy tarciove w układach lopatkowych maszyn wirnikowych*, Zeszyty Naukowe Inst. Maszyn Przepl., 45 (919) 1978 r.
29. J. THOMAS, H. BELEK, *Free vibration of blade packets*, Jour. Mech. Eng. Scien., vol. 19, нр 1, 1977 r., s. 13 - 21
30. В. В. МАТВЕЕВ и др., *Исследование демпфирующей способности попарно бандажированных турбинных лопаток в зависимости от условий сопряжения их бандажных полок*, Проблемы прочности, нр. 8, 1978, с. 93—97

Резюме

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ КУЛОНА НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЕРЫВНОСТИ

В работе представлен метод расчета колебаний стержневой системы с сухим трением в конструкционной прерывности, рис. 1. При помощи метода конечных элементов стержневую систему описано системой с конечным числом степеней свободы. Общее описание сил сухого трения на поверхности контакта дано при помощи тензора трения Кулона [23, 24]. Принято во внимание поверхностный характер контакта и анизотропию сухого трения.

Динамические свойства стержневой системы исследовано на примере расчета „чистых колебаний” пакета, турбинных лопаток. Показано эффекты возбуждения колебаний силами трения и сопряжения колебаний через упругость системы и анизотропное трение.

Summary

VIBRATION OF A ROD SYSTEM WITH COULOMB FRICTION AT DISCONTINUITY SURFACE

The paper presents a method of vibration analysis of a rod system with dry friction at the construction discontinuity place, fig. 1: The rod system was described as a system of finite degrees of freedom by means of the method of finite elements. General description of dry friction forces at the contact surface

was made by means of Coulomb friction tensor [23, 24]. Friction anisotropy and a real character of contact was taken into consideration.

The motion properties of the rods system were investigated by numerical studying of an example of turbine blades packet „pure vibration”. The effects of friction excited vibration and of vibration coupling resulting from elasticity of the system and/or anisotropic friction, were showed.

PAN
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH
GDAŃSK

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lipca 1979 roku
