

## ROZWIĄZANIE UPROSZCZONYCH RÓWNAŃ STRUMIENIA SWOBODNEGO METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

KRYSTYNA TUSTANOWSKA — KAMROWSKA (POZNAŃ)

### 1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono metodę rozwiązywania uproszczonych równań strumienia swobodnego opisujących wypływ czynnika z rury prostej metoda elementów skończonych. Obliczenia przeprowadzono dla obszaru w odległości  $4 \div 8$  z/d od wylotu rury. Do rozwiązywania otrzymanego z dyskretyzacji metody elementów skończonych układu LN równań algebraicznych nieliniowych opracowano zmodyfikowaną metodę iteracyjną. Otrzymane za pomocą tej metody wyniki porównano z doświadczalnymi.

Ważniejsze oznaczenia:

- $Q$  obszar,
- $G$  brzeg obszaru,
- $x, r, z$  współrzędne,
- $u, v$  funkcje niewiadome,
- $R$  równanie,
- $L$  droga mieszania,
- $E$  element skończony,
- $\Delta$  pole trójkąta,
- $H$  funkcja kształtu,
- $K$  macierz współczynników,

### 2. Postawienie problemu i dyskretyzacja

Rozważmy swobodny wypływ czynnika z rury prostej (rys. 1), opisany w obszarze osiowosymetrycznym  $Q$ , uproszczonym równaniem ruchu strumienia swobodnego

$$(1a) \quad \frac{\partial}{\partial z}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial r}(ruv) = -\frac{\partial}{\partial r}(rL),$$

oraz równaniem ciągłości przepływu

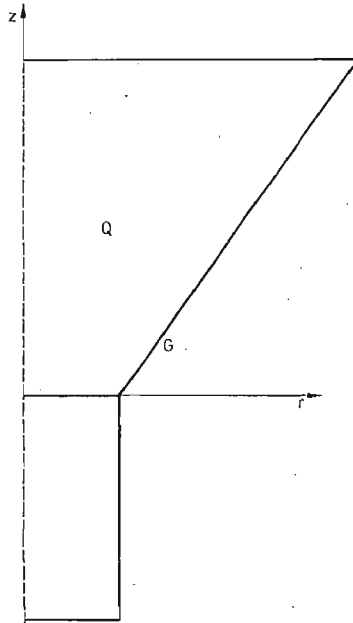
$$(1b) \quad \frac{\partial}{\partial z}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0,$$

gdzie funkcje niewiadome  $u(r, z)$  i  $v(r, z)$  oznaczają odpowiednio prędkości osiową i pro-

mieniową czynnika, oraz na brzegu  $G$  obszaru  $Q$  spełniają warunek brzegowy I-go rodzaju

$$(2) \quad u(r, z) = u_0, \quad v(r, z) = v_0, \quad (r, z) \in G,$$

zaś  $L = L(r, z) \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2$  oznacza drogę mieszania czynnika [1].



Rys. 1,

Ponieważ celem naszym jest rozwiązanie problemu numerycznie, więc musimy go sprowadzić do postaci dyskretnej. Uczynimy to za pomocą metody elementów skończonych (MES).

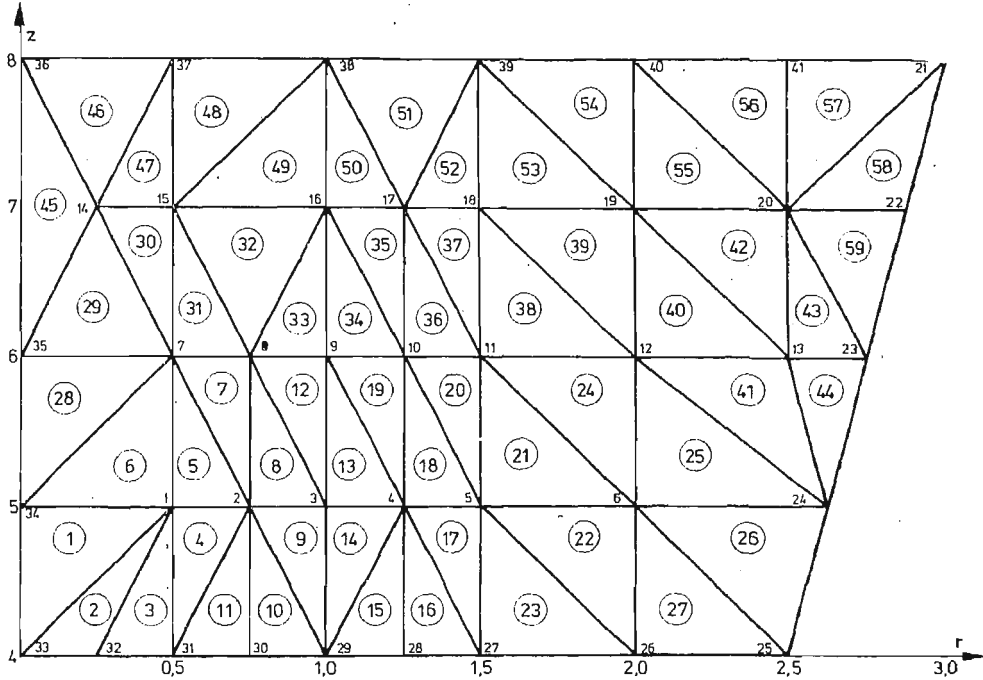
**Dyskretyzacja obszaru:** Nie będziemy rozpatrywać całego obszaru określoności funkcji  $u$  i  $v$  z (1), lecz pewien jego fragment (w dalszym ciągu oznaczony jako  $Q$ ), którego wymiary podane są na rysunku 2, gdzie jednostką jest promień rury.

W obszarze  $Q$  ustalamy  $LWR$ , w naszym przypadku  $LWR = 41$ , dowolnie wybranych punktów (węzły). Jako elementy skończone przyjmujemy trójkąty, które numerujemy od 1 do  $LER = 59$ . Dla każdego z  $LER$  trójkątów wypiszemy, zachowując kierunek lewoskrętny, odpowiadające mu węzły ( $LWE$ ), stanowiące jego wierzchołki (tablica  $WE$ ). Kolejność numerowania węzłów obszaru i elementów oraz ustalenie numeru pierwszego węzła dla każdego elementu w tablicy  $WE$ , zależą od sposobu ułożenia programu.

Zbiór wszystkich utworzonych wyżej trójkątów, który oznaczymy przez  $\bar{Q}$ , stanowi model dyskretnej obszaru  $Q$  (rys. 2).

**Dyskretyzacja funkcji:** Zbudowaliśmy model dyskretny  $\bar{Q}$  obszaru  $Q$  określoności funkcji  $u(r, z)$  i  $v(r, z)$ . Przystępujemy teraz do budowy funkcji  $\bar{u}(r, z)$  i  $\bar{v}(r, z)$ , dla których obszarem określoności będzie  $Q$ . Ponieważ, w naszym przypadku, dyskretyzacja tak funkcji  $u(r, z)$  jak i  $v(r, z)$  będzie przebiegała analogicznie, więc w celu ograniczenia liczby wzorów (podwójnie) przeprowadzimy ją tylko dla funkcji  $u(r, z)$ .

W wybranych *LWR* węzłach obszaru  $\bar{Q}$ , wartości funkcji  $u(r, z)$  oznaczymy przez  $U^i$ ,  $i = 1, \dots, LWR$ . Rozpatrzmy teraz dowolny element skończony. Będziemy uważali go za obszar określoności pewnej funkcji lokalnej, oznaczonej przez  $u^{(e)}(r, z)$ , tego typu co



Rys. 2,

$u(r, z)$ . Funkcję lokalną aproksymuje się na odpowiadającym jej elemencie funkcjami ciągłymi, postaci

$$(3) \quad u^{(e)}(r, z) = H_1^{(e)}(r, z)u_1^{(e)} + \dots + H_{LWE}^{(e)}(r, z)u_{LWE}^{(e)},$$

gdzie  $u_n^{(e)}$  są wartościami funkcji  $u^{(e)}(r, z)$  w węzłach elementu, zaś funkcje  $H_n^{(e)}(r, z)$ ,  $n = 1, \dots, LWE$ , dla elementu trójkątnego mają postać [2, 9]

$$(4) \quad H_n^{(e)}(r, z) = (a_n + b_n + c_n z) / 2\Delta, \quad n = i, j, k.$$

Stałe  $a, b, c$  zależą tylko od współrzędnych węzłów elementu [9],  $\Delta$  jest polem trójkąta  $E_e$ , zaś  $i, j, k$  oznaczają kolejne numery jego wierzchołków. W tym przypadku funkcja  $u^{(e)}(r, z)$ , zgodnie z (3) i (4), w każdym elemencie  $E_e$ , będzie następująca

$$(5) \quad u^{(e)}(r, z) = \frac{1}{2\Delta} [r z] \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^i \\ U^j \\ U^k \end{Bmatrix} = [H^e] \{U^e\}.$$

Ostateczny model dyskretny funkcji  $u(r, z)$  w obszarze  $\bar{Q}$  otrzymamy po zastosowaniu typowego dla *MES* zbierania po elementach [2, 4, 9]

$$(6) \quad u(r, z) \cong \bar{u}(r, z) = \sum_{e=1}^{LER} u^{(e)}(r, z) = \sum_{e=1}^{LER} H^{(e)}(r, z)u_n^{(e)} = [H]\{U\},$$

gdzie  $H(r, z)$  oznacza globalną aproksymację funkcji  $u(r, z)$  w  $\bar{Q}$ , a  $\{U\}$  jest wektorem wartości tej funkcji w  $LWR$  węzłach obszaru  $\bar{Q}$ .

Dyskretyzacja równań. Niech, zgodnie z (5)

$$(7) \quad u^{(e)}(r, z) = [H^e]\{U\}^e, \quad v^{(e)}(r, z) = [H^e]\{V\}^e$$

będzie aproksymacją dla  $u$  i  $v$  w typowym elemencie trójkątnym  $E_e$ . Ponieważ (7) jest tylko przybliżeniem funkcji  $u(r, z)$  i  $v(r, z)$  w każdym elemencie skończonym, więc błędy

$$(8) \quad R_1^{(e)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)2}) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ ru^{(e)}v^{(e)} + rL \left( \frac{\partial}{\partial r} u^{(e)} \right)^2 \right] = 0,$$

$$R_2^{(e)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)}) + \frac{\partial}{\partial r}(rv^{(e)}) = 0,$$

nie będą tożsamościowo równe zero. Możemy je zminimalizować w każdym elemencie metodą Galerkiną [2, 4, 8, 9], dla której funkcje wagowe są równe  $H^{(e)}$ , oraz

$$(9) \quad \int_{E_e} H^{(e)}(r, z) R_i^{(e)}(r, z) dE_e = 0, \quad i = 1, 2.$$

Dla naszych równań warunków (9), po uwzględnieniu (8), przyjmie postać

$$(10) \quad \int_{E_e} H^{(e)} \left[ \frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)2}) + \frac{\partial}{\partial r} \left( ru^{(e)}v^{(e)} + rL \left( \frac{\partial}{\partial r} u^{(e)} \right)^2 \right) \right] dE_e = 0,$$

$$\int_{E_e} H^{(e)} \left[ \frac{\partial}{\partial z}(ru^{(e)}) + \frac{\partial}{\partial r}(rv^{(e)}) \right] dE_e = 0.$$

W tym miejscu zazwyczaj w celu obniżenia rzędu równania, lub wydzielenia z równania tych jego części, które działają tylko na brzegu obszaru (umożliwia to wprowadzenie warunków brzegowych II-go i III-go rodzaju, o ile takie są dane), stosujemy do niego wzór Greena [2, 3].

W naszym przypadku wzór ten zastosujemy do pierwszego z równań (10). W tym celu musimy je przekształcić do odpowiedniej postaci. Wtedy, zapisując układ (10) już dla całego elementu  $E_e$ , mamy

$$(11) \quad \int_{E_e} [H_z]^T r [H]\{U\} [H]\{U\} + [H_r]^T r [H]\{U\} [H]\{V\} +$$

$$+ [H_r]^T r L [H_r]\{U\} [H_r]\{U\} dr dz =$$

$$= \int_{G_e} [H]^T r \left( \bar{u}^2 \cos g + \left( \bar{u}\bar{v} + L \left( \frac{\partial}{\partial r} \bar{u} \right)^2 \right) \sin g \right) dS = 0,$$

$$\int_{E_e} ([H]^T r ([H_z]\{U\} + [H_r]\{V\}) + [H]^T [H]\{V\}) dr dz = 0,$$

gdzie  $H_r = \partial H / \partial r$ ,  $H_z = \partial H / \partial z$ ,  $G_e$  jest brzegiem elementu  $E_e$ , zaś  $g$  kątem normalnej zewnętrznej do brzegu trójkąta.

Nie użyliśmy w (11) symbolu  $(e)$ , aby nie zaciemniać zapisu. Należy jednak pamiętać, że wszystkie występujące tam wielkości odnoszą się do elementu  $E_e$ .

Całka po  $G_e$ , występująca w (11), jest równa zeru na wszystkich brzegach wewnętrznych obszaru  $\bar{Q}$  [8], natomiast na brzegach elementów pokrywających się z  $G$ , nie będziemy z niej korzystać, gdyż mamy dany warunek I-go rodzaju.

Jeżeli teraz do  $r$ ,  $z$  i  $L$  zastosujemy aproksymację tego samego typu co dla funkcji niewiadomych, określoną wzorami (7), to wykorzystując wzór [9]

$$(12) \quad \int_{E_e} H_i^\alpha H_j^\beta H_k^\gamma dr dz = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2\Delta,$$

będziemy mogli z łatwością policzyć całki występujące w (11). I tak

$$\int_{E_e} [H]^T [H] dr dz = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{12} [B],$$

$$\int_{E_e} [H]\{r\}[H]\{U\}[H] dr dz = \frac{\Delta}{60} \{U\}^T \begin{bmatrix} (622) & (221) & (212) \\ (221) & (262) & (122) \\ (212) & (122) & (226) \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{60} \{U\}^T [A],$$

$$(13) \quad \int_{E_e} [H]\{r\}[H] dr dz = \frac{\Delta}{12} \{r\}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{12} \{r\}^T [B],$$

gdzie  $(pqs) = pr_i + qr_j + sr_k$ . Oznaczając

$$(14) \quad [H_r] = \frac{1}{2\Delta} [b_i b_j b_k] = \frac{1}{2\Delta} [b],$$

$$[H_z] = \frac{1}{2\Delta} [c_i c_j c_k] = \frac{1}{2\Delta} [c],$$

otrzymamy z (11) układ sześciu równań algebraicznych, dla każdego z  $LER$  trójkątów  $E_e$ .

$$(15) \quad [c]^T \{U\}^T [A] \{U\} + [b]^T \{U\}^T [A] \{V\} + [b]^T \{r\}^T [B] \{L\} [b] \{U\} [b] \{U\} = 0,$$

$$[B] \{r\} [c] \{U\} + 2\Delta [B] \{V\} + [B] \{r\} [b] \{V\} = 0,$$

który zapisany bardziej przejrzyście jest postaci

$$(16) \quad M_1^{(e)}(u, v) = \begin{cases} c_i [A] uu + b_i [A] uv + b_i [k] uu \\ c_j [A] uu + b_j [A] uv + b_j [k] uu \\ c_k [A] uu + b_k [A] uv + b_k [k] uu \end{cases} = 0,$$

$$M_2^{(e)}(u, v) = [k3] \{U\} + [k4] \{V\},$$

gdzie

$$(17) \quad [k] = [b]^T \{r\}^T [B] \{L\} [b],$$

$$[k3] = [B] \{r\} [c],$$

$$[k4] = 2\Delta [B] + [B] \{r\} [b].$$

$M_1^{(e)}$  i  $M_2^{(e)}$  są modelami dyskretnymi równań (1) w elemencie  $E_e$ , a zapis symboliczny  $[A]uv$  należy rozumieć jako  $\{U\}^T [A] \{U\}$ , oraz wszystkie wielkości występujące w (16) odnoszą się do  $E_e$ . Model globalny równań (1) otrzymamy po złożeniu równań (16) dla całego obszaru  $\bar{Q}$ . Powstanie w ten sposób  $LWR$  równań typu

$$(18a) \quad [K1]UU + [K2]UV = 0,$$

oraz  $LWR$  równań liniowych

$$(18b) \quad [K3]\{U\} + [K4]\{V\} = 0.$$

Niech teraz  $LN = LWR - LWD$  będzie ogólną liczbą węzłów obszaru  $Q$ , w których poszukujemy wartości funkcji  $\bar{u}(r, z)$  i  $\bar{v}(r, z)$ .  $LWD$  oznacza liczbę tych węzłów obszaru  $Q$ , w których znamy wartości funkcji  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  (warunki (2)).

Oczywiście, liczba punktów brzegowych, dla których znamy wartości funkcji nie musi być taka sama dla  $u$  i  $v$ . W naszym przypadku przyjmiemy jednak, że one są równe, co nie zawęży dalszych rozważań.

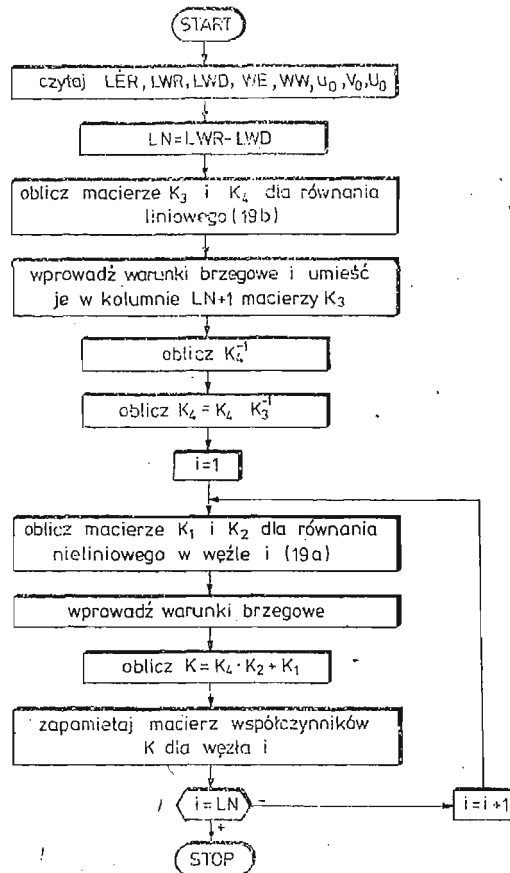
Po wprowadzeniu warunków (2) do układu (18), otrzymamy  $2 \times LN$  równań

$$(19) \quad \begin{aligned} [K1]UU + [K2]UV &= 0, \\ [K3]\{U\} + [K4]\{V\} &= \{F\} \end{aligned}$$

Teraz  $U = [U^1, \dots, U^{LN}, 1]$ , a macierze  $[K1]$  i  $[K2]$  są rozmiaru  $(LN+1) \times (LN+1)$ .

Wykorzystując fakt, że macierz  $[K4]$  jest nieosobliwa ((17)), możemy z drugiej części układu (19) wyznaczyć wektor  $\{V\}$

$$(20) \quad \{V\} = [K4]^{-1}(\{F\} - [K3]\{U\}),$$



Rys. 3 Schemat blokowy.

a wstawiając go do części pierwszej układu (19), otrzymamy  $LN$  równań nieliniowych, każde postaci

$$(21) \quad [K]UU = 0,$$

o niewiadomych  $U^i$ ,  $i = 1, \dots, LN$ .

Oczywiście macierz  $[K]$  można zawsze przedstawić jako macierz symetryczną.

Schemat blokowy programu realizującego opisaną dyskretyzację, którego wynikiem jest układ równań (21), pokazano na rysunku 3. Czas jego realizacji na mc Odra 1204 wynosi, dla naszego zadania, 224 s.

### 3. Rozwiązanie

Układ równań (21) próbowano rozwiązać wieloma metodami (Newtona-Raphsona (NR) [5], gradientów sprzężonych (GW) [4], linearyzacji Steffensena (ST) [6], iteracji prostej (IT) [4], i inne). Każda z tych metod wymaga jednak dosyć dobrej znajomości przybliżonych wartości rozwiązania, co nie zawsze jest łatwe, a w większości przypadków wręcz niemożliwe. Podjęto więc próbę opracowania takiej metody (lub zmodyfikowania jednej ze znanych metod), która nie zależałaby od punktu startowego.

Ponieważ układ (21) można z łatwością zapisać w postaci

$$(22) \quad a^n U^n U^n + 2b^n U^n + c^n = 0, \quad n = 1, \dots, LN,$$

gdzie

$$(23) \quad \begin{aligned} a^n &= K_{nn}^n, & b^n &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{LN+1} K_{in}^n U^i, \\ c^n &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{LN+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{LN+1} K_{ij}^n U^i U^j, & U^{LN+1} &= 1, \end{aligned}$$

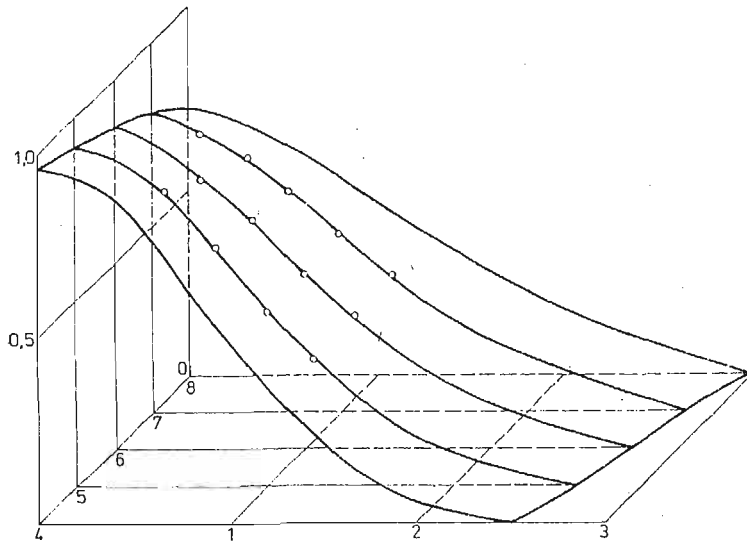
więc niewiadomą  $U^n$  można prosto wyznaczyć z  $n$ -tego równania

$$(24) \quad U^n = \frac{-b^n \pm \sqrt{b^n b^n - a^n c^n}}{a^n}.$$

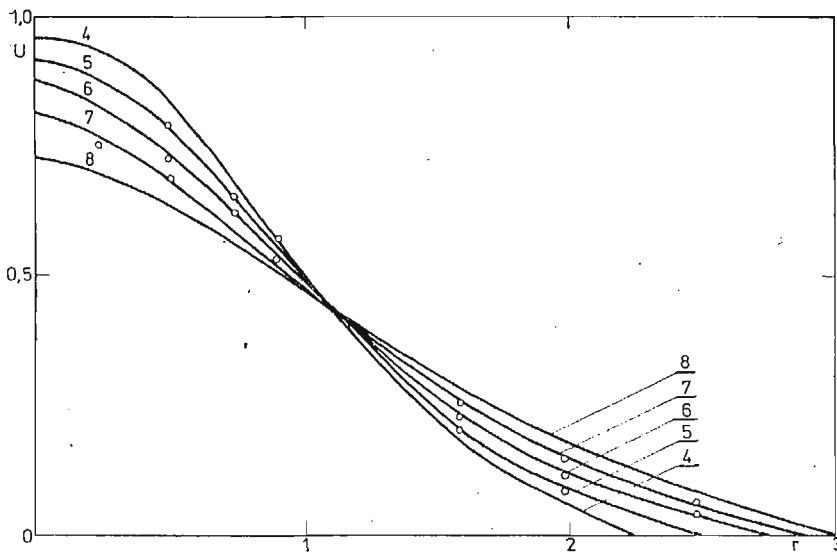
Pozostaje tylko problem, który ze znaków (+ czy -) przyjąć dla każdej z niewiadomych  $U$ . Okazuje się, że znak ten nie jest stały w każdej iteracji, lecz może ulegać zmianie. Jego dobór można ustalić automatycznie w programie, po wprowadzeniu pewnych warunków dodatkowych.

Bodaj najważniejszym z nich jest założenie o zbieżności metody. Oznacza to, że mając dla każdej z niewiadomych, w każdej iteracji po dwa pierwiastki, dobieramy ten z nich, dla którego różnica z rozwiązaniem dotychczasowym jest mniejsza.

W ten sposób otrzymane wyniki porównano z doświadczalnymi. Wynik pokazano na rysunku 4 i 5, gdzie punkty oznaczają wartości obliczone. Rysunki 6 - 10 przedstawiają zachowanie się rozwiązania naszego zadania w dwudziestu pierwszych iteracjach (it). Punktem wyjściowym był punkt zerowy, tzn. na początku wszystkie  $U^i = 0$ ,  $i = 1, \dots, LN$ .



Rys. 4.



Rys. 5.

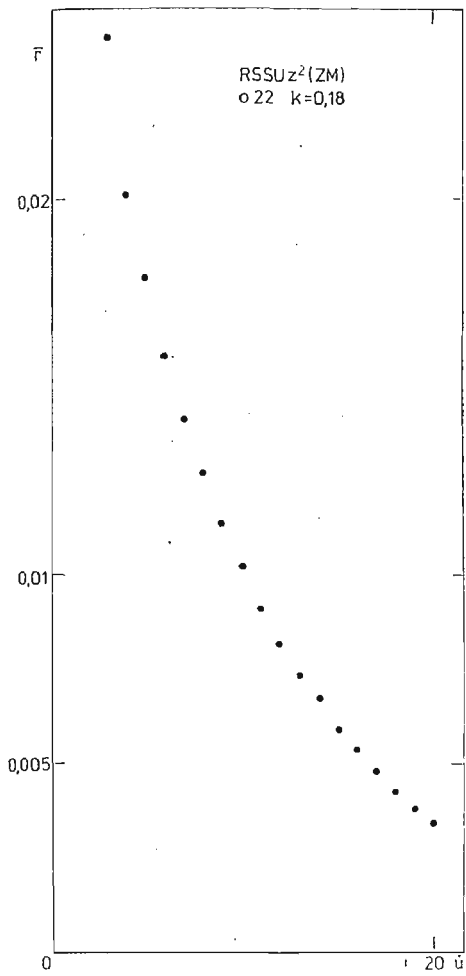
Rysunek 6 przedstawia średnią kwadratową wartość z funkcji układu (21). Jeżeli nasze równanie zapiszemy w postaci

$$f_i(U) = 0, \quad i = 1, \dots, LN,$$

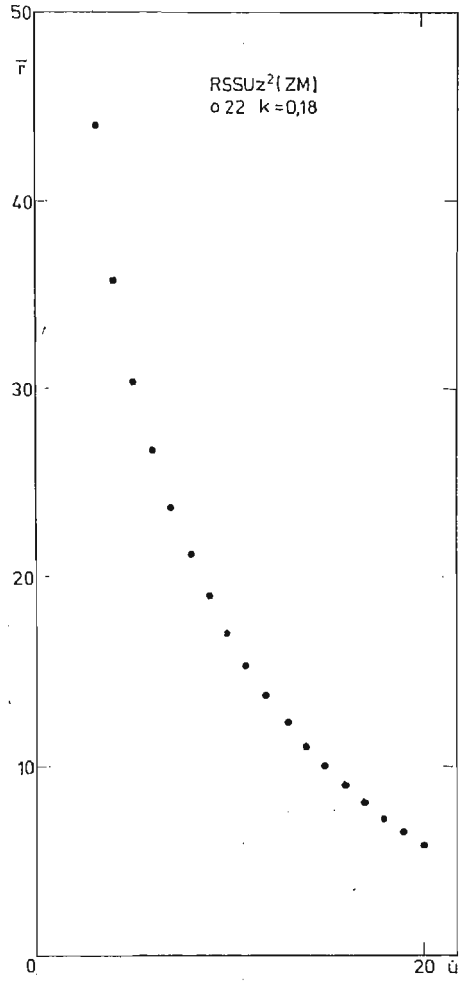
to

$$F_u = \sqrt{\frac{LN}{\sum_{i=1}^{LN} f_i^2(u_{it}) / LN}}.$$

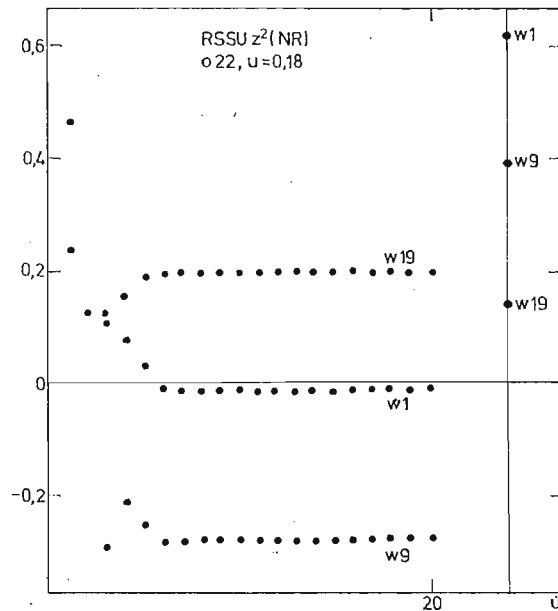


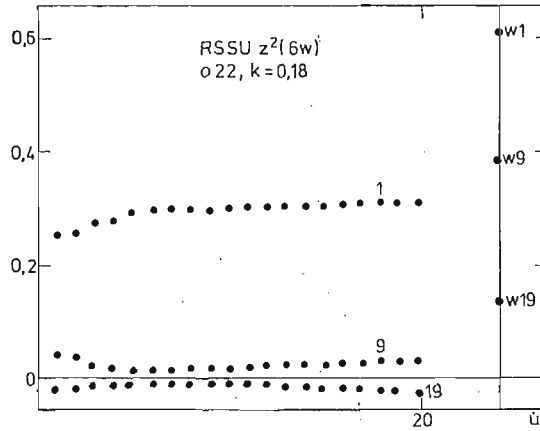


Rys. 6.

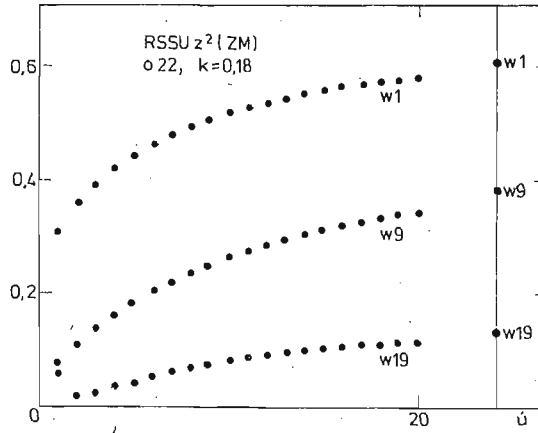


Rys. 7.





Rys. 9.



Rys. 10.

Na rysunku 7 pokazano odpowiednio błąd średni

$$r_{it} = \sqrt{\frac{LN}{\sum_{l=n}^{LN} (U_{it-1}^l - U_{it}^l)^2 / LN}},$$

kolejnych przybliżeń pierwiastków. Natomiast rysunki 8, 9, 10 przedstawiają zachowanie się trzech dowolnie wybranych pierwiastków układu (21) dla trzech metod (NR, GW, ZM).

#### 4. Podsumowanie

Przedstawiona wyżej, na przykładzie, metoda rozwiązywania równań różniczkowych, może być wykorzystana również w większości nieliniowych problemów pola.

Wybór kształtu elementu oraz funkcji aproksymującej jest dowolny i zależy od potrzeb i wykonawcy. Konkretna jego postać jest ważna dopiero po przystąpieniu do całkowania równań (11).

Kształt układu (21) zależy tylko od charakteru równań wyjściowych (1), a ściśle od stopnia występujących w nich funkcji niewiadomych.

Wprowadzenie warunków brzegowych II-go i III-go rodzaju również nie nastęrcza formalnie większych problemów. Bardziej pracochłonne będzie jedynie wtedy ułożenie programu.

Zmodyfikowana metoda iteracyjna (ZM) może służyć do rozwiązywania nie tylko równań kwadratowych, lecz ogólnie do równań typu wielomianowego. Najefektywniej jednak można ją wykorzystać w celu ustalania przybliżenia początkowego, na tyle dokładnego, aby można było stosować inne szybsze metody rozwiązywania równań nieliniowych, np. metodę Newtona-Raphsona.

#### Literatura cytowana w tekście

1. L. BOGUSŁAWSKI, Cz. O. POPIEL, E. DUBANIEWICZ, K. TUSTANOWSKA, *Konwekcyjna wymiana ciepła i masy w przepływach turbulentnych*, Opracowanie wewnętrzne, Poznań 1977.
2. J. DESCOLOUX, *Metoda elementów skończonych*, Mir, Moskwa 1976.
3. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1975.
4. J. T. ODEN, *Koniecznyje elementy w nieliniowej mechanice splosznych sred*, Mir, Moskwa 1976.
5. J. M. ORTEGA, W. G. RHUMBOLAT, *Iteracyjnyje metody rieszenia nieliniowych sistem urawnienij so mnogimi niezwiestnymi*, Moskwa 1975.
6. W. PANKIEWICZ, *Utoczenie rieszenij sistem nielintejnych algiebraicznych i transciendentnych urawnienij pobszeziennym metodom Steffensena*, Algorytmy i Algoritmicheskie Jazyki, 4/1969.
7. K. TUSTANOWSKA, M. CIAŁKOWSKI, R. PIĄTKOWSKI, *Metoda elementów skończonych dla liniowych problemów pola*, I Wydziałowa Sesja Naukowa, Poznań 1977.
8. B. WOSIEWICZ, *Model mieszany metody elementów skończonych dla filtracji ustalonej*, Archiwum Hydrotechniki, 2/1975.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

#### Резюме

#### РЕШЕНИЕ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СВОБОДНОЙ СТРУИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье представлено метод решения упрощенных уравнений свободной струи изобраающих вытекание потока с прямой трубы методом конечных элементов (МКЭ). Исчисления сделано для области в расстояний  $4 \div 8 z/d$  от выхода трубы. Для решения полученного из дискретизации МКЭ системы ЛН алгебраических нелинейных уравнений разработано модифицированный итерационный метод.

Получены при помощи этого метода результаты сравнено с экспериментальными.

#### Summary

#### THE NUMERICAL SOLUTION OF A SIMPLIFIED FREE ROUND JET EQUATIONS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

A method of numerical solution is presented of simplified equations of free round jet flowing from a straight pipe using the finite element method (FEM). The solution is-given for the region  $4 \div 8 z/d$  from the pipe outlet.

A modified iteration method is proposed to solve LN algebraic nonlinear equations system obtained from FEM discretization.

The results is compared with the experimental data.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ  
I SILNIKÓW SPALINOWYCH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1979 roku*

---