MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 18 (1980)

PŁASKIE FALE HARMONICZNE I DYFUZJA W CIELE STAŁYM

JAROSŁAW STEFANIAK, JANUSZ JANKOWSKI (POZNAŃ)

1. Sformułowanie zagadnienia

Punktem wyjścia rozważań są równania różniczkowe dla termodyfuzji podane przez S. PODSTRIGAČA i W. NOWACKIEGO [1]. Przy zaniedbaniu wpływu temperatury można je zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
&c_{,ll}-\frac{1}{D}c_{,t} = ku_{j,jll}-\frac{\sigma}{D}(x,t), \\
&\mu u_{j,ll}+(\mu+\lambda)u_{l,lj} = \varrho u_{j,tt}+\gamma_c c_{,j}-X(x,t),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

gdzie

$j, l = 1, 2, 3$; $x \in R^3$; $t \in (0, \infty)$

$\mu, \lambda, \varrho, \gamma_c, D, k$ — stałe materiałowe

c — koncentracja, u_j — przemieszczenie

σ — źródło dyfuzji, X_j — siły masowe.

Przyjęto jednorodne warunki początkowe

$$c(x, 0) = 0; \quad u_j(x, 0) = 0; \quad u_{j,t}(x, 0) = 0, \tag{1.2}$$

oraz warunki znikania w nieskończoności

$$\lim_{|x|\to\infty} c(x, t) = 0; \quad \lim_{|x|\to\infty} u_j(x, t) = 0. \tag{1.3}$$

Założono, że w chwili $t = 0$ zaczynają działać w płaszczyźnie $x_1 = 0$: źródło dyfuzji i źródło dylatacji [2]

$$
\begin{aligned}
\sigma &= Dc_0\,\delta(x_1)\eta(t), \\
X_j &= -P_1\,\delta'(x_1)e^{i\omega t}\eta(t)\,\delta_{1j},
\end{aligned}
$$

gdzie δ_{jl} — symbol Kroneckera, $\delta(x_1)$ — funkcja Diraca,
$\eta(t)$ — funkcja Heaviside'a.

Zgodnie z [3], tak postawione zagadnienie posiada dokładnie jedno rozwiązanie w przestrzeniach Sobolewa: $H^{2,1}$ dla koncentracji, H^2 dla przemieszczenia.

2. Transformaty Laplace'a rozwiązań

Stosując transformatę Laplace'a [4] do układu równań (1.1) - (1.4) otrzymano

$$\bar{c}_{,ll}-\frac{s}{D}\bar{c} = k\bar{u}_{j,jll}-\frac{c_0}{s}\delta(x_1), \tag{2.1}$$

(2.1) [cd.]
$$\mu\bar{u}_{j,ii}+(\lambda+\mu)\bar{u}_{i,ij} = \varrho s^2 u_j+\gamma_c\bar{c}_{,j}+P_1\,\delta'(x_1)\frac{\delta_{1j}}{s-i\omega},$$

gdzie $\bar{f}(s)$ oznacza transformatę Laplace'a dla funkcji $f(t)$, s jest parametrem transformacji. Oznaczając

(2.2)
$$c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho};\qquad \gamma = \frac{\gamma_c}{\lambda+2\mu};\qquad P = \frac{P_1}{\lambda+2\mu},$$

dla $\gamma k \neq 1$ rozwiązanie układu (2.1) ma postać

(2.3)
$$\bar{c}(x_1, s) = \frac{Pk}{1-\gamma_k}\frac{\delta(x_1)}{s-i\omega} - \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left\{\left[\frac{Pk}{s-i\omega}\alpha_1^4+\frac{c_0}{s}\left(\alpha_1^2+\frac{s^2}{c_1^2}\right)\right]\frac{e^{i\alpha_1|x_1|}}{i\alpha_1}\right.,$$
$$\left.-\left[\frac{Pk}{s-i\omega}\alpha_2^4+\frac{c_0}{s}\left(\alpha_2^2+\frac{s^2}{c_1^2}\right)\right]\frac{e^{i\alpha_2|x_1|}}{i\alpha_2}\right\},$$
$$\bar{u}_j(x_1, s) = \frac{\operatorname{sgn} x_1}{2\sqrt{\Delta}}\left\{\left[P\frac{\alpha_1^2+\frac{s}{D}}{s-i\omega}+\frac{\gamma c_0}{s}\right]e^{i\alpha_1|x_1|}+\right.$$
$$\left.-\left[P\frac{\alpha_2^2+\frac{s}{D}}{s-i\omega}+\frac{\gamma c_0}{s}\right]e^{i\alpha_2|x_1|}\right\}\delta_{1j},$$

gdzie

(2.4)
$$\sqrt{\Delta} = \frac{s}{c_1^2}\sqrt{s-s_1}\sqrt{s-s_2},$$
$$s_{1,2} = \frac{c_1^2}{D}[1-2\gamma k\pm 2\sqrt{\gamma k(\gamma k-1)}],$$
$$\arg\sqrt{s-s_n} = 0,\quad \text{gdy}\quad \operatorname{Re}(s-s_n) > 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(s-s_n) = 0,$$

(2.5)
$$\alpha_{1,2}^2 = -\frac{1}{2(1-\gamma k)}\left(\frac{s^2}{c_1^2}+\frac{s}{D}\mp\sqrt{\Delta}\right).$$

Osobno należy rozważyć przypadek $\gamma k = 1$

(2.6)
$$\bar{c}_1(x_1, s) = -\frac{Dc_1^2}{Ds+c_1^2}\left\{\frac{Pk}{s-i\omega}\frac{\delta''(x_1)}{s}+\left[\frac{s}{Ds+c_1^2}\frac{Pk}{s-i\omega}-\frac{c_0}{s^2}\right]\delta(x_1)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{s^3}{Ds+c_1^2}\frac{Pk}{s-i\omega}+\frac{Dc_0 s}{c_1^2}\right]\frac{e^{i\alpha_0|x_1|}}{2i\alpha_0(Ds+c_1^2)}\right\},$$
$${}_1\bar{u}_j(x_1, s) = \frac{c_1^2\delta_{1j}}{Ds+c_1^2}\left[\frac{PD}{s-i\omega}\frac{\delta'(x_1)}{s}+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{s-i\omega}\frac{c_1^2}{D(Ds+c_1^2)}+\frac{\gamma Dc_0}{s^2}\right)\operatorname{sgn} x_1\, e^{i\alpha_0|x_1|}\right\},$$

gdzie

(2.7)
$$\alpha_0^2 = -\frac{s^2}{Ds+c_1^2}.$$

Ponadto, zgodnie z warunkami (2.4), wybiera się na α_m, $m = 1, 2, 0$, te jednoznaczne gałęzi pierwiastków $\sqrt{\alpha_m^2}$, dla których. Im $\alpha_m > 0$.

Łatwo zauważyć, że przypadki szczególne $\gamma = 0$ lub $k = 0$ dają rozwiązania ścisłe, znane w teoriach niesprzężonych.

3. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia

Ponieważ wartości współczynników γ i k nie są stablicowane w dostępnej literaturze, należy rozważyć, z uwagi na (2.4), następujące przypadki: a) $\gamma k > 1$ b) $\gamma k = 0$, c) $\gamma k < 1$, $\gamma k > 0$

Wzory (2.3) oraz (2.6) dadzą się przedstawić w następującej, równoważnej postaci

$$\begin{aligned}
\bar{c}(x_1, s) &= \frac{Pk}{s-i\omega}\left[\frac{\delta(x_1)}{1-\gamma k}+\frac{i}{2}A_1(x_1, i\omega))\right]+\frac{\bar{\psi}_1(x_1, s)}{\sqrt{s-s_1}},\\
\bar{u}_j(x_1, s) &= \left[\frac{P}{2}\,\frac{A_2(x_1, i\omega)}{s-i\omega}+\frac{1}{\sqrt{s-s_1}}\bar{\psi}_2(x_1, s)\right]\delta_{1j},
\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1(x_1, s) &= -Dc_1^2\left\{\frac{Pk}{s-i\omega}\,\frac{\delta''(x_1)}{s(Ds+c_1^2)}+\left[\frac{Pks}{s-i\omega}-\frac{c_0}{s^2}(Ds+c_1^2)\right]\frac{\delta(x_1)}{(Ds+c_1^2)^2}\right\}+\\
&\quad -\frac{1}{s-i\omega}A_3(x_1, i\omega)+\frac{1}{\left(s+\frac{c_1^2}{D}\right)^{3/2}}\bar{\psi}_3(x_1, s)\frac{\sqrt{D}\,c_0}{2}\,\frac{e^{i\alpha_0|x_1|}}{\left(s+\frac{c_1^2}{D}\right)^{3/2}},\\
{}_1\bar{u}_j(x_1, s) &= \frac{c_1^2\delta_{1j}}{Ds+c_1^2}\,\frac{PD}{s-i\omega}\,\frac{\delta'(x_1)}{s}+\frac{A_4(x_1, i\omega)}{s-i\omega}+\frac{\bar{\psi}_4(x_1, s)}{\left(s+\frac{c_1^2}{D}\right)^2}+\\
&\quad +\frac{c_1^2\gamma c_0 D}{2(Ds+c_1^2)s^2}\operatorname{sgn}x_1\, e^{i\alpha_0|x_1|}\delta_{1j},
\end{aligned}\tag{3.2}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
A_1(x_1, i\omega) &= \frac{c_1^2}{i\omega}\,\frac{\alpha_1^3(i\omega)e^{i\alpha_1(i\omega)|x_1|}-\alpha_2^3(i\omega)e^{i\alpha_2(i\omega)|x_1|}}{\sqrt{i\omega-s_1}\sqrt{i\omega-s_2}},\\
A_2(x_1, i\omega) &= \frac{c_1^2}{i\omega}\,\frac{\left(\alpha_1^2+\frac{i\omega}{D}\right)e^{i\alpha_1|x_1|}-\left(\alpha_2^2+\frac{i\omega}{D}\right)e^{i\alpha_2|x_1|}}{\sqrt{i\omega-s_1}\sqrt{i\omega-s_2}},\\
A_3(x_1, i\omega) &= Dc_1^2Pk\,\frac{(i\omega)^3}{2i\alpha_0(i\omega)(i\omega D+c_1^2)^3}\,e^{i\alpha_0(i\omega)|x_1|},\\
A_4(x_1, i\omega) &= \frac{Pc_1^4\operatorname{sgn}x_1\,\delta_{1j}}{2D(i\omega D+c_1^2)^2}\,e^{i\alpha_0(i\omega)|x_1|},\\
\bar{\psi}_1(x_1, s) &= \frac{ic_1^2}{2s\sqrt{s-s_2}}\left\{\frac{Pk}{s-i\omega}\left[\alpha_1^3e^{i\alpha_1|x_1|}-\alpha_2^3e^{i\alpha_2|x_1|}-\sqrt{\Delta}A_1(x_1, i\omega)\right]+\right.\\
&\quad \left.+\frac{c_0}{s}\left[\left(\alpha_1^2+\frac{s^2}{c_1^2}\right)\frac{e^{i\alpha_1|x_1|}}{\alpha_1}-\left(\alpha_2^2+\frac{s^2}{c_1^2}\right)\frac{e^{i\alpha_2|x_1|}}{\alpha_2}\right]\right\},
\end{aligned}\tag{3.3}$$

(3.3) [cd.]
$$\bar{\psi}_2(x_1, s) = \frac{c_1^2}{2s\sqrt{s-s_2}}\left\{\frac{P}{s-i\omega}\left[\left(\alpha_1^2+\frac{s}{D}\right)e^{i\alpha_1|x_1|}-\left(\alpha_2^2+\frac{s}{D}\right)e^{i\alpha_2|x_1|}-\sqrt{\Delta}A_2(x_1, i\omega)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma c_0}{s}\left[e^{i\alpha_1|x_1|}-e^{i\alpha_2|x_1|}\right]\right\}\operatorname{sgn}x_1,$$
$$\bar{\psi}_3(x_1, s) = \frac{c_1^2}{2D\sqrt{D}}\left[\frac{Pks^2}{s-i\omega}e^{i\alpha_0|x_1|}+\frac{2D\sqrt{D}}{c_1^2(s-i\omega)}A_3(x_1, i\omega)\left(s+\frac{c_1^2}{D}\right)^{5/2}\right],$$
$$\bar{\psi}_4(x_1, s) = \frac{c_1^4\delta_{1j}}{2D^3}\frac{P}{s-i\omega}\operatorname{sgn}x_1 e^{i\alpha_0|x_1|}-\frac{A_4(x_1, i\omega)}{s-i\omega}.$$

Metodą przybliżoną (wg KRYŁOWA [5]) oblicza się oryginały transformat

$$\bar{F}_l(s) = \frac{1}{\sqrt{(s-s_1)p}}\bar{\psi}_l(x_1, s); \quad l = 1, 2, 3, 4; \quad p\in N. \tag{3.4}$$

Oryginały pozostałych składników wzorów (3.1), (3.2) można obliczyć w sposób ścisły.

Rozważmy przypadek $\gamma k > 1$. Wówczas $s_1 < 0$, a więc funkcja $\bar{F}_1(s)$ da się zapisać

$$\bar{F}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{-s_1}}\frac{1}{\sqrt{s'+s_1}}\bar{\psi}_1(x_1, -s_1 s'). \tag{3.5}$$

Zgodnie z monografią [5] transformatę odwrotną $F_1(t)$ można jednostajnie przybliżać sumami

$$F_1(t) \approx \sum_{l=0}^{n} B_l(t)\bar{\psi}_1(x_1, -s_1\sigma_l), \tag{3.6}$$

gdzie

$$\sigma_l = \frac{1+y_l}{1-y_l}, \tag{3.7}$$

y_l, $l = 0, 1, \ldots, n$, są miejscami zerowymi wielomianów stopnia $(n+1)$ ortogonalnych na przedziale $(-1, 1)$ oraz

$$B_l(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{lj}\frac{t^{j-\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+1/2)}e^{s_1 t}. \tag{3.8}$$

Wartości a_{lj}, σ_l można znaleźć np. w [6] tablica 6 lub tablica 7.

Na mocy powyższych rozważań można przedstawić oryginały transformat występujących w (3.1) w postaci

$$c(x_1, t) \approx -Pk\left[\frac{1}{\gamma k-1}\delta(x_1)+\frac{1}{2i}A_1(x_1, i\omega)\right]e^{i\omega t}+$$
$$+\sum_{l=0}^{n} B_l(t)\bar{\psi}_1(x_1, -s_1\sigma_l), \tag{3.9}$$
$$u_j(x_1, t) \approx \left[\frac{P}{2}A_2(x_1, i\omega)e^{i\omega t}+\sum_{l=0}^{n} B_l(t)\bar{\psi}_2(x_1, -s_1\sigma_l)\right]\delta_{1j}.$$

Obierając dla przykładu $n = 3$ dostaje się wzór na koncentrację

$$c(x_1, t) \approx -Pk\left[\frac{1}{\gamma k-1}\delta(x_1)+\frac{1}{2i}A_1(x_1, i\omega)\right]e^{i\omega t}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{s_1 t}\left[a_{00}\overline{\psi}_1(x_1, -s_1\sigma_0)+\right.$$
$$+\left(a_{10}+\frac{2}{1}a_{11}t\right)\overline{\psi}_1(x_1, s_1\sigma_1)+\left(a_{20}+a_{21}\frac{2}{1}t+\frac{2}{1}\frac{2}{3}a_{22}t^2\right)\times$$
$$\left.\times\overline{\psi}_1(x_1, -s_1\sigma_2)+\left(a_{30}+a_{31}\frac{2}{1}t+\frac{2}{1}\frac{2}{3}a_{32}t^2+\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}a_{33}t^3\right)\overline{\psi}_1(x_1, -s_1\sigma_3)\right].$$

Rozważając analogicznie przypadek $\gamma k = 1$, otrzymujemy

$$c_1(x_1, t) \approx -\left\{\frac{Pkc_1^2 D}{i\omega D|c_1^2}\left[\frac{\delta''(x_1)}{i\omega}-\frac{i\omega\delta(x_1)}{i\omega D|c_1^2}\right]+A_3(x_1, i\omega)\right\}e^{i\omega t}+$$
$$-\left\{\frac{Pk}{i\omega D+c_1^2}\left[D^2\delta''(x_1)+c_1^2\frac{i\omega D-\frac{c_1^2}{D}t(i\omega D+c_1^2)}{i\omega D+c_1^2}\delta(x_1)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{D^2}{c_1^2}c_0\delta(x_1)\right\}e^{-\frac{c_1^2}{D}t}+\frac{PkD}{i\omega}\delta''(x_1)+Dc_0\left(t-\frac{D}{c_1^2}\right)\delta(x_1)+$$
$$+e^{-\frac{c_1^2}{D}t}\frac{D^2}{c_1^4}\sum_{j=0}^{n}\frac{t^{j+1/2}}{\Gamma(j+5/2)}\sum_{l=0}^{n}a_{lj}\left[\frac{\sqrt{D}}{c_1}t\psi_3\left(x_1, \frac{c_1^2}{D}\sigma_l\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2j+3}{4}c_1c_0e^{-\frac{\sigma_l|x_1|}{D\sqrt{\sigma_l+1}}}\right], \tag{3.11}$$

$${}_1u_1(x_1, t) \approx Pc_1^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{D}\right)^2A_4(x_1, i\omega)-\frac{D\delta'(x_1)}{i\omega(i\omega D+c_1^2)}\right]e^{i\omega t}+$$
$$+PD^2\left[\frac{1}{i\omega D}-\frac{1}{i\omega D+c_1^2}e^{-\frac{c_1^2}{D}t}\right]\delta'(x_1)+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\frac{c_1^2}{D}t}\sum_{j,l=0}^{n}a_{lj}\frac{t^j}{j!}\left[P\frac{c_1^4}{D^2}\frac{t}{j+1}\overline{\psi}_3\left(x_1, \frac{c_1^2}{D}\sigma_l\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma\sigma_0\frac{D^2}{c_1^2\sigma_l^2}e^{-\frac{\delta_l|x_1|}{D\sqrt{\delta_l+1}}}\operatorname{sgn}x_1\right].$$

W przypadku $0 < \gamma k < 1$ wartość s_1, dana wzorem (2.4), jest liczbą zespoloną i wówczas wzory typu (3.6) - (3.8) zawierają funkcje hipergeometryczne, co komplikuje algorytmy obliczeniowe. Aby tego uniknąć, zastosowano tutaj rozwinięcie nieznanych oryginałów transformat (3.1) w szereg wielomianów ortogonalnych na przedziale (0,1). Możliwość takiego rozwinięcia jest umotywowana twierdzeniem o istnieniu rozwiązania zagadnienia (1.1) - (1.4) dowodzonym w [3]. Otrzymuje się

$$\begin{aligned} c(x_1, t^*) &\approx Pk\left[\frac{1}{1-\gamma k}\delta(x_1)+\frac{i}{2}A_1(x_1, i\omega)\right]e^{i\omega t^*}+\\ &+\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,a_l P_l\left(e^{2\frac{c_1^2}{D}t^*}\right), \\ u_1(x_1 t^*) &\approx \frac{P}{2}A_2(x_1, i\omega)e^{i\omega t^*}+\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,b_l P_l\left(e^{-2\frac{c_1^2}{D}t^*}\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem Legendre'a

$$P_l(x) = \sum_{j=0}^{l}\beta_{jl}x^j; \qquad \beta_{jl} = (-1)^{j+l}\binom{l}{j}\frac{(j+l)!}{j!l!},$$

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{j=0}^{l}\beta_{jl}2\frac{c_1^2}{D}\frac{\overline{\psi}_1\left(x_1, 2\frac{c_1^2}{D}(1+j)\right)}{\sqrt{2\frac{c_1^2}{D}(1+j)-s_1}}, \\ b_l &= \sum_{j=0}^{l}\beta_{jl}2\frac{c_1^2}{D}\frac{\overline{\psi}_2\left(x_1, 2\frac{c_1^2}{D}(1+j)\right)}{\sqrt{2\frac{c_1^2}{D}(1+j)-s_1}}, \\ t^* &= \frac{1}{2}\frac{D}{c_1^2}t. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wzory typu (3.12) znaleść można w monografii [5]. Wielomiany Legendre'a zastąpić można inną rodziną wielomianów ortogonalnych na przedziale (0,1), otrzymując wzory podobne do (3.12).

Otrzymane wzory (3.9), (3.11) i (3.12) pozwalają wyznaczyć w sposób efektywny, z dowolnym przybliżeniem, koncentrację $c(x_1, t)$ i przemieszczenie $u_1(x_1, t)$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, MTiS **13**, 2, 1975.
2. J. STEFANIAK, *Concentrated loads as body forces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XIV, 1, 1967.
3. M. DRYJA, *Difference and finite-element methods for the dynamical problem of thermodiffusion in an elastic solid*, Archives of Mechanics **29**, 1, 1977.
4. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN 1964.
5. В. И. Крылов, Н. С. Скобля, *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*, Наука 1974.
6. В. И. Крылов, Н. С. Скобля, *Справочная книга по численному преобразованию Лапласа*, Минск 1968.

Р е з ю м е

ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И ДИФФУЗИЯ В ТВЁРДОМ ТЕЛЕ

В работе определены поле перемущений и поле концентрации в неограниченной среде, для динамической задачи диффузии. Сопряжённые уравнения диффузии даны С. Подстригачём и В. Новацким [1]. Приведены методы приближенного обращения преобразования Лапласа.

S u m m a r y

PLANE HARMONIC WAVES AND DIFFUSION IN A SOLID BODY

On the basis of equations given by S. Podstrigač and W. Nowacki [1], the interaction between harmonic waves and diffusion in solids is considered. To obtain the concentration and displacement the approximate method for inverse Laplace transform is used.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 czerwca 1978 roku