MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 18 (1980)

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA, PRZY POTĘGOWYM PRAWIE FIZYCZNYM[1]),

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Niniejsza praca poświęcona jest problemowi optymalnego kształtowania osiowo-ściskanych prętów wspornikowych, wykonanych z materiału nieliniowo-sprężystego lub sprężysto-plastycznego z nieograniczoną granicą plastyczności, który może być opisany potęgowym prawem fizycznym. Pręt wspornikowy jest ściskany siłą skupioną działającą na jego swobodnym końcu, skierowaną podczas wyboczenia do ustalonego punktu.

Podobny problem, w przypadku materiału liniowo-sprężystego, został rozwiązany w pracy A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [1], gdzie podano również szerszy przegląd literatury dotyczącej tego tematu.

Nieliniowo-sprężyste lub sprężysto-plastyczne własności materiału mają jednak istotny wpływ na optymalny kształt pręta; szereg szczególnych rozwiązań otrzymano w pracach W. KRZYSIA [2], [3], A. GAJEWSKIEGO [4], A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [5], przy założeniu, że sprężysto-plastyczne własności materiału są opisane za pomocą specjalnie dobranych praw fizycznych, zaproponowanych w pracy [3].

W wymienionych pracach zwrócono również uwagę na wpływ zachowania się siły po utracie stateczności na jej wartość krytyczną i na odpowiadający jej kształt optymalny pręta. Wpływ ten może być bardzo istotny, szczególnie w przypadkach, w których zachowanie się siły jest niekonserwatywne. Jak wykazano w pracy A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [6], oraz M. FARSHADA i I. TADJBAKHSHA [7], konserwatywność układu ma tu podstawowe znaczenie, bowiem pozwala na stosowanie statycznego kryterium stateczności oraz powoduje względne uproszczenie odpowiednich warunków optymalności. W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku działania siły skierowanej do bieguna, tzn. do zagadnienia konserwatywnego.

Optymalne kształty ściskanych prętów liniowo-sprężystych oraz prętów sprężysto-plastycznych z nieograniczoną granicą plastyczności charakteryzują się występowaniem zerowych przekrojów. Prowadzi to do nieskończonego wzrostu naprężeń i wymaga przyjęcia dodatkowego warunku wytrzymałościowego, ograniczającego naprężenia. Warunek ten uwzględniono w pracy S. H. RASMUSSENA [8], w przypadku optymalnego kształtowania pręta przegubowo zamocowanego, ściskanego siłą eulerowską (o stałym kierunku i punkcie przyłożenia), wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego, opisanego nieliniowym

[1]) Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych" — koordynowanego przez IPPT PAN.

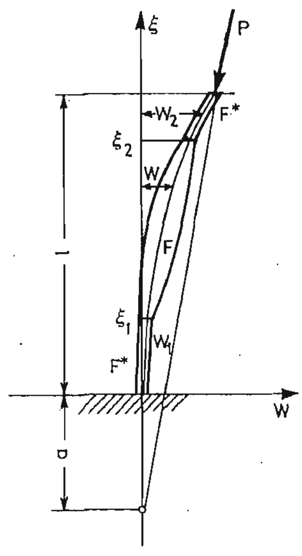
prawem Ramberga-Osgooda. Odpowiedni warunek optymalności otrzymano w oparciu o klasyczny rachunek wariacyjny, a zagadnienie rozwiązano na drodze numerycznej metodą kolejnych przybliżeń.

Okazuje się jednak, że istnieje również możliwość otrzymania rozwiązań ścisłych w przypadku optymalnego kształtowania prętów wspornikowych, ściskanych siłą skierowaną do bieguna, jeżeli ograniczymy się do potęgowego prawa fizycznego. Przedstawione niżej rozwiązania ścisłe, z uwzględnieniem warunków ograniczających pole powierzchni przekroju poprzecznego, mogą stanowić bardzo dobre kryterium oceny zbieżności różnych metod przybliżonych, które, z konieczności, muszą być stosowane w podobnych zagadnieniach przy innych prawach fizycznych.

2. Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem rozważań jest jednostronnie, sprężyście utwierdzony pręt, o długości l, ściskany stałą siłą P, działającą na jego swobodnym końcu (rys. 1). Siła ta jest stale skierowana do bieguna położonego w odległości „a" od utwierdzenia ($\alpha = a/l$). Kształt przekroju poprzecznego pręta i jego związek z momentem bezwładności przekroju jest scharakteryzowany zależnością:

$$\Phi(\xi) = [g(\xi)]^{\varkappa}, \quad g(\xi) = J/J_0, \quad \Phi(\xi) = F/F_0, \quad F_0 = F(\xi_0), \quad J_0 = J(\xi_0), \tag{2.1}$$



Rys. 1

w której: $g(\xi)$ oznacza bezwymiarowy moment bezwładności, $\Phi(\xi)$ — pole powierzchni przekroju, F_0 i J_0 oznaczają odpowiednio pole powierzchni i moment bezwładności w pewnym, na ogół dowolnie wybranym punkcie $\xi = \xi_0$ a wykładnik $\varkappa$ określa sposób wyboczenia pręta ($\varkappa = 1$ — pręt płaskozbieżny, podlegający wyboczeniu z płaszczyzny zbieżności, $\varkappa = 1/2$ — pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny, $\varkappa = 1/3$ — pręt płasko-zbieżny, podlegający wyboczeniu w płaszczyźnie zbieżności). Będziemy w dalszym ciągu stosowali teorię modułu stycznego wg. koncepcji F. R. SHANLEYA [9], która sprowadza się w praktyce do zastąpienia modułu Younga E w równaniu linii ugięcia dla zakresu sprężystego, przez moduł styczny $\overline{\mathrm{E}} = d\sigma/d\varepsilon$ wykresu ściskania $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. W dalszym ciągu ograniczymy się do potęgowego prawa fizycznego, które zapiszemy w postaci:

$$\varepsilon = |\sigma/\eta|^n \operatorname{sgn}\sigma, \tag{2.2}$$

gdzie η i n oznaczają pewne znane stałe materiałowe.

W niniejszej pracy uwzględnimy również warunek wytrzymałościowy:

$$P/F \leqslant \sigma^*, \tag{2.3}$$

w którym σ^* oznacza maksymalne naprężenie dopuszczalne. Warunek (2.3) zapiszemy dalej w postaci:

$$F \geqslant F^* \quad \text{lub} \quad \Phi \geqslant \Phi^*. \tag{2.4}$$

Gdy parametr $\alpha = a/l$, określający położenie centrum siły jest zawarty w granicach: $0 \leqslant \alpha < \infty$ i $-\infty < \alpha < -1$, wówczas wyboczenie pręta następuje w postaci jednej półfali, co ogranicza występowanie minimalnych przekrojów Φ^* do przedziałów leżących w pobliżu obu końców pręta. Ograniczymy się do powyższych wartości parametru α i przyjmiemy, że część pręta od utwierdzenia do, chwilowo nieokreślonego, punktu ξ_1, oraz od nieokreślonego jeszcze punktu ξ_2 do swobodnego końca $\xi = l$ mają stały przekrój Φ^*. Zarówno część środkowa (zawarta między ξ_1 i ξ_2). o poszukiwanym kształcie optymalnym, jak i części o stałym przekroju znajdują się w stanie nieliniowo-sprężystym, opisanym zależnością (2.2).

Równanie linii ugięcia pręta obciążonego w sposób przedstawiony na rys. 1 są następujące:

$$\begin{aligned} (\overline{\mathrm{E}}J^*w_1'')''+Pw_1'' &= 0 \quad \text{dla:} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1 \\ (\overline{\mathrm{E}}Jw'')''+Pw'' &= 0 \quad \text{dla:} \quad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2 \\ (\overline{\mathrm{E}}J^*w_2'')''+Pw_2'' &= 0 \quad \text{dla:} \quad \xi_2 \leqslant \xi \leqslant l, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie: w_1 i w_2 oznaczają ugięcie w punkcie ξ dla części o stałym przekroju, w — ugięcie dla części o przekroju zmiennym, $w' = dw/d\xi$, $\overline{\mathrm{E}}$ = moduł styczny, J^* — moment bezwładności przekrojów stałych.

Jeśli w dalszym ciągu wprowadzimy bezwymiarowe oznaczenia:

$$\begin{aligned} & y_1 = w_1/l, \quad y_2 = w_2/l, \quad y = w/l, \quad x = \xi/l, \quad \Phi^* = F^*/F_0, \\ & f(x) = \overline{\mathrm{E}}(x)/\mathrm{E}, \quad f^* = \overline{\mathrm{E}}/\mathrm{E} = \mathrm{const}. \\ & \beta = \frac{Pl^2}{\mathrm{E}J_0}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

to równania (2.5) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} (f^*g^*y_1'')''+\beta y_1'' &= 0 \quad \text{dla:} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ [f(x)g(x)y'']''+\beta y'' &= 0 \quad \text{dla:} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ (f^*g^*y_2'')''+\beta y_2'' &= 0 \quad \text{dla:} \quad x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe, które zgodnie z przyjętym charakterem siły ściskającej, mają następującą postać:

$$
(2.8) \qquad
\begin{aligned}
&y_1(0) = 0\\
&y_1'(0) - \psi(f^*g^*y_1'')_{x=0} = 0\\
&(f^*g^*y_2'')_{x=1} = 0\\
&\left[(f^*g^*y_2'')' + \beta\left(y_2' - \frac{y_2}{1+\alpha}\right)\right]_{x=1} = 0,
\end{aligned}
$$

w której ψ charakteryzuje sprężystość utwierdzenia (gdy $\psi = 0$ — pręt jest sztywnie utwierdzony, a gdy $\psi \to \infty$ — pręt jest zamocowany przegubowo). W dalszym ciągu będziemy rozważali tylko pręty sztywnie zamocowane.

Całkując dwukrotnie równania (2.7) i wprowadzając nowe zmienne zależne:

$$
(2.9) \qquad
\begin{aligned}
v_1(x) &= y_1(x) - \frac{\overline{B}_1}{\beta} - \frac{\overline{C}_1}{\beta}x,\\
v(x) &= y(x) - \frac{\overline{B}}{\beta} - \frac{\overline{C}}{\beta}x\\
v_2(x) &= y_2(x) - \frac{\overline{B}_2}{\beta} - \frac{\overline{C}_2}{\beta}x \qquad (\overline{B}_i,\ \overline{C}_i \text{ — stałe całkowania})
\end{aligned}
$$

otrzymujemy:

$$
(2.10) \qquad
\begin{aligned}
&G^* + \frac{v_1}{v_1''} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_1,\\
&G(\Phi) + \frac{v}{v''} = 0, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\\
&G^* + \frac{v_2}{v_2''} = 0, \qquad x_2 \leqslant x \leqslant 1,
\end{aligned}
$$

gdzie: G^* i G są zdefiniowane następująco:

$$
(2.11) \qquad
\begin{aligned}
G(\Phi) &= \frac{1}{\beta}f(\Phi)g(\Phi) = \frac{1}{\beta}\Phi^{1/\varkappa}f(\Phi),\\
G^* &= \frac{1}{\beta}f(\Phi^*)g^* = \frac{1}{\beta}\Phi^{*1/\varkappa}f(\Phi^*).
\end{aligned}
$$

Funkcja $G(\Phi)$ jest zależna od zmiennej x za pośrednictwem funkcji $\Phi(x)$, natomiast wartość G^* jest stała; w przypadku potęgowego prawa fizycznego (2.2) ze wzorów (2.11) otrzymujemy:

$$
(2.12) \qquad
\begin{aligned}
G(\Phi) &= \overline{G}\Phi^{1/\varkappa+n-1}\\
G^* &= \overline{G}\Phi^{*(1/\varkappa+n-1)}\\
\overline{G} &= \frac{J_0}{nF_0 l^2}\left(\frac{\eta F_0}{P}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Korzystając z warunków ciągłości momentu zginającego, siły poprzecznej, funkcji ugięcia i jej pierwszej pochodnej w punktach x_1 i x_2 otrzymujemy równości: $\overline{B}_1 = \overline{B}_2 = \overline{B}$,

$\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}$ oraz, z równań (2.8), warunki brzegowe (przy $\psi = 0$):

$$v_1(0) - \alpha v_1'(0) = 0, \quad v_2(1) = 0. \tag{2.13}$$

3. Optymalizacja kształtu pręta. Rozwiązanie ogólne

Zasadniczy problem pracy polega na znalezieniu takiego kształtu $\Phi(x)$ oraz punktów zszycia x_1 i x_2, aby objętość pręta była minimalna (przy ustalonej wartości siły krytycznej), tzn. aby:

$$V = F_0 l \left[\int_0^{x_1} \Phi^* dx + \int_{x_1}^{x_2} \Gamma\left(-\frac{v}{v''}\right) dx + \int_{x_2}^{1} \Phi^* dx \right] = \min. \tag{3.1}$$

W funkcjonale (6.1) Γ jest funkcją odwrotną do $G(\Phi)$ i wynika z rozwiązania drugiego z równań (2.10) ze względu na Φ.

Problem polega na minimalizacji funkcjonału (3.1), przy czym nie wszystkie wartości brzegowe są niezależne i ustalone; nie są również określone wartości współrzędnych x_1 i x_2. Jest to więc problem z końcami ruchomymi; obok równań Eulera-Lagrange'a należy wykorzystać podstawowy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału $\delta V = 0$.

Warunek transwersalności (podany w pracy [6]) prowadzi do dwóch równań określających skoki w wartościach drugich pochodnych przy z góry założonych skokach pola powierzchni przekrojów w punktach x_1 i x_2.

W dalszym ciągu założymy ciągłość naprężeń w punktach x_1 i x_2, a więc również pola powierzchni przekrojów; z warunku transwersalności wynika wówczas ciągłość drugich pochodnych ugięcia w tych punktach:

$$v''(x_1) = v_1''(x_1), \quad v''(x_2) = v_2''(x_2). \tag{3.2}$$

W pracy [6] wykazano również, że przy obciążeniu konserwatywnym, równanie Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (3.1) przybiera prostą postać:

$$v''^2 = C_1 \dot{\Gamma}, \quad \text{gdzie:} \quad \dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{d\left(-\frac{v}{v''}\right)}. \tag{3.3}$$

W przypadku prawa potęgowego (2.2):

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{1/\varkappa + n - 1} \bar{G}^{-1/(\varkappa+n-1)} \left(-\frac{v}{v''}\right)^{-\frac{1/\varkappa+n-2}{1/\varkappa+n-1}} \tag{3.4}$$

i równanie (3.3) można sprowadzić do prostej postaci nieliniowego równania różniczkowego trzeciego rzędu:

$$v'' v^{[1-\varkappa(2-n)]/(1+\varkappa n)} = C, \quad C = \text{const}. \tag{3.5}$$

Równanie to może być scałkowane na drodze analitycznej; podstawiając bowiem:

$$p(v) = v'(x), \quad v''(x) = p\frac{dp}{dv}, \tag{3.6}$$

po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$vp(v) = \pm(A_1' v^{2\varkappa/(1+\varkappa n)} + A_2')^{1/2}, \quad A_1', A_2' \text{ — stałe całkowania} \tag{3.7}$$

a stąd:

$$x = \pm \int (A_1' v^{2\varkappa/(1+\varkappa n)} + A_2')^{-1/2} dv. \tag{3.8}$$

Dokonując podstawienia:

$$-\frac{A_1'}{A_2'} v^{2\varkappa/(1+\varkappa n)} = \sin^2\varphi, \tag{3.9}$$

rozwiązanie równania (3.3) możemy przedstawić w następującej postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} v = A_1 (\sin\varphi)^{1/\varkappa+n} & \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ x = A_2 \int\limits_{\bar{\varphi}}^{\varphi} |\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1} d\varphi & \bar{\varphi} \text{ — pewna stała całkowania} \end{cases} \tag{3.10}$$

Poszukiwane bezwymiarowe pole powierzchni przekroju obliczymy z równań (2.10) i (2.12):

$$\Phi(\varphi) = \left[\frac{A_2^2}{(1/\varkappa+n)G}\right]^{1/(\frac{1}{\varkappa}+n-1)} \sin^2\varphi. \tag{3.11}$$

Ogólne rozwiązanie zagadnienia składa się zatem z rozwiązania pierwszego z równań (2.10):

$$v_1(x) = B_1 \sin\omega x + B_2 \cos\omega x, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{3.12}$$

gdzie:

$$\omega = (G^*)^{-1/2}, \tag{3.13}$$

rozwiązania (3.10) oraz rozwiązania trzeciego z równań (2.10):

$$v_2(x) = C_1 \sin\omega x + C_2 \cos\omega x, \quad x_2 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.14}$$

Stałe A_1, A_2, $\bar{\varphi}$, B_1, B_2, C_1, C_2 oraz punkty zszycia x_1 i x_2 należy wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych (2.13) i warunków zszycia:

$$\begin{aligned} v_1(x_1) &= v(x_1), & v(x_2) &= v_2(x_2), \\ v_1'(x_1) &= v'(x_1), & v'(x_2) &= v_2'(x_2), \\ v_1''(x_1) &= v''(x_1), & v''(x_2) &= v_2''(x_2). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ponadto musimy wyznaczyć siłę krytyczną P; obliczymy ją podając pole powierzchni przekroju w pewnym, na ogół dowolnie wybranym punkcie x_0:

$$\Phi(x_0) = \Phi_0. \tag{3.16}$$

Przyjmiemy w dalszym ciągu, że współrzędnej x_1 odpowiada wartość parametru φ_1, współrzędnej x_2 wartość φ_2, a współrzędnej x_0 — wartość φ_0.

Ponieważ linia ugięcia pręta po wyboczeniu jest określona z dokładnością do stałego mnożnika, więc jedna ze stałych jest dowolna; dla uproszczenia obliczeń przyjmiemy:

$$A_1 = 1. \tag{3.17}$$

Wprowadzimy ponadto parametr:

$$\Theta = \Phi^*/\Phi_0, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1, \tag{3.18}$$

określający stosunek powierzchni przekroju w punkcie x_1 (lub x_2) do powierzchni przekroju w punkcie x_0, oraz wyrazimy stałą $\bar{G}$ za pomocą parametru ω ze wzoru (3.13).

Przy powyższych oznaczeniach otrzymujemy ostatecznie 12 równań algebraicznych, pozwalających na obliczenie poszukiwanych stałych:

$$(3.19)\quad \begin{aligned}
& B_2-\alpha\omega B_1 = 0 && (1)\\
& C_1\sin\omega + C_2\cos\omega = 0 && (2)\\
& B_1\sin\omega x_1 + B_2\cos\omega x_1 = (\sin\varphi_1)^{1/\varkappa+n} && (3)\\
& \omega A_2(B_1\cos\omega x_1 - B_2\sin\omega x_1) = (1/\varkappa+n)\cos\varphi_1 && (4)\\
& \omega^2A_2^2(\sin\varphi_1)^{1/\varkappa+n-2}(B_1\sin\omega x_1 + B_2\cos\omega x_1) = 1/\varkappa+n && (5)\\
& C_1\sin\omega x_2 + C_2\cos\omega x_2 = (\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n} && (6)\\
& \omega A_2(C_1\cos\omega x_2 - C_2\sin\omega x_2) = (1/\varkappa+n)\cos\varphi_2 && (7)\\
& \omega^2A_2^2(\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n-2}(C_1\sin\omega x_2 + C_2\cos\omega x_2) = 1/\varkappa+n && (8)\\
& \Theta^{1/\varkappa+n-1}\omega^2A_2^2(\sin\varphi_0)^{2(1/\varkappa+n-1)} = 1/\varkappa+n && (9)\\
& x_1 = A_2\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_1}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}d\varphi && (10)\\
& x_2 = A_2\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_2}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}d\varphi && (11)\\
& x_0 = A_2\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_0}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}d\varphi && (12)
\end{aligned}$$

Znajomość parametru ω pozwala wyznaczyć również siłę krytyczną, którą obliczamy z równania (2.12):

$$P = \eta\Theta^{(1/\varkappa+n-1)/n}\left(\frac{\omega^2}{nc^{1/\varkappa}l^2}\right)^{1/n}(F_0^{\varkappa}\Phi_0)^{(1/\lambda+n-1)/n} = \eta\left(\frac{\omega^2}{ncl^2}\right)^{1/n}F^{*(1/\varkappa+n-1)/n}, \tag{3.20}$$

gdzie:

$$c = F_0/J_0^{\varkappa}. \tag{3.21}$$

Wzór (3.20) służy praktycznie do określenia przekroju podstawowego F_0 dla danej siły P_0. Po prostych przekształceniach z układu równań (3.19) obliczamy stałe:

$$(3.22)\quad \begin{aligned}
& B_1 = \frac{(\sin\varphi_1)^{1/\varkappa+n}}{\sin\omega x_1+\alpha\omega\cos\omega x_1}, \quad B_2 = \frac{\alpha\omega(\sin\varphi_1)^{1/\varkappa+n}}{\sin\omega x_1+\alpha\omega\cos\omega x_1},\\
& C_1 = \frac{\cos\omega(\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n}}{\sin[\omega(l-x_2)]}, \quad C_2 = \frac{\sin\omega(\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n}}{\sin[\omega(l-x_2)]},\\
& A_2 = \frac{(1/\varkappa+n)^{1/2}}{\omega\Theta^{(1/\varkappa+n-1)/2}(\sin\varphi_0)^{1/\varkappa+n-1}},\\
& \varphi_1 = \arcsin(\Theta^{1/2}\sin\varphi_0), \quad (\sin\varphi_1 = \Theta^{1/2}\sin\varphi_0 = \sin\varphi_2),\\
& \varphi_2 = \frac{\pi}{2}+\arccos(\Theta^{1/2}\sin\varphi_0).
\end{aligned}$$

Pozostałe parametry: ω, x_1, x_2, $\bar{\varphi}_0$, φ musimy wyznaczyć z układu równań przestępnych:

$$-\frac{\cos\varphi_1(\sin\omega x_1+\alpha\omega\cos\omega x_1)}{\cos\varphi_2(\cos\omega x_1-\alpha\omega\sin\omega x_1)} = \mathrm{tg}[\omega(1-x_2)], \tag{3.23}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = -(1/\varkappa+n)^{1/2}\mathrm{tg}[\omega(1-x_2)], \tag{3.24}$$

oraz równań (10) (11) i (12) układu (3.19). Równania $(3.19)_{10\ 11\ 12}$, (3.13) i (3.24) można rozwiązać analitycznie stosując metodę odwrotną, która polega na przyjęciu z góry parametrów Θ i x_0 oraz wyznaczeniu odpowiadającej im wartości parametru α (określającego położenie bieguna siły).

Obliczając zatem kolejno poniższe stałe, otrzymamy rozwiązanie zagadnienia:

$$\varphi_1 = \arcsin(\Theta^{1/2}\sin\varphi_0), \tag{3.25}$$

$$\varphi_2 = \pi-\varphi_1, \tag{3.26}$$

$$H = \frac{(1/\varkappa+n)^{12}}{\Theta^{(1/\varkappa+n-1)/2}(\sin\varphi_0)^{1/\varkappa+n-1}}, \tag{3.27}$$

$$\delta = -\mathrm{arctg}\left[\frac{\mathrm{tg}\varphi_2}{(1/\varkappa+n)^{1/2}}\right], \tag{3.28}$$

$$x_2 = \frac{x_0+\dfrac{H}{\delta}\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_2}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}d\varphi}{1+\dfrac{H}{\delta}\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_2}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}\,d\varphi}, \tag{3.29}$$

$$x_1 = x_0-\frac{H(1-x_2)}{\delta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}\,d\varphi, \tag{3.30}$$

$$\omega = \frac{\delta}{1-x_2}, \tag{3.31}$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\mathrm{tg}(\delta-\omega x_1), \tag{3.32}$$

$$\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_0}|\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1}d\varphi = \frac{\omega x_0}{H}, \tag{3.33}$$

Należy zauważyć, że równanie (3.33) przyjmuje postać:

$$\int_0^{\bar{\varphi}}(\sin\varphi)^{1/\varkappa+n-1}d\varphi+\int_0^{\varphi_0}(\sin\varphi)^{1/\varkappa+n-1}d\varphi = \frac{\omega x_0}{H} \quad \text{gdy: } \bar{\varphi} < 0, \text{ albo:} \tag{3.34}$$

$$\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_0}(\sin\varphi)^{1/\varkappa+n-1}d\varphi = \frac{\omega x_0}{H}, \quad \text{gdy:} \quad \bar{\varphi} \geqslant 0. \tag{3.35}$$

Po obliczeniu stałych: φ_1, φ_2, H, δ, x_2, x_1, ω, α, $\bar{\varphi}$ znajdujemy funkcje określające linie ugięcia pręta optymalnego:

$$v_1(x) = \frac{(\sin\varphi_1)^{1/\varkappa+n}}{\sin\delta}\sin[\delta-\omega(x_1-x)] \quad \text{dla:} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{3.36}$$

$$\left\{\begin{aligned} &v(\varphi) = (\sin\varphi)^{1/\varkappa+n}, \\ &x(\varphi) = x_1 + \frac{H}{\omega}\int_{\varphi_1}^{\varphi} |\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1} d\varphi = x_2 - \frac{H}{\omega}\int_{\varphi}^{\varphi_2} |\sin\varphi|^{1/\varkappa+n-1} d\varphi, \end{aligned}\right. \tag{3.37}$$

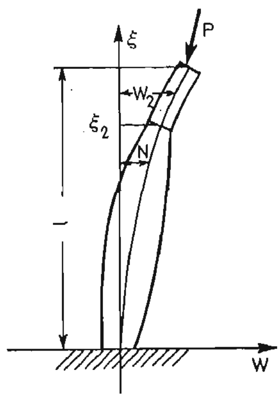
$$\text{dla: } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 (\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2).$$

$$v_2(x) = \frac{(\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n}}{\sin[\omega(1-x_2)]}\sin[\omega(1-x)], \quad \text{dla:} \quad x_2 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.38}$$

Znaczne uproszczenie obliczeń otrzymamy zakładając, że w punkcie x_0 występuje maksymalny przekrój Φ_0. Odpowiada to przyjęciu:

$$\varphi_0 = \pi/2. \tag{3.39}$$

3.1. Ogólne równania (3.25) - (3.38) ulegają zmianie, gdy rozważamy przypadek takiego obciążenia pręta, który wymaga ograniczenia powierzchni przekroju tylko w górnej części pręta (rys. 2). Wykorzystując rozwiązania (3.10) i (3.14), warunki brzegowe (2.13)



Rys. 2

oraz warunki zszycia w punkcie x_2 otrzymujemy:

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = \alpha(1/\varkappa+n)\frac{\cos\overline{\varphi}}{(\sin\overline{\varphi})^{1/\varkappa+n}},$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \arccos(\Theta^{1/2}\sin\overline{\varphi}),$$

$$\omega = \left\{-\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{(1/\varkappa+n)^{1/2}}\right] + \frac{(1/\varkappa+n)^{1/2}}{\Theta^{(1/\varkappa+n-1)/2}(\sin\overline{\varphi})^{1/\varkappa+n-1}}\int_{\overline{\varphi}}^{\varphi_2}(\sin\varphi)^{1/\varkappa+n-1}d\varphi\right\}, \tag{3.40}$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg}\overline{\varphi}}{\omega(1/\varkappa+n)^{1/2}\Theta^{(1/\varkappa+n-1)/2}},$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{(1/\varkappa+n)^{1/2}}\right].$$

Stałe C_1 i C_2 określone są wzorami (3.22), linię ugięcia pręta opisują wyrażenia:

$$(3.41)\qquad \begin{cases} v(\varphi) = (\sin\varphi)^{1/\varkappa+n}, \\ x(\varphi) = \dfrac{(1/\varkappa+n)^{1/2}}{\omega(\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n-1}} \displaystyle\int\limits_{\bar{\varphi}}^{\varphi} (\sin\varphi)^{1/\varkappa+n-1} d\varphi \quad \text{dla:} \quad \begin{matrix} \bar{\varphi} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ 0 \leqslant x \leqslant x_2, \end{matrix} \end{cases}$$

$$(3.42)\qquad v_2(x) = (\sin\varphi_2)^{1/\varkappa+n} \frac{\sin[\omega(1-x)]}{\sin[\omega(1-x_2)]}, \quad \text{dla:} \quad x_2 \leqslant x \leqslant 1,$$

a bezwymiarowe pole powierzchni przekroju dane jest równaniem:

$$(3.43)\qquad \Phi(\varphi) = \Phi^* \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi_2}.$$

Siłę krytyczną obliczamy, jak poprzednio, ze wzoru (3.20).

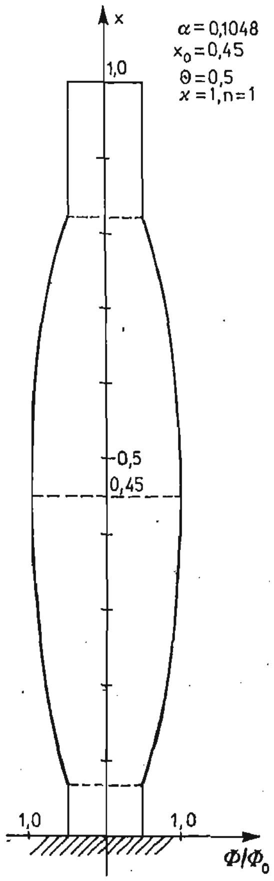
4. Przykłady liczbowe

4.1. Materiał liniowo-sprężysty: $n = 1$. W przykładzie tym założymy, że ograniczenia ingerują na obu końcach pręta i że wyboczenie zachodzi z płaszczyzny zbieżności, tzn. że: $\varkappa = 1$. Wówczas otrzymujemy:

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1 = \arcsin(\Theta^{1/2}), \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1, \quad H = \left(\frac{2}{\Theta}\right)^{1/2} \\ &\delta = \operatorname{arctg}\left\{\left[\frac{\Theta}{2(1-\Theta)}\right]^{1/2}\right\}, \\ &x_2 = \frac{x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{\delta}\left(\dfrac{1-\Theta}{\Theta}\right)^{1/2}}{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\delta}\left(\dfrac{1-\Theta}{\Theta}\right)^{1/2}}, \\ &x_1 = x_0 - \frac{\sqrt{2}(1-x_2)}{\delta}\left(\frac{1-\Theta}{\Theta}\right)^{1/2} = 2x_0 - x_2, \\ &\omega = \frac{\delta}{1-x_2}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega}\operatorname{tg}(\delta - \omega x_1), \\ &\bar{\varphi} = -\arccos\left(2 - \frac{\omega x_0}{H}\right), \\ &\begin{cases} x(\varphi) = x_1 + \dfrac{H}{\omega}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \varphi_0\left\{1 - \left[\cos\varphi_1 - \dfrac{\omega}{H}(x - x_1)\right]^2\right\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Równocześnie, korzystając z równania szóstego powyższego układu, możemy określić graniczne wartości współrzędnej x_0, dla której punkt zszycia x_1 występuje w punkcie utwierdzenia pręta. Przyjmując bowiem $x_1 = 0$ mamy:

$$x_{og} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1-\Theta}{\Theta}\right)^{1/2}}{\operatorname{arctg}\left\{\left[\frac{\Theta}{2(1-\Theta)}\right]^{1/2}\right\}+2\sqrt{2}\left(\frac{1-\Theta}{\Theta}\right)^{1/2}}. \tag{4.2}$$



Rys. 3

Zakładając np.: $\Theta = 0.5$; $x_0 = 0.45$, obliczamy:

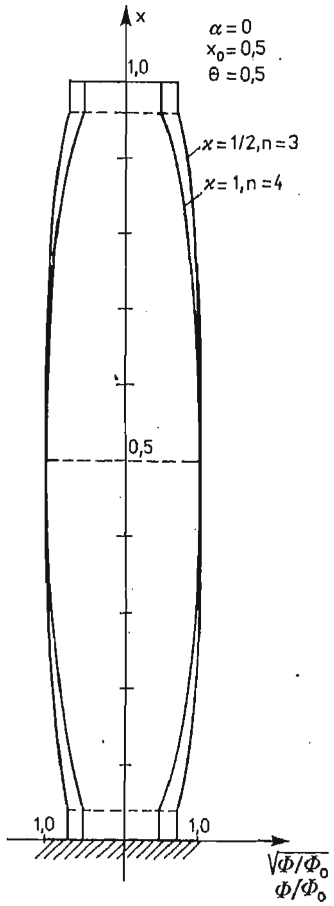
$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = 0.785398, \quad \varphi_2 = 2.356194, \quad H = 2, \quad \delta = 0.615480,\\
&x_2 = 0.833219, \quad x_1 = 0.066781, \quad \omega = 3.690351,\\
&\alpha = 0.104801, \quad \bar{\varphi} = 0.591098,\\
&\Phi(x) = \Phi_0(0.310554+3.064206x-3.404673x^2),\\
&P = 6,809347\frac{\eta J_0}{l^2}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Optymalny kształt pręta, odpowiadający powyższym danym, przedstawiono na rys. 3.

4.2. Materiał nieliniowo-sprężysty: $1/\varkappa+n = 5$. W przykładzie drugim również przyjmiemy, że ograniczenia ingerują na obu końcach pręta i, że: $1/\varkappa+n = 5$, tzn. albo: $\varkappa = 1$, $n = 4$, albo: $\varkappa = 1/2$ i $n = 3$. Zakładając: $\Theta = 0.5$ i $x_0 = 0.5$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = 0.785398, \quad \varphi_2 = 2.356194, \quad H = 8.944272, \quad \delta = 0.420534,\\
&x_2 = 0.960259, \quad x_1 = 0.039471, \quad \omega = 10.581815, \quad \alpha = 0,\\
&\begin{cases} x(\varphi) = 0.0021071+0.316968\varphi-0.211312\sin 2\varphi+0.026414\sin 4\varphi,\\ \Phi(\varphi) = \Phi_0\sin^2\varphi. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Optymalny kształt pręta, odpowiadający powyższym danym, przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

4.3. Materiał liniowo-sprężysty: $n = 1$. W przykładzie tym założymy, że ograniczenie przekroju występuje tylko w górnej części pręta sprężystego ($n = 1$), płasko-zbieżnego ($\varkappa = 1$), ściskanego siłą eulerowską ($\alpha \to \pm\infty$). Z równań (3.40) - (3.43) dostajemy tu proste rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi} = \pi/2,\\
&\varphi_2 = \pi/2+\arccos(\Theta^{1/2}),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5) [cd.]

$$\omega = \left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta}\right]^{1/2} + \mathrm{arctg}\left\{\left[\frac{\Theta}{2(1-\Theta)}\right]^{1/2}\right\},$$

$$x_2 = \frac{\left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta}\right]^{1/2}}{\left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta}\right]^{1/2} + \mathrm{arctg}\left\{\left[\frac{2(1-\Theta)}{\Theta}\right]^{-1/2}\right\}}.$$

1. Gdy $\Theta \to 0$ rozwiązanie jest ważne dla kształtu optymalnego bez ograniczeń na przekrój:

$$\varphi_2 = \pi, \quad \omega \sim (2/\Theta)^{1/2}, \quad \alpha \to \infty, \quad x_2 = 1, \quad P = 2\frac{EJ_0}{l^2}.$$

2. Gdy $\Theta = 1$ otrzymujemy siłę krytyczną dla liniowo-sprężystego pręta pryzmatycznego:

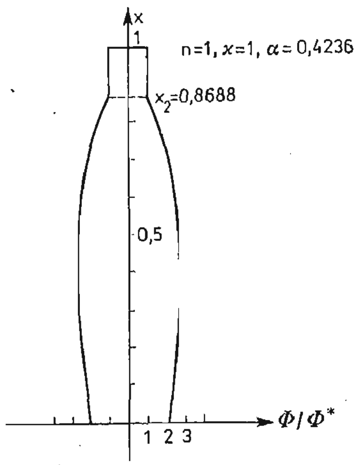
$$\varphi_2 = \pi/2, \quad \omega = \pi/2, \quad \alpha \to \infty, \quad x_2 = 0, \quad P = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ_0}{l^2}$$

W innych przypadkach położenia bieguna, oraz dla dowolnych wartości parametrów n, $\varkappa$ i Θ, można wykonać tablice przedstawiające zależności parametrów φ_2, ω, α, x_2 od stałej $\bar{\varphi}$.

Na rys. 5 przedstawiono optymalny kształt pręta dla następujących danych:

$$n = 1, \quad \varkappa = 1, \quad \Theta = 1/2, \quad \alpha = 0.4236, \quad \bar{\varphi} = 1, \quad \varphi_2 = 2.5043,$$

$$\omega = 3.6767, \quad x_2 = 0.8688, \quad P = 6.7591\frac{EJ_0}{l^2}.$$



Rys. 5

Równania linii ugięcia oraz kształt optymalny są tu następujące:

(4.6)

$$\begin{cases} x(\varphi) = 0.6464(0.5403 - \cos\varphi), \\ v(\varphi) = \sin^2\varphi, & \text{dla:} \quad 1 \leqslant \varphi \leqslant 2.5043, \\ \Phi(\varphi) = 2.8246\Phi^* \sin^2\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2(x) = 0.7637\sin[\omega(1-x)], \\ \Phi_2 = \Phi^*. \end{cases} \quad \text{dla:} \quad 0.8688 \leqslant x \leqslant 1,$$

5. Uwagi końcowe

W niniejszej pracy przedstawiono ścisłe rozwiązanie analityczne problemu optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, przy czym założono, że materiał pręta jest nieliniowo-sprężysty i może być opisany potęgowym prawem fizycznym. Na ogół w podobnych zagadnieniach, w których nakładamy pewne ograniczenia na zmienną sterowania, (przedstawionych np. w pracy [8]) zachodzi konieczność stosowania metod numerycznych z wykorzystaniem maszyn cyfrowych. Niniejsze rozwiązanie analityczne, otrzymane dla szczególnej postaci prawa fizycznego może stanowić zatem dobry test dokładności metody numerycznej.

Literatura cytowana w tekście

1. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI; *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. INż., 2, **17**, 1969, 299 - 329.
2. W. KRZYŚ; *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Zeszyty Nauk. Pol. Krak., Mechanika, z. 4, 1967.
3. W. KRZYŚ; *Optimale Formen gedrückter dünnwandiger Stützen im elastisch plastischen Bereich*, Wiss. Z. TU Dresden Internationale Stahlbautagung, 2, **17**, 1968, 407 - 410.
4. A. GAJEWSKI; *Optymalne kształtowanie sprężysto-plastycznego słupa przy ogólnym konserwatywnym zachowaniu się obciążenia*, Rozpr. Inż., 1, **19**, 1971, 65 - 83.
5. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI; *An optimal forming of a bar compressed with subtangential force in elastic-plastic range*, Arch. Mech. Stos., 2, **23**, 1971, 147 - 165.
6. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI; *Optimal Design of Elastic Columns Subject to the General Conservative Behaviour of Loading*, ZAMP, 5, **21**, 1970, 806 - 818.
7. M. FARSHAD, I. TADJBAKHSH; *Optimum Shape of Columns with General Conservative End Loading*, JOTA, 4, **11**, 1973, 413 - 420.
8. S. H. RASMUSSEN; *On the optimal shape of an elastic-plastic column*, The Danish Center for Appl. Math. and Mech., Report No. 96, Nov. 1975, 1 - 17.
9. F. R. SHANLEY; *Inelastic column theory*, J. Aeron. Sci., 12, **13**, 1946.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ, СЖИМАЕМЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛОЙ, ПРИ СТЕПЕННОМ ФИЗИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ

В настоящей работе представлено точное, аналитическое решение проблемы оптимального проектирования стержня, сжимаемого силой направленой к полюсу.

Предполагается, что материал стержня нелинейно-упругий или упруго-пластический и может быть определенный степенным физическим законом.

В работе принято во внимание тоже неравенственные ограничивающие условия на критические напряжения или на площадь поперечного сечения.

Summary

OPTIMAL DESIGN OF THE BARS, COMPRESSED BY A POLAR FORCE, SUBJECT TO THE POWER PHYSICAL LAW

In this paper, the exact analytical solution to the problem of optimal design of a cantilever compressed by a polar force is presented.

It is assumed that the material of the bar is nonlinearly elastic or elasto-plastic and it may be described by the power physical law.

The inequality constraints on the critical stress or cross-sectional area have been taken into account.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1978 roku