

NIELINIOWA, STATYCZNA I DYNAMICZNA ANALIZA POWŁOK METODĄ
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH¹⁾

MICHAŁ KLEIBER (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

W wyniku znacznego w ostatnim dziesięcioleciu rozwoju metody elementów skończonych stało się obecnie możliwe uzyskiwanie zadawalających projektanta (tj. dostatecznie dokładnych) rozwiązań nawet dla trudnych zagadnień brzegowych w zakresie liniowej statyki powłok. Postępujące udoskonalenia odpowiednich programów obliczeniowych uczyniły z rozwiązywania prawie wszystkich zagadnień dotyczących liniowej teorii powłok standardową czynność, stosunkową prostą do bezpośredniego i natychmiastowego wykonania. Pomimo, iż dla pewnej klasy zagadnień (jak np. obciążenia skupione, koncentracja naprężeń, nieciągłe warunki brzegowe) problemy wyboru typu elementu czy też sposobu dyskretyzacji konstrukcji wymagają dalszych studiów i ulepszeń, można w zasadzie stwierdzić, że istniejące procedury numeryczne pozwalają na obliczanie w ekonomicznie uzasadniony sposób liniowo-sprężystych powłok z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością.

W dziedzinie obliczeń konstrukcji powłokowych pracujących (lub przewidzianych do pracy np. w warunkach awaryjnych) w zakresie geometrycznie i materiałowo nieliniowym sytuacja jest daleko bardziej skomplikowana.²⁾ Niezwykła zawiłość analityczna (czy nawet, niekiedy, pojęciowa) zagadnień takich jak: redystrybucje naprężeń wynikające z lokalnych uplastycznień materiału, lokalne odciążenia w obszarach uprzednio uplastycznionych, różne rodzaje utraty stateczności czy wzajemny wpływ na siebie (sprężenie) obu przyczyn nieliniowości (nieliniowej charakterystyki materiału i dużych przemieszczeń) były powodem, że dotychczas podejmowano tylko niewiele prób pełnego, nieliniowego opisu zachowania się powłok. W szczególności rozwiązanie zagadnień utraty stateczności nie jest, i nie może być, proste i natychmiastowe. Podejście do badania stateczności konstrukcji różni się bowiem od przypadku do przypadku i nie jest możliwe zbudowanie jednego programu zdolnego do przeanalizowania wszystkich problemów związanych z poszukiwaniem osobliwości w rozwiązaniach dla powłok o dowolnym kształcie. Jeśli chodzi o problematykę plastyczności to największe kłopoty sprawia tu wybór odpowiednich elementów skończonych zdolnych do zadawalającego opisu rozprzestrzeniania się stref uplastycznionych zarówno wzdłuż powierzchni jak i po grubości powłoki.

¹⁾ Uwagi w oparciu o doświadczenia uzyskane przy opracowywaniu programów SHELAX, SHELIN, SHENON, LARSTRAN, DYNAX.

²⁾ Szerokie omówienie różnych sytuacji praktycznych, wymagających obliczenia konstrukcji powłokowych w oparciu o teorie nieliniowe przedstawiono w [1].

Aby więc podjąć trud dokładnej, nieliniowej analizy powłoki potrzeba uprzednio dobrze zrozumieć i przewidzieć różne skomplikowane zjawiska zachodzące w konstrukcjach powłokowych i stosownie do tego zdecydować się na taką lub inną technikę numeryczną. Nawet dysponując gotowym programem nieliniowej analizy powłok użytkownik będzie musiał podejmować decyzje dotyczące uwzględniania jednych i pomijania innych efektów nieliniowych w toku konkretnych obliczeń numerycznych. Uwzględnienie wszystkich przyczyn ewentualnego nieliniowego zachowania się powłoki powodować będzie bowiem prawie zawsze olbrzymie komplikacje numeryczne (konieczność szerokiego korzystania z pamięci zewnętrznych maszyny cyfrowej, kłopoty ze zbieżnością procedur iteracyjnych, ewentualna konieczność pracy z wykorzystaniem podwójnej precyzji, wielokrotne zwiększenie się kosztu obliczeń).

Z rozważań powyższych wynika pierwsza ogólna konkluzja (następne podamy w dalszym toku pracy):

Stosując metody numeryczne w nieliniowych zagadnieniach powłok szczególną uwagę przypisać należy gruntownemu zrozumieniu fizycznych podstaw odnośnej problematyki. Znaczące wyniki i ich odpowiednią interpretację uzyskać można wyłącznie w oparciu o taką wiedzę.

W szczególności godne polecenia wydaje się przestudiowanie przed przystąpieniem do konkretnych obliczeń istniejących rozwiązań analitycznych i numerycznych dotyczących utraty stateczności i zachowania pokrytycznego różnych prostych konstrukcji sprężystych i niesprężystych takich jak kolumny, układy prętów, prostsze przypadki płyt.

2. Podstawy nieliniowej analizy powłok

Elementy skończone stosowane dotychczas do analizy powłok podzielić można na pięć zasadniczych grup:

- a) elementy płaskie, otrzymywane na drodze prostej superpozycji elementów tarczowych i płytowych,
- b) elementy zakrzywione, otrzymywane na bazie różnych teorii powłok (najczęściej na bazie teorii cienkich powłok mało wyniosłych),
- c) trójwymiarowe elementy izoparametryczne, dla których wprowadzono w dyskretyzowanej postaci pewne założenia teorii powłok,
- d) „nieformalne” elementy oparte na tzw. metodzie „physical lumping”,
- e) elementy do analizy zagadnień specjalnych, wśród których największą grupę stanowią elementy do analizy zagadnień o osiowosymetrycznej geometrii z osiowo- lub nieosiowosymetrycznym obciążeniem.

Żadna z wymienionych wyżej grup elementów (a) - (d) nie została w praktyce uznana za zdecydowanie lepszą od pozostałych. Elementy „dokładniejsze” dają lepsze wyniki kosztem dużego nakładu pracy przy opracowywaniu danych wejściowych, skomplikowania algorytmów numerycznych oraz trudności z interpretacją wyników. Stosowanie elementów prostszych (np. płaskich) usuwa wprawdzie większość z tych trudności, powoduje jednakże różne komplikacje szczególnie przy opisie powłok silnie zakrzywionych oraz w zagadnieniach wrażliwych na imperfekcje geometrii. W ogólności stwierdzić należy, że:

W obecnej fazie rozwoju metody elementów skończonych wydaje się celowe budowanie programów w oparciu o wszystkie wymienione wyżej rodzaje elementów. Ostateczna decyzja co do ich użycia w konkretnym zagadnieniu spoczywać powinna w ręku użytkownika i zapadać w oparciu o zwiększającą się stale liczbę testów i porównań publikowanych w literaturze światowej.

Różne rodzaje elementów wykorzystanych w programach opracowanych w IPPT omówimy w rozdz. 4, próbując scharakteryzować szerzej ich wady i zalety. Przedtem jednak przedstawimy pewne podstawowe aspekty nieliniowego opisu powłok obowiązujące niezależnie od rodzaju zastosowanego elementu.

Formułując problemy z zakresu nieliniowej mechaniki powłok stosujemy zazwyczaj przyrostowy opis zagadnień, brzegowo-początkowych. Dla materiałów sprężystych analizowanych w zakresie geometrycznie nieliniowym opis taki jest jedynie jednym z możliwych podejść do rozwiązywania zagadnień brzegowo-początkowych podczas gdy dla materiałów charakteryzowanych przyrostowym równaniem konstytutywnym jest on koniecznością.

Celem naszym będzie określenie położenia analizowanego ciała \mathcal{B} i istniejącego w tym ciele stanu naprężenia w kolejnych, dyskretnych chwilach czasu $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots$ gdzie Δt jest przyrostem czasu zaś t_0 początkową chwilą analizy. Zakładać będziemy, że znamy pewne rozwiązanie dla wszystkich kroków po czasie z przedziału $[t_0, t]$ (włącznie z chwilą t , którą nazywać będziemy chwilą aktualną), poszukiwać zaś będziemy rozwiązania w chwili $t + \Delta t$. Sformułowany w ten sposób problem jest problemem typowym (powtarzalnym) i zastosowany do kolejnych chwil czasu umożliwia znalezienie całej drogi położenia równowagi ciała.

Istotną rolę przy ocenie efektywności numerycznej, geometrycznie nieliniowej analizie powłok odgrywają układy współrzędnych, w których wyrażane są poszczególne równania teorii. W zagadnieniach geometrycznie liniowych bezdyskusyjny jest wybór nieruchomego układu odniesienia. Wykorzystywane w standardowych algorytmach metody elementów skończonych lokalne (dla każdego elementu), ale stałe w czasie układy współrzędnych służą jedynie wygodzie algebraicznych przekształceń na poziomie elementu i nie są warunkowane kinematyką procesu deformacji. Odmienną sytuację napotykamy w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, w których duże przemieszczenia w naturalny sposób podsuwają jeden z dwu następujących lokalnych (dla każdego elementu) opisów:

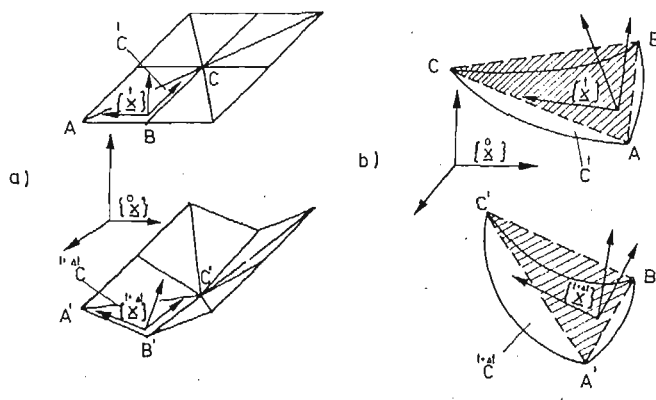
- a) opis w stałym układzie początkowym,
- b) opis w układzie konwekcyjnym (lub w układzie będącym jego modyfikacją, np. w układzie współobrotowym).

Aby to bliżej wyjaśnić rozpatrzmy duże przemieszczenia płaskiego elementu powłokowego pokazane na rys. 1a. Stwierdzamy, że aby w pełni zachować korzyści płynące z dwuwymiarowości opisu tych elementów możemy:

- a) sprowadzić wszystkie rozważania do konfiguracji pierwotnej ${}^{\circ}C$ (stałego w czasie układu współrzędnych początkowych), w której elementy zachowują swój pierwotny kształt,
- b) wprowadzić konwekcyjny układ współrzędnych; ze względów rachunkowych wygodnie jest ograniczyć się do układów zachowujących swą ortogonalność i prostoliniowość, a więc to tzw. układów współobrotowych.

Podejście (a) nazywać będziemy stacjonarnym opisem Lagrange'a zaś podejście (b) uaktualnionym opisem Lagrange'a.

Rozważania powyższe są przekonywujące w przypadku przedstawionego na rys. 1a najprostszego, płaskiego elementu powłokowego. Jednakże, jak się okazuje, również dla elementów zakrzywionych wygodnie jest mieć ortogonalny układ współrzędnych



Rys. 1

prostoliniowych związany z elementem w sposób pokazany na rys. 1b, przy czym należy oczywiście odpowiednio zdefiniować, co rozumie się pod słowem „współobrotowy”. Obroty różnych cząstek elementu są bowiem różne i należy wybrać pewien uśredniony, „globalny” obrót elementu, definiowany najwygodniej przez ruch węzłów.

Omawiany układ współrzędnych lokalnych jest oczywiście tylko jednym z kilku układów współrzędnych, które wprowadzić należy analizując konstrukcje powłokowe. W szczególności zawsze wprowadzić musimy:

- stały w czasie globalny układ współrzędnych traktowany jako układ odniesienia przy definiowaniu danych wejściowych,
- wspólny dla wszystkich elementów układ współrzędnych umożliwiający „złożenie” konstrukcji w całość.

Przykłady definiowania wszystkich wymienionych wyżej układów współrzędnych podamy w rozdz. 4. Na podstawie powyższych uwag stwierdzamy, że:

Przystępując do opracowywania programu nieliniowej analizy powłok należy zawsze dokonać świadomego wyboru konfiguracji odniesienia i odpowiednich układów współrzędnych kierując się przy tym:

- wygoda (kosztem) obliczeń,
- fizycznym charakterem równań (np. postulatem przestrzennej addytywności miar odkształceń sprężystych i plastycznych).

We wszystkich omawianych programach za podstawę przyjęto klasyczną teorię powłok Love'a-Kirchhoffa oraz klasyczne sformułowanie teorii sprężysto-plastyczności Prandtl-Reussa z izotropowym wzmocnieniem. Do opisu kinematyki procesu deformacji stosowano uaktualniany opis Lagrange'a wykorzystując współobrotowy, lokalny układ współrzędnych kartezjańskich. Konsekwencją tego podejścia było postulowanie równania

konstytutywnego w postaci związku między II-im tensorem przyrostu naprężenia Pioli-Kirchhoffa odniesionym do aktualnej konfiguracji ciała a przyrostem odkształcenia Greena zdefiniowanym na tej konfiguracji.²⁾ Takie definicje podstawowych niewiadomych wymagały przeprowadzania odpowiedniego procesu akumulacji poszczególnych wielkości przyrostowych oraz transformacji wielkości globalnych przy końcu każdego kroku, por. [2], [3].

Określenie macierzy konstytutywnej łączącej przyrosty uogólnionych naprężeń (tj. sił wewnętrznych) z przyrostami uogólnionych odkształceń (tj. odkształceń i krzywizn powierzchni środkowej powłoki) wymagało, odmiennie niż to jest w przypadku sprężystym, stosowania metod całkowania numerycznego. Spowodowane to jest skomplikowanym, nieliniowym charakterem rozkładu naprężeń po grubości powłoki i zależnością macierzy konstytutywnej materiału od aktualnego stanu naprężenia. Ponieważ w przekrojach, w których dominującym typem deformacji jest zginanie sztywność materiału konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym zmienia się po grubości bardzo znacznie, powodowało to konieczność uwzględniania w trakcie procesu całkowania numerycznego dużej liczby punktów całkowania (10, 12 i więcej punktów). W opracowywanych programach przyjęto prosty sposób całkowania numerycznego po grubości powłoki mający fizyczną interpretację w postaci analizy powłoki podzielonej na warstwy.

Aby zapewnić zbieżność ciągów rozwiązań przybliżonych otrzymywanych w oparciu o metodę elementów skończonych do rozwiązania dokładnego funkcje aproksymujące stan przemieszczenia spełniać muszą trzy zasadnicze warunki:

1. dostateczną gładkość poprzez brzegi międzyelementowe,
2. możliwość modelowania jednorodnych stanów odkształcenia,
3. wytwarzanie zerowych odkształceń przy sztywnych ruchach elementów.

Warunki te są identyczne jak w analizie liniowej. Uwagi dotyczące ich spełnienia przez różne elementy zamieścimy w trakcie omawiania poszczególnych, zrealizowanych programów.

Następną uwagę poświęcimy istotnej sprawie „składania” płaskich elementów powłokowych ze sobą w celu utworzenia podstawowego układu równań konstrukcji. Jako wspólny układ współrzędnych służący temu celowi przyjmuje się zazwyczaj:

- a) globalny układ współrzędnych kartezjańskich,
- b) układ współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni środkowej powłoki, przy czym przeważnie układ ten definiowany jest poprzez płaszczyzny styczne do powłoki przyjmowane jako pewne uśrednione płaszczyzny sąsiadujących ze sobą elementów.

Jak podkreślaliśmy poprzednio, poszczególnym węzłom konstrukcji powłokowej przypisuje się zazwyczaj pięć stopni swobody, w taki sposób, że węzły te nie mają sztywności względem obrotu wokół normalnej do powłoki. Aby „złożyć” płaskie elementy powłokowe ze sobą w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych, którego orientacja przestrzenna może być znacznie różna od orientacji układów lokalnych w elementach, często konieczne jest wzięcie pod uwagę wszystkich sześciu stopni swobody węzła. Spowodowane jest to koniecznością posiadania nieosobliwej transformacji od układu lokalnego

²⁾ Definicje tych wielkości, a także uzasadnienie konieczności ich użycia przy uaktualnionym opisie Lagrange'a podano w pracy [2].

do układu globalnego w przypadku koplanarności elementów sąsiadujących z danym węzłem. W praktyce dokonuje się tej transformacji przypisując rozpatrywanemu węzłowi pewną fikcyjną sztywność względem obrotu wokół normalnej, stwierdzono bowiem na drodze numerycznych doświadczeń zadawalającą zgodność wyników otrzymywanych nawet dla znacznie różniących się od siebie wartości tej fikcyjnej sztywności.

Znacznie prościej przedstawia się sytuacja w przypadku korzystania w celu utworzenia globalnej macierzy sztywności z układu współrzędnych powierzchniowych. Przyjmując za płaszczyznę styczną do powłoki pewną płaszczyznę powstałą z uśrednienia płaszczyzn elementów sąsiadujących z danym węzłem dokonać można transformacji między poszczególnymi grupami pięciu stopni swobody wyrażonych w układach lokalnych a pięcioma stopniami swobody wyrażonymi we wspólnym układzie powierzchniowym, wpływ bowiem szóstego stopnia swobody na tę transformację uznać można za pomijalnie mały. Prowadzi to do znacznych oszczędności czasu obliczeń³⁾ ma jednak wadę w postaci trudności przy analizowaniu powłok o gwałtownych zmianach kształtu (np. analiza żebra traktowanego jako zwykły element powłokowy). Dalszymi zaletami takiego podejścia są:

- otrzymywanie składowych stanu pomieszczenia i obrotu w układzie współrzędnych ściśle związanym z powłoką,
- brak jakichkolwiek kłopotów w przypadku koplanarności wszystkich elementów sąsiadujących z danym węzłem.

Jak wiadomo, bardzo szeroką klasę nieliniowych zagadnień mechaniki continuum, w tym również zagadnienia nieliniowej mechaniki powłok, opisać można w ramach przemieszczeniowego modelu metody elementów skończonych układem równań algebraicznych postaci

$$(1) \quad \mathbf{K} \Delta \mathbf{r}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{R}_t - \mathbf{J}_{t-\Delta t},$$

gdzie

$$(2) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^{\text{konst.}} + \mathbf{K}^{\text{pocz. przem.}} + \mathbf{K}^{\text{pocz. napr.}} + \mathbf{K}^{\text{niekons. obc.}},$$

przy czym wprowadzono te oznaczenia:

- \mathbf{K} — globalna macierz sztywności konstrukcji,
- $\mathbf{K}^{\text{konst}}$ — macierz sztywności konstytutywnej,
- $\mathbf{K}^{\text{pocz. przem.}}$ — macierz początkowych przemieszczeń,
- $\mathbf{K}^{\text{pocz. napr.}}$ — macierz początkowych naprężeń,
- $\mathbf{K}^{\text{niekons. obc.}}$ — macierz obciążeń niekonserwatywnych,
- \mathbf{C} — macierz tłumienia,
- \mathbf{M} — macierz mas,
- \mathbf{R}_t — wektor obciążenia zewnętrznego węzłów (w chwili t),
- \mathbf{r}_t — wektor uogólnionych przemieszczeń węzłów (w chwili t),
- $\mathbf{J}_{t-\Delta t}$ — wektor „wewnętrznych” sił węzłowych odpowiadający poprzedniemu krokowi analizy.

³⁾ Uwzględnienie 6-go stopnia swobody powoduje wzrost czasu rozwiązywania podstawowego układu równań około $\left(\frac{6}{5}\right)^3 \approx 1.728$ razy.

Równanie (1), zależnie od geometrii i materiału konstrukcji, rodzaju obciążenia, zastosowanego opisu (stacjonarny lub uaktualniony) oraz wybranego układu współrzędnych, doprowadzić można do jawnej postaci, dla której wybrać należy odpowiednią metodę rozwiązywania.

3. Uwagi na temat algorytmów rozwiązywania nieliniowych zagadnień powłokowych

Metody rozwiązywania statycznych i dynamicznych zagadnień powłokowych nie różnią się zasadniczo od metod rozwiązywania odpowiednich problemów mechaniki continuum. Poniżej dokonamy krótkiego przeglądu tych metod zaś do klasyfikacji tej nawiążemy w rozdz. 4 wskazując na podejścia zastosowane w zrealizowanych programach.

(A) Zagadnienia statyczne

Pomijając człony dynamiczne zapiszmy równanie (1) w postaci

$$(3) \quad (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{R} - \mathbf{J}^*$$

gdzie \mathbf{K}_1 jest częścią macierzy sztywności \mathbf{K} stałą w trakcie procesu deformacji, $\mathbf{K}_2 \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_1$, $\Delta\mathbf{R}$ jest przyrostem obciążenia zewnętrznego na danym kroku zaś \mathbf{J}^* odpowiednio zmodyfikowanym wektorem wypadkowych sił węzłowych wyrażających fakt niezrównoważenia węzłów. Niezrównoważenie to jest wynikiem błędów przybliżeń numerycznych powstałych na poprzednich krokach analizy. Macierz \mathbf{K}_2 jest funkcją aktualnego stanu powłoki co symbolicznie zapiszemy jako $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2(\sigma, \mathbf{r}, \dots)$.

Istnieją dwie podstawowe metody rozwiązywania zagadnienia przyrostowego opisanego równaniem (3), które scharakteryzujemy krótko poniżej.

(A1) *Metoda zmiennej sztywności.* Metoda ta polega na rozwiązywaniu równania (3) dla kolejnych przyrostów obciążenia uwzględniając zmiany macierzy sztywności odpowiadające rozprzestrzenianiu się stref plastycznych w analizowanej powłoce. Po wykonaniu obliczeń danego kroku należy akumulować otrzymane wielkości przyrostowe i na podstawie obliczonych wielkości globalnych charakteryzujących proces (naprężenie, odkształcenie plastyczne, parametry wzmocnienia) określić nową macierz sztywności powłoki. Metoda powyższa, ze względu na swą prostotę i łatwość interpretacji poszczególnych operacji algebraicznych w ramach mechaniki, jest szeroko stosowana we wszystkich prawie programach dotyczących dyskretyzowanych metod w nieliniowej analizie powłok.

Rozpatrzmy dowolny i -ty krok analizy prowadzonej w oparciu o równanie (3), $i = 1, 2, \dots, n$. Wprowadzimy, dla dowolnej funkcji f charakteryzującej rozpatrywany proces, symbol $f^{(i)}$ na oznaczenie wartości funkcji f odpowiadającej początkowi i -tego kroku, zaś symbol $\Delta f^{(i,i+1)}$ ma oznaczenie wartości przyrostu funkcji f na tym kroku. W metodzie zmiennej sztywności stosujemy algorytm postępowania dany równaniami

$$(4) \quad \begin{aligned} & [\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots)]\Delta\mathbf{r}^{(i,i+1)} = \Delta\mathbf{R}^{(i,i+1)}, \\ & \Delta\mathbf{r}^{(i,i+1)} = [\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}]^{-1}\Delta\mathbf{R}^{(i,i+1)}, \\ & \mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \Delta\mathbf{r}^{(i,i+1)}, \\ & \sigma^{(i+1)} = \sigma^{(i)} + \Delta\sigma^{(i,i+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^{(i+1)} &= \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots), \\ [\mathbf{K}_1^{(i+1)} + \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots)] \Delta r^{(i+1, i+2)} &= \Delta R^{(i+1, i+2)}, \\ \mathbf{K}_1^{(i)} &= \mathbf{K}_1^{(i+1)}. \end{aligned}$$

Metoda zmiennej sztywności nie jest wolna od wad. Zaliczyć do nich należy przede wszystkim:

1. konieczność wielokrotnego (na każdym kolejnym kroku) rozwiązywania podstawowego układu równań z nową, uaktualnioną macierzą sztywności,
2. mała efektywność metody w zagadnieniach prowadzących do niesymetrycznej macierzy sztywności (np. przy uwzględnieniu niestowarzyszonych praw płynięcia plastycznego materiału powłoki czy też obciążeń zewnętrznych typu śledzącego),
3. trudne do oszacowania błędy „odchodzenia” od rozwiązania dokładnego wraz ze wzrostem liczby przyrostów,
4. trudności związane ze złym uwarunkowaniem globalnej macierzy sztywności w otoczeniu punktów krytycznych.

Istnieje wiele metod poprawiania dokładności rozwiązań uzyskiwanych metodą zmiennej sztywności. Jedną z nich, tzw. metodę sił korekcyjnych, opisać można formalnie zależnościami

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots)) \Delta r^{(i, i+1)} &= \Delta R^{(i, i+1)} - \mathbf{J}^{*(i)}, \quad \mathbf{J}^{*(1)} = 0, \\ \Delta r^{(i, i+1)} &= [\mathbf{K}_1^{(i)} + \mathbf{K}_2^{(i)}]^{-1} [\Delta R^{(i, i+1)} - \mathbf{J}^{*(i)}], \\ r^{(i+1)} &= r^{(i)} + \Delta r^{(i, i+1)}, \\ \sigma^{(i+1)} &= \sigma^{(i)} + \Delta \sigma^{(i, i+1)}, \\ \mathbf{K}_2^{(i+1)} &= \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots), \\ \mathbf{J}^{*(i+1)} &= [\mathbf{K}_1^{(i+1)} + \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots)] \Delta r^{(i, i+1)} - \Delta R^{(i, i+1)}, \\ (\mathbf{K}_1^{(i+1)} + \mathbf{K}_2^{(i+1)}(\sigma^{(i+1)}, \dots)) \Delta r^{(i+1, i+2)} &= \Delta R^{(i+1, i+2)} - \mathbf{J}^{*(i+1)}. \end{aligned}$$

Stosowanie metody zmiennej sztywności uwzględniającej siły korekcyjne wymaga wykonania jedynie niewielkiej liczby dodatkowych operacji mnożenia, potrzebnych do określenia wektora danego wzorem (5)₆. Nie wymaga ono natomiast rozwiązywania nowego układu równań ani też stosowania jakichkolwiek procedur iteracyjnych.

(A2) **Metoda początkowych obciążeń.** Metoda ta ma charakter iteracyjny; k -tą iterację na i -tym kroku analizy przyrostowej opisać można w sposób następujący:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^{*(i;k)} &= \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots) \Delta r^{(i, i+1; k-1)}, \\ \mathbf{K}_1^{(i)} \Delta r^{(i, i+1; k)} &= \Delta R^{(i, i+1)} + \mathbf{J}^{*(i;k)}, \\ \Delta r^{(i, i+1; k)} &= \mathbf{K}_1^{(i)-1} [\Delta R^{(i, i+1)} + \mathbf{J}^{*(i;k)}], \\ \mathbf{J}^{*(i; k+1)} &= \mathbf{K}_2^{(i)}(\sigma^{(i)}, \dots) \Delta r^{(i, i+1; k)}, \\ |\mathbf{J}^{*(i;k)} - \mathbf{J}^{*(i; k+1)}| &\stackrel{?}{<} \eta \end{aligned}$$

gdzie η jest zadaną dokładnością procesu iteracyjnego. Proces powyższy kontynuujemy aż do momentu, w którym dwa kolejno obliczone wektory węzłowych obciążeń początkowych $\mathbf{J}^{*(i;k)}$, $\mathbf{J}^{*(i; k+1)}$ różnić się będą dostatecznie mało od siebie. Na każdym kroku analizy proces iteracyjny rozpocząć można zakładając $\Delta r^{(i, i+1; 0)} = 0$ lub, co jest bardziej efektywne, $\Delta r^{(i, i+1; 0)} = \Delta r^{(i-1, i)}$.

Zasadniczą zaletą metody obciążeń początkowych jest konieczność tylko jednokrotnego odwrócenia macierzy sztywności (która jest stała w trakcie procesu deformacji), wada zaś natomiast często napotykanne kłopoty ze zbieżnością procedury iteracyjnej. Nie istnieją bowiem w przypadku powłok żadne ścisłe kryteria dotyczące tej zbieżności⁴⁾.

Bardzo istotną sprawą przy stosowaniu metody początkowych obciążeń jest sposób kolejnego określania sił węzłowych, bowiem w praktyce nie korzysta się tu bezpośrednio ze wzoru (6)₁ wprowadzonego powyżej jedynie w celu uzyskania większej zwartości opisu omawianego algorytmu obliczeń. Dwie, zasadniczo różne od siebie, metody określenia dodatkowych sił węzłowych noszą w literaturze nazwy: metoda początkowych naprężeń i metoda początkowych odkształceń. W praktyce okazuje się, że zbieżność metody początkowych naprężeń jest znacznie słabsza od zbieżności metody początkowych odkształceń i właśnie ta druga metoda stosowana jest powszechnie w programach sprężysto-plastycznej analizy powłok.

(B) Zagadnienie dynamiczne

Podstawowe algorytmy rozwiązywania układu równań (1) omówimy na przykładzie prostszego przypadku dynamicznej analizy zagadnień liniowo-sprężystych opisanym równaniem

$$(7) \quad M\ddot{r}_t + C\dot{r}_t + Kr_t = R_t.$$

Procedura tworzenia globalnych macierzy mas i tłumienia jest analogiczna do procedury budowy globalnej macierzy sztywności w zagadnieniach statycznych⁵⁾. Polega ona na bezpośrednim sumowaniu odpowiednich macierzy poszczególnych elementów utworzonych w lokalnych układach współrzędnych i przetransformowanych do układu globalnego.

Podstawy konstrukcji elementów macierzy tłumienia są bardzo słabo zbadane co wynika z ogólnego braku informacji na temat mechanizmów pochłaniania energii w skomplikowanych układach konstrukcyjnych. Zamiast więc prób bardziej ogólnego definiowania tej macierzy ustala się zazwyczaj pewne parametry tłumienia dla poszczególnych postaci drgań powłoki w oparciu o doświadczenia uzyskane przy analizie podobnych układów. Ustalone w ten sposób parametry tłumienia modalnego mogą być bezpośrednio wykorzystane do analizy o ile stosujemy przy rozwiązywaniu tzw. metodę superpozycji modalnej lub też przetransponowane do postaci równoważnej macierzy tłumienia C w przypadku bezpośredniego całkowania równań ruchu.

Dla wszystkich elementów powłokowych istnieje możliwość budowania tzw. konsystentnej macierzy mas w oparciu o te same założenia aproksymujące, które przyjęto przy konstrukcji macierzy sztywności. Konsystentną macierz mas określa się na podstawie równania, które symbolicznie napisać można jako

$$(8) \quad M = \int_V \rho \Phi^T \Phi dV,$$

⁴⁾ Kryteria takie istnieją tylko dla niektórych, najprostszych zagadnień z zakresu sprężysto-plastyczności, np. zagadnień płaskiego stanu naprężenia w materiale ze wzmocnieniem izotropowym.

⁵⁾ Pełną analogię wykazuje również zagadnienie szóstego (obrót wokół normalnej do powłoki) stopnia swobody w węźle.

gdzie M jest macierzą mas rozpatrywanego elementu, ρ gęstością masy materiału zaś Φ wektorem odpowiednich funkcji kształtu. Na podstawie (8) stwierdzamy, że dla funkcji kształtu będącej wielomianem np. 3-go stopnia przy określaniu mas całkowaniu podlega wielomian stopnia 6-go. W przypadku korzystania z procedur całkowania numerycznego prowadzić to może do konieczności użycia znacznej liczby punktów całkowania czyniąc z takiego postępowania metodę bardzo kłopotliwą i kosztowną (w porównaniu z numerycznym całkowaniem potrzebnym do określenia macierzy sztywności tego samego elementu).

Alternatywną procedurą jest tworzenie uproszczonej, diagonalnej macierzy mas w oparciu o założenie istnienia skoncentrowanych mas w punktach węzłowych. Ze względu na kłopoty numeryczne przy określaniu macierzy konsystentnej oraz zupełnie zadowalające wyniki otrzymywane przy korzystaniu z macierzy diagonalnej w wielu programach dynamicznej analizy powłok stosuje się to drugie podejście. Diagonalna macierz mas zapewnia bowiem dużą efektywność całkowania względem czasu równania (7) nawet w przypadku znacznej liczby stopni swobody analizowanego zakładu.

Poniżej scharakteryzujemy krótko dwa podstawowe podejścia stosowane do przybliżonego całkowania równań ruchu (7), za które uważa się grupę metod bezpośredniego całkowania oraz metodę superpozycji modalnej.

(B1) Metody bezpośredniego całkowania. W metodach tych równanie (7) całkowane jest względem czasu metodą „krok po kroku”, zaś określenie „bezpośrednie całkowanie” oznacza, że przed przystąpieniem do całkowania równania tego nie podajemy żadnej transformacji. Metody bezpośredniego całkowania oparte są na dwu podstawowych założeniach. Po pierwsze zakładamy, że równanie (7) ma być spełniane tylko w wybranych chwilach czasu $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_1$ nie zaś w całym przedziale czasu $[t_0, t_1]$. Po drugie, zakładamy z góry pewną zmienność przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w zapytrywanym, typowym przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$. Ponieważ zaś równanie (7) jest wektorowym równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach, do wyrażenia prędkości i przyspieszeń w funkcji przemieszczeń zastosować można w zasadzie dowolną aproksymację różnicową pochodnych czasowych. Jak się jednak okazuje, tylko kilka wyrażań prowadzi do dostatecznie efektywnych algorytmów.

W metodzie różnic centralnych przyjmujemy

$$(9) \quad \ddot{r}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2} [r_{t-\Delta t} - 2r_t + r_{t+\Delta t}],$$

$$(10) \quad \dot{r}_t = \frac{1}{2\Delta t} [-r_{t-\Delta t} + r_{t+\Delta t}],$$

co w połączeniu z (7) prowadzi do

$$(11) \quad \left[\frac{M}{(\Delta t)^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right] r_{t+\Delta t} = R_t - \left[K - \frac{2M}{(\Delta t)^2} \right] r_t - \left[\frac{M}{(\Delta t)^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] r_{t-\Delta t}.$$

Wzór (11) przedstawia układ równań liniowych, z którego znając $r_t, r_{t-\Delta t}$ oraz R_t wyliczyć można $r_{t+\Delta t}$. Procedurę powyższą nazywamy metodą całkowania jawnego; zauważmy, że procedura ta nie wymaga odwracania macierzy sztywności K co, szczególnie gdy mamy do czynienia z diagonalnymi macierzami mas i tłumienia, jest jej olbrzymią zaletą. Dodajmy

ponadto, że ponieważ do obliczenia $r_{t+\Delta t}$ potrzebna jest znajomość r_t i $r_{t-\Delta t}$, dla $t = t_0$ zachodzi konieczność opracowania pewnej procedury „startowej”, która w celu określenia $r_{t_0+\Delta t}$ nie korzystałaby z wielkości $r_{t_0-\Delta t}$. Inną, znacznie poważniejszą wadą metody różnic centralnych jest konieczność doboru długości kroku po czasie Δt w taki sposób, aby była ona mniejsza od pewnego czasu krytycznego Δt_{kr} , zależnego od własności całego układu. W przeciwnym bowiem wypadku otrzymywane rozwiązanie cechuje brak stabilności. Zachodzić powinno

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi}$$

gdzie T_n jest najmniejszym okresem drgań własnych układu. Warunek ten jest bardzo silnym ograniczeniem długości kroku i, mimo iż w pewnych sytuacjach nie musi być on w pełni przestrzegany, stwarza poważne przeszkody w efektywnym wykorzystaniu omawianego algorytmu.

Drugą metodę, którą przedstawimy w niniejszym opracowaniu, jest metoda całkowania niejawnego typu Wilsona, zwana także metodą parametru ϑ . W metodzie tej zakładamy

$$(12) \quad \ddot{r}_{t+\tau} = \dot{r}_t + \frac{\tau}{\vartheta \Delta t} (\ddot{r}_{t+\vartheta \Delta t} - \ddot{r}_t),$$

gdzie $\tau \in [0, \vartheta \Delta t]$, $\vartheta \geq 1$, co prowadzi do zależności

$$(13) \quad \ddot{r}_{t+\vartheta \Delta t} = \frac{6}{\vartheta^2 (\Delta t)^2} (r_{t+\vartheta \Delta t} - r_t) - \frac{6}{\vartheta \Delta t} \dot{r}_t - 2\ddot{r}_t,$$

$$(14) \quad \dot{r}_{t+\vartheta \Delta t} = \frac{3}{\vartheta \Delta t} (r_{t+\vartheta \Delta t} - r_t) - 2\dot{r}_t - \frac{\vartheta \Delta t}{2} \ddot{r}_t.$$

Podstawiając (13) i (14) do równania ruchu wypisanego dla chwili $t + \vartheta \Delta t$ otrzymujemy równanie, z którego wyliczyć można $r_{t+\vartheta \Delta t}$ a następnie otrzymać $\dot{r}_{t+\Delta t}$, $\ddot{r}_{t+\Delta t}$, $r_{t+\Delta t}$. W algorytmie tym nie zachodzi potrzeba opracowywania dodatkowej procedury „startowej”, bowiem przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w chwili $t + \Delta t$ wyrażone są w funkcji wielkości zdefiniowanych jedynie dla chwili t . Metoda Wilsona wymaga triangularyzacji macierzy sztywności dla każdej dyskretnej chwili czasu. Metoda ta jest bezwarunkowo stabilna dla $\vartheta \geq 1,37$; powszechnie przyjmuje się $\vartheta = 1,4$.

(B2) Metoda superpozycji modalnej. Metoda ta polega na przetransformowaniu równania ruchu (7) do prostej, rozprężonej postaci⁶⁾

$$(15) \quad \ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = P(t),$$

otrzymanej za pomocą macierzy transformacji utworzonej z rozwiązań $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ zagadnienia na wartości i wektory własne postaci

$$(16) \quad \mathbf{K}\Phi = \omega^2 \mathbf{M}\Phi,$$

przy czym Ω^2 jest diagonalną macierzą o wyrazach będących kwadratami kolejnych wartości własnych $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Układ równań (15) przedstawić można w postaci n niezależnych od siebie równań skalarnych postaci

$$(17) \quad \ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

⁶⁾ Dla prostoty pominięliśmy wpływ tłumienia.

do rozwiązania których wykorzystać można jedną z wielu znanych metod całkowania równań różniczkowych zwyczajnych. Aby uzyskać rozwiązanie zagadnienia (7) metodą superpozycji modalnej należy więc kolejno:

1. rozwiązać zagadnienie na wartości własne (16),
2. rozwiązać n niezależnych równań typu (17),
3. dokonać superpozycji otrzymanych rozwiązań wg. wzoru

$$(18) \quad r(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i x_i(t).$$

Rozwiązania otrzymane za pomocą metody bezpośredniego całkowania i metody superpozycji modalnej powinny być identyczne z dokładnością do błędów powstałych w wyniku całkowania numerycznego oraz błędów zaokrągleń związanych ze skończoną długością słowa maszyny cyfrowej.

Efektywność metody superpozycji modalnej zależy od liczby postaci drgań (równań typu (17)), które muszą być uwzględniane w konkretnym przypadku aby otrzymać dostatecznie dokładne rozwiązanie.

W zagadnieniach nieliniowych korzysta się z zasady z metod bezpośredniego całkowania.

4. Krótki opis zrealizowanych programów wraz z przykładami ich zastosowań

(A) Program SHELAX — statyczna analiza dużych deformacji cienkich osiowo-symetrycznych powłok sprężysto-plastycznych, [3].

Program SHELAX umożliwia statyczną analizę dużych ugięć powłok osiowosymetrycznych podpartych i obciążonych osiowosymetrycznie. Analizowane powłoki mogą posiadać wzdłuż tworzącej nieciągłą krzywiznę oraz skokowo zmienną grubość. Aby stworzyć szerokie możliwości wykorzystania programu konieczny był wybór takiego elementu skończonego, który umożliwiłby

- a) dogodność geometrycznej reprezentacji dowolnej powłoki osiowosymetrycznej,
- b) przyjęcie funkcji aproksymujących stan przemieszczenia w postaci wielomianów odpowiednio wysokich stopni.

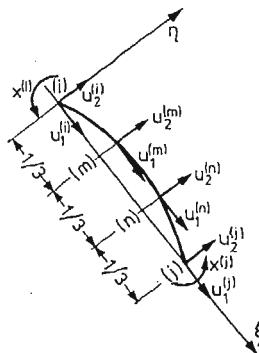
Pierwsze z powyższych wymagań spełniono przyjmując pierścieniowy element o niezerowej krzywiznie Gaussa („podwójnie” zakrzywiony) o tworzącej aproksymowanej w lokalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych bezwymiarowych $\xi-\eta$ (parametryzującym rozpatrywaną południkową płaszczyznę przekroju konstrukcji) wyrażeniem, por. rys. 2

$$(19) \quad \eta = \xi(1-\xi)(A_1 + A_2\xi + A_3\xi^2 + A_4\xi^3),$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \bar{\eta}.$$

Krzywa powyższa, przechodząc z definicji przez punkty końcowe elementu, zapewnia w tych punktach ponadto (poprzez odpowiedni dobór parametrów A_1, A_2, A_3, A_4) równość kątów nachylenia stycznej i równość krzywizn dla sąsiadujących ze sobą elementów.

W nawiązaniu do rozdz. 2 podkreślmy, że wprowadzony powyżej ruchomy układ współrzędnych $\xi-\eta$ zachowuje w trakcie procesu deformacji swą ortogonalność i prostoliniowość doznając jedynie obrotu w płaszczyźnie pokładnikowej w sposób określony



$$u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 + \alpha_5 \xi^4,$$

$$u_2(\xi) = \alpha_6 + \alpha_7 \xi + \alpha_8 \xi^2 + \alpha_9 \xi^3 + \alpha_{10} \xi^4.$$

Rys. 2

przemieszczeniami węzłów. jest to więc przykład współobrotowego układu współrzędnych wprowadzonego lokalnie dla każdego elementu.

Funkcje aproksymujące stan przemieszczenia elementu wyrażono w lokalnym układzie współrzędnych $\xi-\eta$ jako

$$(20) \quad u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 + \alpha_5 \xi^4,$$

$$u_2(\xi) = \alpha_6 + \alpha_7 \xi + \alpha_8 \xi^2 + \alpha_9 \xi^3 + \alpha_{10} \xi^4.$$

Założono, że funkcje te opisują stan przemieszczeń w elemencie skończonym o dziesięciu stopniach swobody i czterech węzłach, z których dwa wewnętrzne umieszczono w punktach $\xi = 1/3$, $\xi = 2/3$, rys. 2. Stopnie swobody odpowiadające węzłom wewnętrznym są w programie „usuwane” (na poziomie elementu!) poprzez zastosowanie procesu statycznej kondensacji. Przyjęte funkcje aproksymujące stan przemieszczenia zapewniają automatyczne spełnienie podstawowych, wymienionych w rozdz. 2, warunków, tj. warunku sztywnych ruchów elementu i warunków jednorodnych stanów odkształcenia.

Równania (20), opisujące stan przemieszczenia w dowolnym pierścieniowym elemencie powłoki osiowoosymetrycznej, zostały w pracy [1] wyspecyfikowane w sposób dogodny do opisu również elementów kopułowych. Umożliwiło to analizowanie powłok zamkniętych (kopuł).

Program SHELAX oparty jest na metodzie zmiennej sztywności z jednokrotną korektą równań równowagi na każdym kroku, por. rozdz. 3. Jako wspólny układ współrzędnych służący budowaniu macierzy sztywności konstrukcji przyjęto globalny układ współrzędnych cylindrycznych $\{r, \varphi, z\}$ (a właściwie układ $\{r, z\}$ na wybranej południowej płaszczyźnie przekroju $\varphi = \text{const.}$). Ze względu na brak możliwości obrotu wokół normalnej do powłoki w przypadku powłok osiowoosymetrycznych nie występują opisane w rozdz. 3 problemy z wprowadzaniem fikcyjnej sztywności odpowiadającej temu stopniowi swobody.

Program napisany jest w języku FORTRAN IV i składa się z około 1400 wyrażeń (kart perforowanych); w trakcie jego opracowywania korzystano z maszyny cyfrowej CYBER 72, na której też policzono wszystkie dotychczasowe przykłady.

Przykład 1

Za pomocą programu SHELAX przeprowadzono analizę czaszy kulistej poddanej działaniu siły P przyłożonej w wierzchołku czaszy, rys. 3⁷⁾. Omawianie tego problemu rozpoczniemy od przytoczenia wyników dotyczących sprężystej czaszy utwierdzonej na obwodzie. Dla przyrostu obciążenia $\Delta P = 1/b$ stwierdzono pewną rozbieżność wyników w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym podanym w [9], szczególnie w części środkowej całego zakresu analizowanych deformacji. Wiąże się to z najmniejszą sztywnością konstrukcji w tym zakresie. W celu zwiększenia dokładności obliczeń zmniejszono pięciokrotnie przyrost obciążenia co wpłynęło na znaczną poprawę dokładności rozwiązania. Omawianą czaszę poddano następnie analizie w zakresie sprężysto-plastycznym. Odpowiedni wykres obciążenie-przemieszczenie podano na rys. 4, na którym zilustrowano również charakter powstających stref plastycznych (naniesionych na nieodkształconą konfigurację powłoki).

Zmieniając warunki brzegowe powłoki z utwierdzenia na przegubowe podparcie nieprzesuwne obserwujemy jakościową różnicę w otrzymywanym rozwiązaniu. Umożliwiłoby bowiem w ten sposób wystąpienie zjawiska globalnej utraty stateczności czaszy w postaci tzw. przeskoaku. Wartości obciążenia krytycznego dla powłoki sprężystej i sprężysto-plastycznej, jak również odpowiednie kształty powłoki w chwili przeskoaku podano na rys. 5.

(B) program SHENON⁸⁾ — statyczna analiza dużych przemieszczeń i stateczności cienkich powłok dowolnego kształtu, [1], [4], [5], [6].

Program SHENON umożliwia analizę w wyżej wymienionym zakresie dowolnych powłok sprężystych oraz sprężysto-lepkoplastycznych. Wykorzystując stacjonarne własności rozwiązań sprężysto-lepkoplastycznych program umożliwia również otrzymywanie rozwiązań sprężysto-plastycznych. W programie uwzględniono następujące powłokowe elementy skończone typu przemieszczeniowego:

a) płaski element trójkątny charakteryzowany przez:

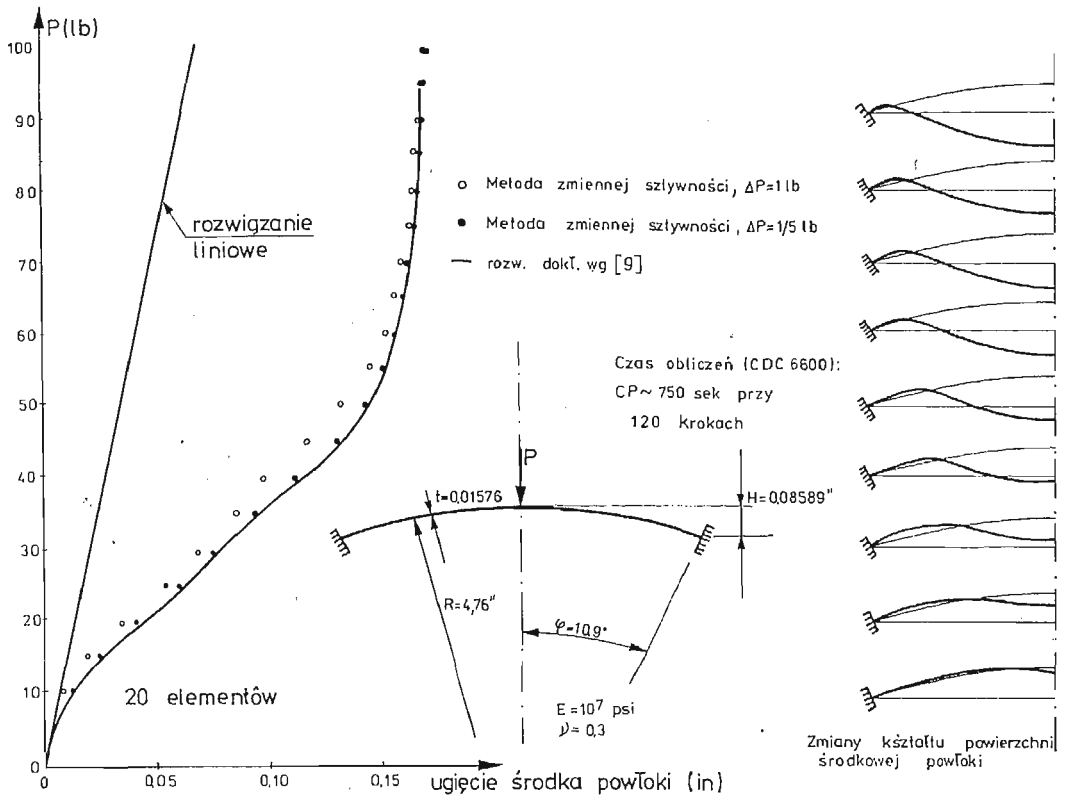
- (a1) stan membranowy — element z liniową funkcją kształtu,
- (a2) stan zgięciowy — zgodny element płytowy zaproponowany w [7],

b) niepłaski element czworokątny charakteryzowany przez:

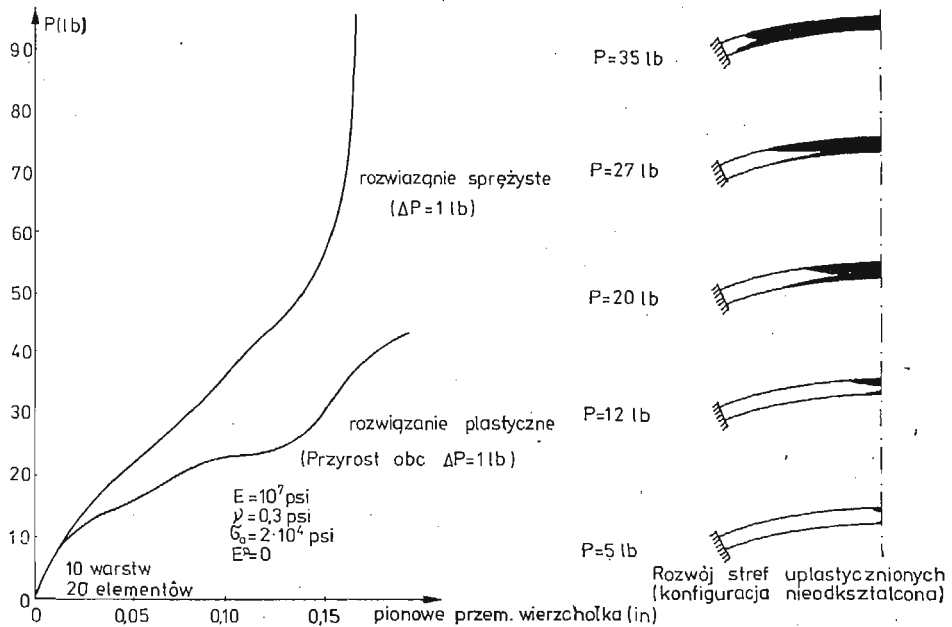
- (b1) stan membranowy — układ czterech płaskich elementów trójkątnych z kwadratową funkcją kształtu poddany więzom kinematycznym prowadzącym do linowości przemieszczeń wzdłuż czterech zewnętrznych boków czworokąta,
- (b2) stan zgięciowy — układ czterech elementów płytowych wymienionych w (a2).

⁷⁾ Aby umożliwić przeprowadzenie porównań otrzymanych wyników z rozwiązaniami otrzymanymi przez innych autorów, w przykładzie tym (i paru innych) przyjęto układ jednostek stosowany powszechnie w USA.

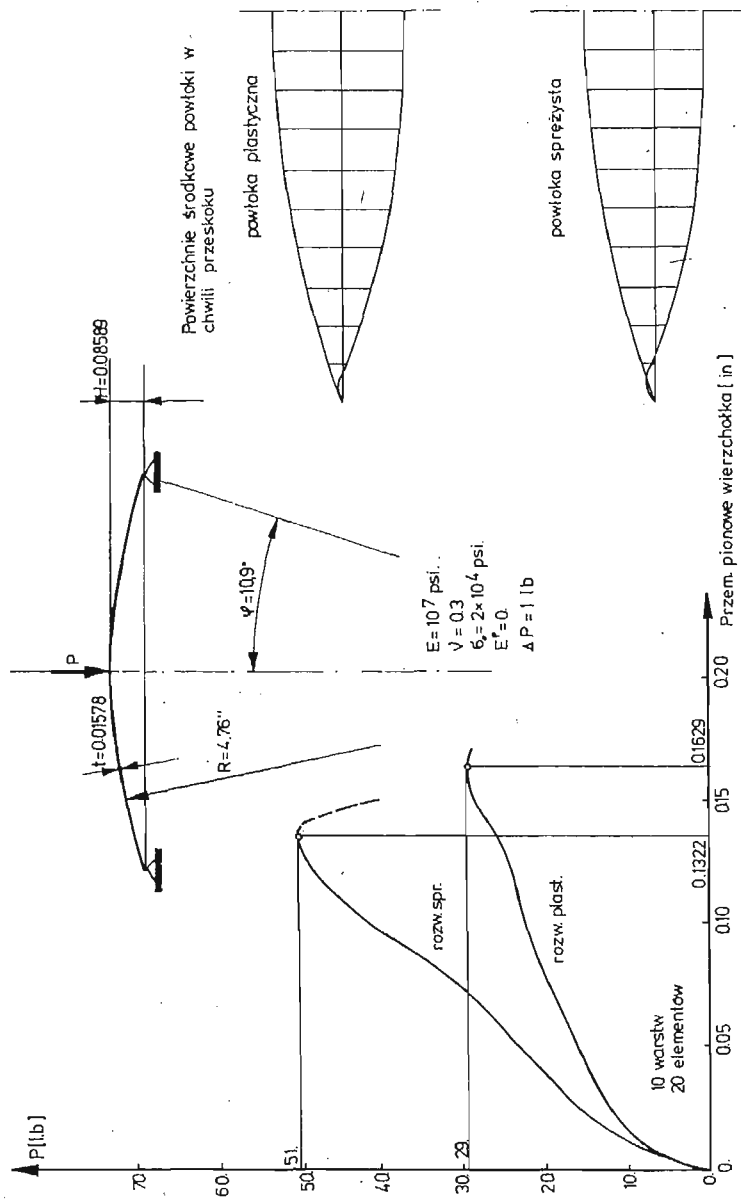
⁸⁾ Opis programu SHELIN, [4], będącego liniową wersją analizy powłok na bazie której opracowano wersję nieliniową zatytułowaną SHENON, zawarty jest automatycznie (jako część opisu programu SHENON) w poniższym tekście.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Przy opracowywaniu programu zdecydowano się na element złożony z czterech płaskich elementów trójkątnych ze względu na:

1. brak w naszych krajowych warunkach doświadczenia w korzystaniu ze skomplikowanych programów numerycznych w ogóle, a z programów dotyczących powłok w szczególności,
2. konieczność minimalizacji wykorzystywanego obszaru pamięci wewnętrznej maszyny,
3. prostotę i szybkość przygotowywania danych wejściowych,
4. względnie dobrą aproksymację rzeczywistej geometrii powłoki w przypadku niepłaskiego elementu czworokątnego przy zachowaniu niewielkiej liczby danych wejściowych,
5. przejrzystość programu i łatwość jego rozbudowywania,
6. łatwą interpretację otrzymywanych wyników,
7. możliwość (prawie we wszystkich przypadkach) redukcji błędów wprowadzonych w trakcie idealizacji powierzchni zakrzywionej elementami płaskimi poprzez zagęszczanie siatki elementów.

Przeprowadzone testy wskazują na znacznie lepszą dokładność osiąganą przy użyciu elementu czworokątnego dlatego też elementy trójkątne zaleca się używać wyłącznie jako uzupełnienie siatki elementów czworokątnych.

Macierze sztywności elementów wyprowadzono korzystając z bardzo wygodnych tzw. polowych współrzędnych wprowadzonych w obszarze każdego z trójkątów. Odpowiednie funkcje kształtu oraz otrzymane na ich podstawie macierze sztywności podano w [4], [5]. Opracowany element czworokątny posiada 37 stopni swobody, z których jednakże tylko 20 ma charakter stopni zewnętrznych. Reszta, tj. 17 jest eliminowana w procesie statycznej kondensacji na szczyblu elementu zapewniając bardzo korzystną, niewielką szerokość pasma globalnej macierzy sztywności.

Omawiany element czworokątny jest elementem zgodnym tylko w przypadku koplanarności wszystkich swoich trójkątnych podelementów; brak zgodności w przypadku niepłaskim nie spowodował w dotychczasowych testach zauważalnych problemów ze zbieżnością ciągów rozwiązań przybliżonych. Opracowana w programie macierz początkowych naprężeń jest tzw. macierzą niekonsystentną tzn. opartą na nieco uproszczonym układzie aproksymujących funkcji kształtu, por. [5]. Uprościło to znacznie procedurę jawnego otrzymywania macierzy początkowych naprężeń nie prowadząc (w dotychczasowych zastosowaniach) do żadnych niekorzystnych własności takiego sformułowania. Numeryczne całkowanie potrzebne przy określaniu tej macierzy przeprowadza się w programie wykorzystując wzory P. C. Hammera, O. P. Marlowe'a i A. H. Strouda podane np. w [8], s. 421.

„Składanie” macierzy poszczególnych elementów w globalną macierz układu odbywać się może w programie alternatywnie w oparciu o:

- a) globalny układ współrzędnych prostokątnych dla translacyjnych stopni swobody (3 składowe) i powierzchniowy układ współrzędnych dla obrotowych stopni swobody (2 składowe),
- b) powierzchniowy układ współrzędnych dla wszystkich pięciu składowych stanu uogólnionych przemieszczeń.

Zgodnie z poprzednimi uwagami żadna z tych metod nie prowadzi do trudności związanych z brakiem w węźle szóstego stopnia swobody odpowiadającego obrotowi wokół normalnej do powłoki.

Podstawową metodą rozwiązywania układu równań zastosowaną w programie SHENON jest metoda początkowych obciążeń w odniesieniu do nieliniowości typu fizycznego oraz metoda zmiennej sztywności w odniesieniu do nieliniowości typu dużych przemieszczeń.

Program SHENON pozwala na znaczne uproszczenie i zmniejszenie liczby danych wejściowych poprzez wykorzystanie szeregu podprogramów generacyjnych. W szczególności program umożliwia:

- a) generację współrzędnych węzłów dla pięciu często spotykanych typów powierzchni,
- b) generację cosinusów kierunkowych współrzędnych powierzchniowych,
- c) generację numerów węzłów,
- d) generację danych materiałowych,
- e) generację przemieszczeniowych warunków brzegowych,
- f) generację obciążeń zewnętrznych.

Program SHENON napisany jest w języku FORTRAN IV i składa się z około 3.000 wyrażeń (kart perforowanych); w trakcie jego uruchamiania korzystano z maszyny cyfrowej CYBER 72.

Przykład 2

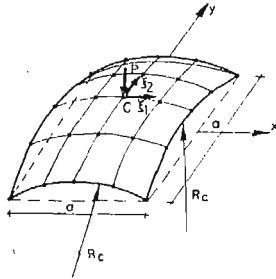
Za pomocą programu SHENON 1 przeprowadzono analizę dużych ugięć wycinka sfery kulistej obciążonego siłą skupioną P , rys. 6. Na wykresie przemieszczenie środka powłoki — obciążenie zewnętrzne porównano wyniki otrzymane przez różnych autorów.

(C) LARSTRAN — analiza dużych odkształceń konstrukcji sprężystych, sprężysto-plastycznych, sprężysto-lepkoplastycznych.

System LARSTRAN jest dużym systemem nieliniowej, dynamicznej analizy konstrukcji opracowanym w Instytucie Statyki i Dynamiki Uniwersytetu w Stuttgarcie, [13], [14]. Istniejące w tym systemie możliwości analizy powłok opisane zostały w pracach [15], [16], [17]. Przedstawiony w tych pracach element TRUMP może być stosowany w bardzo wielu zagadnieniach praktycznych aczkolwiek autorzy z naciskiem podkreślają jego przybliżony charakter i, związaną z tym, jego jedynie „inżynierską” dokładność. Mówiąc ogólnie, proponując element TRUMP kierowano się przekonaniem, że obniżona dokładność rozwiązań rekompensowana będzie niższym kosztem obliczeń i mniejszym zapotrzebowaniem na pamięć komputera, co w skomplikowanych problemach nieliniowej mechaniki powłok może być sprawą na wagę możliwości uzyskania jakiegokolwiek użytecznej informacji. Element TRUMP zaliczyć trzeba do klasy elementów „nieformalnych”, jego przydatność będzie musiała zostać w przyszłości potwierdzona na drodze różnorodnych eksperymentów numerycznych.

Omawiany element skończony jest trójkątnym, płaskim elementem powłokowym z trzema punktami węzłowymi, z których każdy posiada sześć stopni swobody w postaci trzech przemieszczeń i trzech obrotów. Zgodnie z poprzednimi uwagami konieczność wprowadzenia sztywności elementu względem obrotu wokół normalnej do powłoki wynika ze składania macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych; sztywność ta ma charakter czysto „numeryczny”. Naturalny opis stanu deformacji elementu powoduje, że element posiada pozornie jedynie 12 stopni swobody (3×6 stopni swobody węzłów minus 6 stopni swobody odpowiadających sztywnym ruchom elementu w przestrzeni trójwymiarowej). Zastosowanie koncepcji elementu warstwowego do analizy powłok

niesprężystych odpowiada metodzie omówionej na przykładach programu SHELAX; odpowiednio budowana macierz sztywności elementu uwzględnia jego własności membranowe i zgięciowe zaś struktura warstwowa umożliwia opis zmian własności materiału „po grubości” powłoki:



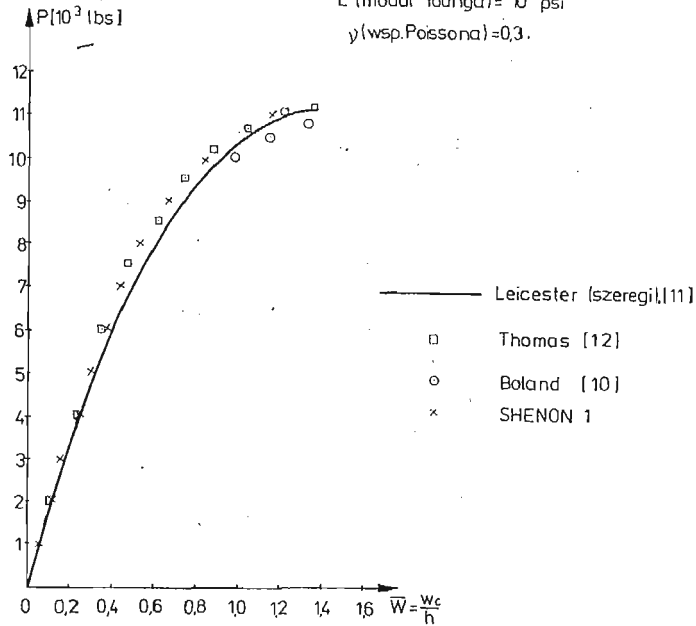
$$a = 61,8031'' \text{ (156,99 cm)}$$

$$h \text{ (grubość powłoki)} = 3,9154'' \text{ (9,95 cm)}$$

$$R_c = 100,0'' \text{ (254,0 cm)}$$

$$E \text{ (moduł Younga)} = 10^5 \text{ psi}$$

$$\nu \text{ (wsp. Poissona)} = 0,3.$$



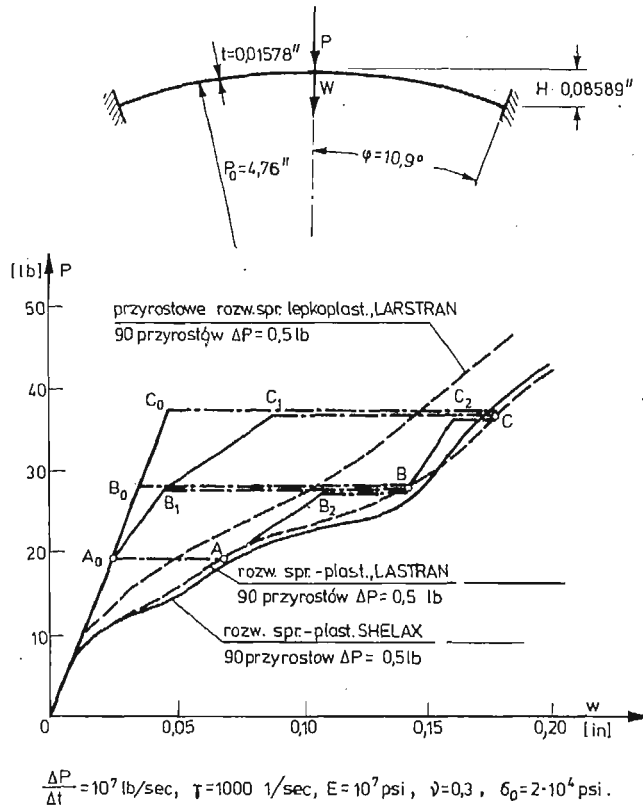
Rys. 6

W programie założono, że poszczególne warstwy elementu TRUMP odpowiadają najprostszemu elementowi płaskiego stanu naprężenia charakteryzowanemu stałym rozkładem naprężenia. Ponieważ jednak element złożony z warstw o stałym naprężeniu nie jest w stanie opisać deformacji elementu typu antysymetrycznego zginania w programie wykorzystano dodatkowo analogię typu płyta trójkątna — układ trzech zginanych belek.

W trakcie statycznej analizy konstrukcji niesprężystych istnieje w systemie LARS-TRAN możliwość wykorzystywania wszystkich omówionych w rozdz. 3 procedur analizy nieliniowej tj. metody zmiennej sztywności oraz obu wersji metody początkowych obciążeń. Element TRUMP jest obecnie wykorzystywany także do zagadnień dynamiki powłok.

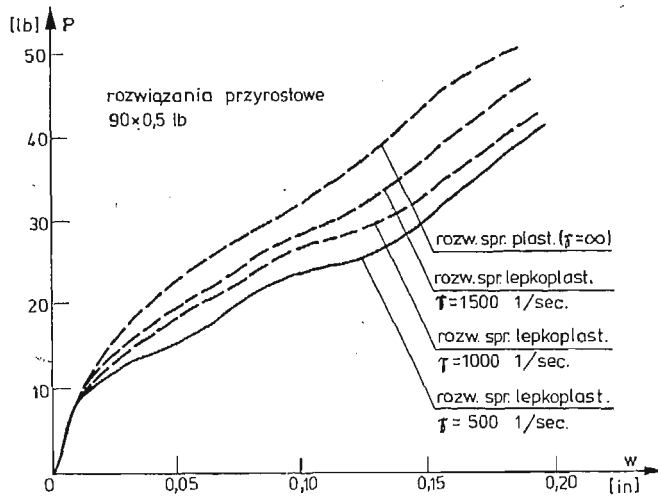
Przykład 3

Jednym z testów elementu TRUMP była analiza powłoki omówionej w Przykładzie 1, [18]. Wycinek w postaci 1-go radiana kopuły poddano dyskretyzacji za pomocą 36 elementów TRUMP. Sprężysto-plastyczne rozwiązanie O-A-B-C, rys. 7, otrzymane przy $\Delta P = 0,5 \text{ lb}$ wykazało dość dobrą zgodność z rozwiązaniem otrzymanym za pomocą



Rys. 7

SHELAX-u. W celu wykorzystania własności rozwiązań sprężysto-lepkoplastycznych opisanych w [2], [17], [18] przyłożono następnie w jednym kroku obciążenie odpowiadające punktowi A_0 i następnie, w procesie płynięcia lepkoplastycznego pod stałym obciążeniem otrzymano leżący na odpowiedniej krzywej punkt A . Podobnie dla obciążeń odpowiadających punktom B_0 i C_0 otrzymano punkty B i C , a następnie rozpatrzono także inne historie obciążenia (np. $0-A_0-B_1-B-C_2-C$), wszystkie wykazujące zgodność z odpowiednim rozwiązaniem sprężysto-plastycznym. Liczba iteracji konieczna do uzyskania odpowiedniej zbieżności procesu numerycznego opisującego płynięcie lepkoplastyczne wahała się od 37 (w przypadku płynięcia $C_0 \rightarrow C$) do 8 (w przypadku płynięcia $C_3 \rightarrow C$). Na rys. 8 przedstawiono rozwiązanie tego samego zadania dla różnych wartości współczynnika lepkości; otrzymane krzywe wykazują tendencję do asymptotycznego zbliżania się do rozwiązania sprężysto-plastycznego ($\gamma = \infty$).



Rys. 8

(D) WHAM — nieliniowa dynamiczna analiza ciał i konstrukcji

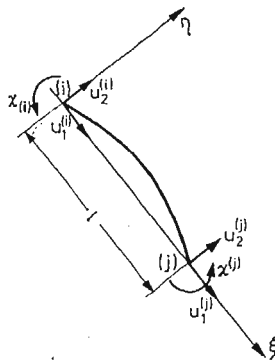
System WHAM jest dużym systemem nieliniowej, dynamicznej analizy konstrukcji opracowanym na Uniwersytecie Northwestern w Chicago, USA przez T. Belytschke i B. Mullena. Istniejący w tym systemie element powłoki osiowoosymetrycznej opisano w [19]. Element ten jest podobny do elementu istniejącego w programie SHELAX. Jego tworząca opisywana jest równaniem, por. (19)

$$\eta = \xi(1-\xi)(A_1 + A_2\xi)$$

zaś funkcje aproksymujące stan przemieszczenia przyjęto w postaci, por. (20)

$$u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi,$$

$$u_2(\xi) = \alpha_3 + \alpha_4 \xi + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi^3.$$



$$u_1(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi$$

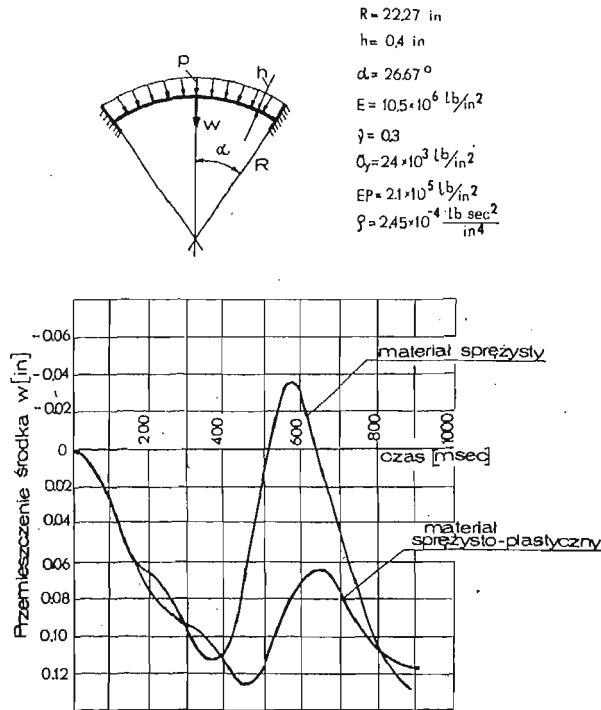
$$u_2(\xi) = \alpha_3 + \alpha_4 \xi + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi^3$$

Rys. 9

Funkcje te opisują stan przemieszczenia w elemencie skończonym o sześciu stopniach swobody i dwu węzłach zewnętrznych, rys. 9.

Zmianę własności materiału wzdłuż grubości powłoki uwzględniono wprowadzając model warstwy. Do całkowania równań ruchu zastosowano metodę różnic centralnych. Przykład 4

Możliwości obliczeniowe programu WHAM zilustrujemy na przykładzie analizy utwierdzonej na obwodzie powłoki sferycznej obciążonej impulsem ciśnienia, rys. 10. Na rysunku tym pokazano zmianę ugięcia środka kopuły w czasie dla przypadków: sprężystego i sprężysto-plastycznego.



Rys. 10

(E) DYNAX — dynamiczna analiza osiowosymetrycznych ciał i powłok sprężystych poddanych dowolnemu obciążeniu.

Program DYNAX, [20], stanowi pierwszą fazę pracy nad programem umożliwiającym dynamiczną analizę różnorodnie obciążonych konstrukcji o osiowosymetrycznej geometrii w zakresie fizycznej i geometrycznej nieliniowości. W odróżnieniu od programu SHELAX i powłokowej części programu WHAM program DYNAX dopuszcza powstawanie dowolnego (a nie tylko osiowosymetrycznego) stanu odkształcenia w analizowanych konstrukcjach). Aby umożliwić taką ogólność analizy zmienne wokół osi symetrii obciążenie przedstawiane jest w postaci szeregów Fouriera. Na każdym kroku analizy otrzymujemy rozwiązanie dla każdego wyrazu rozwinięcia oddzielnie i sumujemy otrzymane rozwiązania otrzymując wynik odpowiadający całemu obciążeniu.

Program dysponuje obecnie trzema typami elementów:

1. element powłokowy identyczny do wykorzystywanego w programie SHELAX,
2. „trójkątny” element ciała osiowosymetrycznego (grubej powłoki) z liniową funkcją kształtu w płaszczyźnie południkowej,
3. „czworokątny” element ciała osiowosymetrycznego złożony z czterech elementów „trójkątnych” bez węzła środkowego eliminowanego w procesie statycznej kondensacji.

Dla wszystkich elementów w programie istnieją możliwości obliczania konsystentnych macierzy mas. Współczynniki leżące na diagonalu w wygodniejszej w analizie diagonalnej macierzy mas otrzymywane są poprzez sumowanie wszystkich współczynników występujących w poszczególnych wierszach macierzy konsystentnej.

Macierz tłumienia przyjmowana jest w postaci proporcjonalnej jako

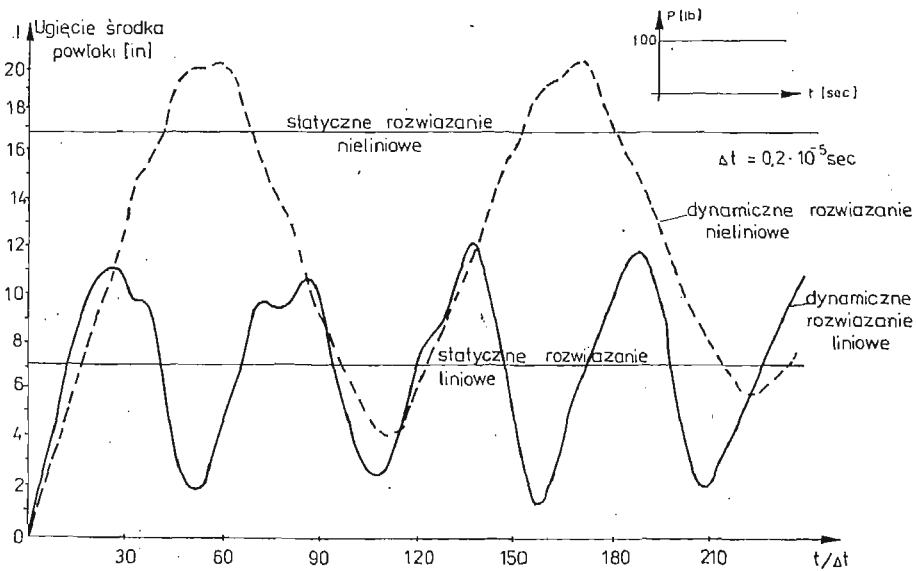
$$C = \alpha M + \beta K$$

gdzie współczynniki α i β ustalane są w zależności od parametrów tłumienia modalnego.

Całkowanie względem czasu może być dokonywane za pomocą zarówno metody całkowania bezpośredniego Wilsona ($\vartheta = 1.4$) jak i metody superpozycji modalnej (tylko w przypadku małych przemieszczeń!).

Przykład 5

Dla omawianej poprzednio sprężystej powłoki utwierdzonej, por. rys. 3, przeprowadzono analizę dynamiczną za pomocą programu DYNAX. Obciążenie wierzchołka czaszy o wartości $P = 100/b$ przyłożono w sposób nagły w chwili $t = 0$ i pozostawiono niezmiennym do końca analizy. Pominięto wpływ tłumienia. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 11. Znacznie większe przemieszczenia w przypadku analizy geometrycznie

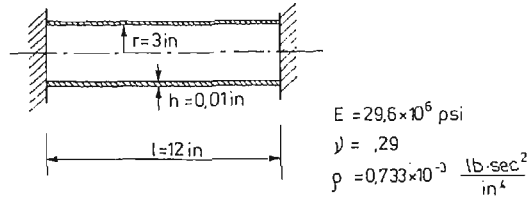


Rys. 11

niezlinearyzowanej są wynikiem zmniejszenia się sztywności powłoki ze wzrostem obciążenia. Otrzymane wyniki wykazują dobrą zgodność z rozwiązaniami podanymi w [21].

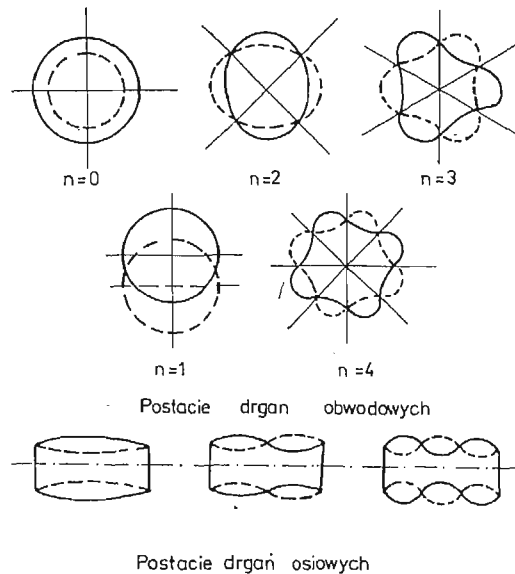
Przykład 6

Korzystając z programu DYNAX policzono drgania własne powłoki walcowej o utwierdzonych brzegach pokazanej na rys. 12. Na rysunku tym podano także odpowiednie



Rys. 12

dane geometryczne i materiałowe charakteryzujące powłokę. Macierz mas przyjęto w postaci diagonalnej. Na rys. 13 pokazano różne możliwe postacie drgań własnych powłoki zaś w Tabl. 1 przedstawiono otrzymane wyniki i porównano je z wynikami eksperymental-



Rys. 13

nymi podanymi w [22] oraz z wynikami analitycznymi uzyskanymi w oparciu o klasyczne równania powłok podanymi w [23]. Analizę przeprowadzono dzieląc powłokę na 10 pierścieniowych elementów skończonych.

Tablica 1

m \ n		1	2	3	4	5	6	7
0	A			1025	700	559	525	587
	B	3427	1918	1145	765	580	530	597
	C	3426	1922	1160	769	581	534	589
1	A				1620	1210	980	875
	B	6423	3905	2538	1753	1287	1022	907
	C	6404	3912	2553	1770	1303	1034	912
2	A						1650	1395
	B		5844	4054	2921	2192	1720	1431
	C	8194	5839	4075	2953	2227	1754	1458
3	A							1960
	B		7303	5447	4104	3168	2516	2076
	C		7245	5451	4144	3222	2578	2133
4	A							
	B							
	C		8120	6550	5222	4197	3430	2867

A : wg [22] wartości doświadczalne

B : wg [23] wartości analityczne

C : DYNAX metoda elementów skończonych

Literatura cytowana w tekście

1. M. KLEIBER, H. STOLARSKI; *Numeryczna analiza zagadnień statyki sprężysto-plastycznych powłok w zakresie dużych przemieszczeń, Cz. I — Podstawy teoretyczne*, Zlecenie CTO EU/B/246/74, Warszawa, IPPT, Grudzień 1976.
2. M. KLEIBER; *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych. Teoria i numeryczna analiza konstrukcji*, Prace IPPT nr 13/1978.
3. M. KLEIBER; *SHELAX — analiza dużych deformacji cienkich, osiowosymetrycznych powłok sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT nr. 49/1977.
4. M. KLEIBER, A. ZACHARSKI; *SHELIN — liniowa analiza statyczna cienkich powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT nr 51/1978.
5. M. KLEIBER, J. BAUER, H. STOLARSKI, A. ZACHARSKI; *SHENON — statyczna analiza dużych przemieszczeń i stateczności cienkich, sprężystych i niesprężystych powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT 1980 (w przygotowaniu).
6. M. KLEIBER, J. BAUER, H. STOLARSKI, A. ZACHARSKI; *SHENON 1 — statyczna analiza dużych przemieszczeń i stateczności cienkich powłok dowolnego kształtu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja Użytkowania, Zlecenie CTO EU/B/246/74, Warszawa, IPPT, Czerwiec 1978.
7. R. W. CLOUGH, J. L. TOCHER; *Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending*, Konferencja: „Matrix methods in Structural Mechanics”, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965.
8. O. C. ZIENKIEWICZ; *Metoda elementów skończonych* Arkady Warszawa 1972.
9. J. R. TILLERSON J. A. STRICKLIN W. E. HAISLER; *Numerical methods for the solution of nonlinear problems in structural analysis* 1973 Winter Annual Meeting of the ASME Nov. 1973 New Mexico,

10. P. L. BOLAND; *Large deflection analysis of thin elastic structures by the assumed stress hybrid finite method* Report Oct. 1975 MIT Cambridge Mass. USA.
11. R. H. LEICESTER; *Finite deformation of shallow shells* Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div. **94** 1409 - 1421 (1968).
12. G. THOMAS R. GALLAGHER; *A triangular thin shell finite element; nonlinear analysis* NASA-CR-2483.
13. J. H. ARGYRIS P. C. DUNNE T. ANGELOPOULOS B. BICHAT; *Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements* Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **4** 219 - 278 (1974).
14. J. H. ARGYRIS, M. KLEIBER; *Incremental natural discretized formulation in nonlinear mechanics and large strain elastoplasticity, Part I*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **11**, 125 - 144 (1977).
15. J. H. ARGYRIS, P. C. DUNNE, MALEJANAKIS, E. SCHELKLE; *A simple triangular facet shell element with application to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **10**, 371 - 403 (1977).
16. M. KLEIBER; *A triangular finite element for large deformation elasto-plastic analysis of arbitrary shells*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. XXVI, 61 - 71 (1978).
17. J. H. ARGYRIS, M. KLEIBER, U. HINDENLANG; *Finite deformation analysis of inelastic shells — Natural finite element approach*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. **22**, 361—390 1980.
18. M. KLEIBER; *Natural finite elements and large deformation elasto-viscoplasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. XXVI, 73 - 81 (1978).
19. T. BELYTSCHKO, H. STOLARSKI; *A curved finite element for nonlinear transient analysis of shells of revolution*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. 1979.
20. M. KLEIBER, T. D. HIEN; DYNAX — *dynamiczna analiza osiowosymetrycznych ciał i powłok sprężystych poddanych dowolnemu obciążeniu metodą elementów skończonych*. Opis programu i instrukcja użytkowania, Prace IPPT **25**, 1980.
21. K. J. BATHE, H. OZDEMIR, E. L. WILSON; *Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis*, SESM Report 74 - 4, University of California, Berkeley, 1974.
22. R. L. KOVAL, E. T. CRANCH; *On the free vibrations of thin cylindrical shells subjected to initial torque*, Proc. US National Congress of Appl. Mech. 11 - 18 (1962).
23. B. L. SMITH, E. E. HAFT; *Natural frequencies of clamped cylindrical shells*, J. Amer. Inst. Aeron. Astron **6**, April 1968.

Р е з ю м е

НЕЛИНЕЙНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ
ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В данной работе обсуждены основные аспекты нелинейного анализа с применением ЭВМ для тонких оболочек произвольной формы. Учитывается физическая и геометрическая нелинейность задачи. Представлены основные алгоритмы, применяемые при постановке статических и динамических задач. Работа проиллюстрирована многочисленными примерами расчётов, выполненных с помощью программ на ЭВМ, разработанных автором.

S u m m a r y

NONLINEAR STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF SHELLS BY THE FINITE
ELEMENT METHOD

In the paper some fundamental aspects of numerical nonlinear analysis of free-form thin shells are discussed. Both material and geometrical nonlinearities are taken into account. The basic numerical methods are described for nonlinear static and dynamic problems. A number of examples is included.

IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku