

## POWŁOKI PNEUMATYCZNE<sup>1</sup>,

JANUSZ O R K I S Z (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

**1.1. Problematyka teorii wiotkich powłok i jej zastosowań.** Pod pojęciem powłok pneumatycznych rozumiemy wiotkie powłoki, które utrzymują swoją formę dzięki istnieniu pewnego choćby niewielkiego ciśnienia wewnętrznego. Powłoki te nie przenoszą zginania ani ściskania a jedynie rozciąganie i mogą znajdować się bądź to w stanie błonowym, gdy oba naprężenia główne są dodatnie ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ ), bądź też w jednoosiowym stanie naprężenia w przypadku powstania fałdów ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$ ).

Historia powłok pneumatycznych liczy już kilkadziesiąt lat, a pierwszą zrealizowaną konstrukcję o charakterze użytkowym zawdzięczamy BAIRDOWI [12]. Dzięki licznym zaletom jak lekkość, taniość i szybkość wznoszenia, powłoki pneumatyczne znalazły zastosowanie w budownictwie wielu krajów [12, 125, 126] m.in. w Polsce [149]. Stanowią one przekrycia magazynów, basenów i hal sportowych a nawet sezonowych wystaw lub teatrów. Stosuje się je również jako zbiorniki cieczy, gazów i materiałów sypkich oraz elementy wielu aparatów i konstrukcji przemysłowych.

Stan fizyczny takich struktur pneumatycznych, a więc geometrię odkształcenia i naprężenia opisuje teoria powłok wiotkich. Teoria ta znajduje również zastosowanie w innych dziedzinach, jak np. obróbka plastyczna metali, a nawet medycyna, gdzie może służyć np. do opisu mechanicznego modelu serca i naczyń krwionośnych.

Wspólną cechą struktur pneumatycznych jest

- znaczna zmienność geometrii pod wpływem zmiany ciśnienia wewnętrznego, przyłożonych obciążeń i temperatury;
- możliwość powstawania i zanikania fałdów;
- na ogół nieliniowa charakterystyka materiału, który zależnie od przeznaczenia powłoki pneumatycznej stanowią najczęściej tworzywa sztuczne, zazwyczaj zbrojone, guma i materiały gumopodobne oraz metale;
- możliwość utraty stateczności przez rozciąganie.

W zastosowaniach praktycznych powłoki pneumatyczne często znajdują się pod obciążeniem strumienia gazu (np. wiatru) skąd wynika potrzeba analizy zjawiska flatteru zwłaszcza ze względu na słabą odporność materiału powłoki na rozdarcie.

W pracy konstrukcji pneumatycznej można na ogół wyróżnić trzy fazy [80]:

- I — początkową bez żadnych obciążeń;

<sup>1</sup> Artykuł wygłoszony jako referat problemowy na II konferencji „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”.

- II — pośrednią scharakteryzowaną przez stan jaki osiąga powłoka po przyłożeniu ciśnienia wewnętrznego utrzymującego jej formę;
- III — użytkową, otrzymaną po przyłożeniu obciążeń do powłoki znajdującej się już we fazie II.

Poprawna teoria powłok pneumatycznych, prócz wymienionego na wstępie warunku nieujemności naprężeń głównych wyrażonego przez jednostronne więzy  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 \geq 0$ , powinna więc uwzględniać:

- nieliniowość geometryczną, na którą składają się
  - = z reguły duże przemieszczenia a często i skończone odkształcenia powłoki;
  - = możliwość powstawania i zanikania strefy fałdów ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ );
- zmianę grubości powłoki w miarę jej odkształcania się; jest to niezbędne dla analizy zjawiska utraty stateczności;
- anizotropię i różnorodną nieliniowość fizyczną materiału pozwalającą na opisanie takich cech jak wysoka elastyczność, pełzanie, starzenie się, plastyczność;
- wpływ temperatury.

W zakresie analizy statycznej konkretne zastosowania stawiają nas najczęściej przed jednym z następujących zadań:

- znany jest wyjściowy stan powłoki i jej obciążenie (czas), szukamy stanu końcowego;
- znamy formę końcową powłoki i jej obciążenie (czas), szukamy formy wyjściowej oraz naprężeń w stanie końcowym.

Poza rozwiązaniem zagadnień statyki, teoria ta powinna umożliwiać analizę stateczności oraz badanie różnych efektów dynamicznych w powłoce pneumatycznej.

Zagadnienie stateczności powłok pneumatycznych ma charakter nieklasyczny, gdyż nie wiąże się ze ściskaniem lecz z rozciąganiem powłoki, a ponadto już sama możliwość utraty stateczności zależy od charakteru obciążenia (por. [120]). Zadanie formułuje się następująco: znany jest stan wyjściowy powłoki i rodzaj obciążenia, poszukiwana zaś wartość tego obciążenia (czasu) oraz odpowiadający jej stan końcowy, powyżej którego nie jest możliwy stan równowagi w powłoce. Poprawne rozwiązanie tego zadania jest możliwe tylko na gruncie teorii odkształceń skończonych.

Zagadnienia dynamiki to przede wszystkim opis ruchu powłoki o znanym stanie wyjściowym znajdującej się w opływie strumienia gazu. Zadanie to bywa analizowane nawet przy uproszczonym założeniu o nierozciągliwości materiału powłoki (por. [22]).

**1.2. Cel i zakres pracy.** Obecna praca ma charakter problemowy co pozwala skupić się na kilku wybranych zagadnieniach. Zasadniczym jej zadaniem jest nie tyle dokonanie pełnego przeglądu co przedstawienie aktualnego „state of art” w dziedzinie teorii i metod obliczania powłok pneumatycznych.

W szczególności jej cele to:

- zestawienie literatury zagadnienia za ostatnie dziesięciolecie;
- wyróżnienie na tej podstawie różnych szkół i ich zwięzła charakterystyka;
- szkieletowa prezentacja teorii wiotkich powłok w ujęciu metody elementów skończonych;
- wskazanie kierunków rozwojowych mechaniki powłok pneumatycznych.

Ponadto praca zawiera krótką charakterystykę problemu przeprowadzoną z punktu widzenia mechaniki i metod obliczeniowych oraz reprezentatywne przykłady rozwiązań uzyskanych metodą elementów skończonych.

## 2. Krótkie omówienie literatury

Zestawienie literatury podanej w niniejszej pracy dotyczy problematyki wiotkich powłok w aspekcie powłok pneumatycznych i obejmuje w zasadzie ostatnie dziesięciolecie. W wyjątkowych przypadkach znalazły się tu pozycje wcześniejsze, te mianowicie, które nie były zamieszczone w bibliografii poprzedniej pracy autora [120] obejmującej okres do roku 1967. Zgodnie z przyjętym na wstępie założeniem nie będziemy tu omawiać wszystkich prac ograniczając się jedynie do tych, które bądź to mają decydujące znaczenie dla aktualnego stanu wiedzy w dziedzinie powłok pneumatycznych, bądź też są charakterystyczne dla rozpatrywanego zagadnienia. Omówienie literatury można znaleźć w rozmaitych pracach przeglądowych [12, 23, 45], monografiach [42, 115, 120, 125, 126], materiałach specjalistycznych konferencji [133, 134, 136] lub w niektórych pracach szczegółowych [34, 77, 128].

Podstawy ogólnej teorii wiotkich membran, ściślej na gruncie skończonych odkształceń ciał hipersprężystych zostały podane jeszcze przez GREENA i ADKINSA [42]. Obecnie stosowane są zarówno globalne (por. np. [8, 80]) jak i lokalne (por. np. [166, 179]) sformułowania tej teorii. W ujęciu lokalnym teoria ta prowadzi do silnie nieliniowego problemu brzegowego dla układu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Układ ten daje się ściśle rozwiązać jedynie w nielicznych przypadkach powłok o specjalnym kształcie i obciążeniu.

Do czasu pojawienia się metody elementów skończonych, która w radykalny sposób zmieniła sytuację, stosowano — jak wynika to z literatury — następujące sposoby postępowania:

- znaczne uproszczenie modelu teoretycznego, a następnie wykorzystanie rozmaitych metod analitycznych, ścisłych lub przybliżonych, często związanych z konkretnym kształtem powłoki, sposobem obciążenia, czy też rodzajem użytego materiału;
- ograniczenie rozważań do klasy zadań obrotowo-symetrycznych a więc jednowymiarowych i zastosowanie efektywnych metod numerycznych;
- ograniczenie rozważań do prostych przypadków specjalnych, które można rozwiązać ściśle jak np. powłoka kulista lub nieskończenie długa powłoka cylindryczna obciążone ciśnieniem wewnętrznym.

Uproszczenia modelu teoretycznego przyjmowane przez różnych autorów sprowadzały się do jednego z poniższych wariantów:

- założenie małych odkształceń i liniowego prawa fizycznego;
- dokonanie pełnej linearyzacji końcowych równań powłoki (małe przemieszczenia!);
- założenie, że materiał powłoki jest nierozciągliwy, co ogranicza analizę jedynie do równań równowagi (ruchu).

Zasadniczą wadą takich uproszczeń jest z jednej strony zbyt daleko idąca idealizacja rzeczywistej wiotkiej powłoki, z drugiej zaś wąskość założeń i cząstkowość rozwiązań

(por. np. [84 - 105]). Nawet niewielka zmiana obciążeń, kształtu powłoki lub własności materiału, z którego została wykonana — stwarza zazwyczaj ogromne trudności obliczeniowe.

W przypadku obrotowej symetrii powłoki i obciążenia ściśle sformułowane zagadnienie można sprowadzić (por. [120]) do problemu brzegowego dla układu nieliniowego, zwyczajnych równań różniczkowych. Układ ten na ogół daje się efektywnie rozwiązać metodami bezpośredniego całkowania numerycznego (NC) takimi jak metody Rungego-Kutty, Adamsa lub różnego typu metody predyktor-korektor. Takie podejście zastosowano w znakomitej większości prac dotyczących wiotkich powłok obrotowo-symetrycznych.

Zaletą metod NC jest ich prostota i małe obciążenie pamięci operacyjnej maszyny. Z drugiej strony jednak ich efektywność w znacznej mierze zależy od głębokości propagacji efektu brzegowego we wnętrze powłoki oraz od niezbędnej liczby kroków całkowania. Metody te są stabilne dla powłok krótkich, słabo stabilne w przypadku powłok średnich, a niestabilne dla powłok długich.

Metody NC wykorzystywano w znakomitej większości prac dotyczących wiotkich powłok obrotowo-symetrycznych. Ponadto stosowano też inne metody jak np. różnic skończonych (por. [158, 180]), a po linearyzacji równań także metodę prągonki (por. [159, 160]). W pracach [25, 26, 154] zaprezentowano podejście energetyczne i minimalizację metodą Fletchera-Powella. Interesujące połączenie iteracyjnej metody Picarda z techniką analogową pokazano w pracy [14]. Były również próby przybliżonych rozwiązań graficzno-analitycznych (por. [106, 171]).

Wszystkie wspomniane wyżej metody trudno uznać za w pełni zadowalające, zarówno gdy idzie o ogólność ich zastosowania jak i otrzymane rezultaty. Dopiero pojawienie się metody elementów skończonych pozwoliło na dokonanie odpowiedniej dyskretyzacji zagadnienia względem dwóch zmiennych, niezbędnej do numerycznego rozwiązania nieuproszczonego zadania ogólnego. Powstała przy tym możliwość jednakowego potraktowania powłok o najzupełniej różnych kształtach i warunkach podparcia, rozmaicie obciążonych i wykonanych z materiałów o różnorodnych własnościach (np. izotropowe, anizotropowe). Choć potencjalne możliwości jakie kryje w sobie metoda elementów skończonych nie zostały jeszcze — jak na to wskazuje analiza dotychczasowych prac — w pełni wykorzystane, to już obecnie wachlarz rozwiązywanych zagadnień jest znacznie szerszy, a uzyskane wyniki bardziej zbliżone do rzeczywistości niż te, które można by osiągnąć innymi, dotąd stosowanymi metodami.

Dlatego też w dalszych rozważaniach główną uwagę poświęcimy tym pracom, które stanowią dziś teoretyczną podstawę obliczania powłok pneumatycznych metodą elementów skończonych. Jeśli chodzi o pozostałe prace, mające aktualnie mniejszy ciężar gatunkowy, o ograniczymy się do wyróżnienia i krótkiej charakterystyki zasadniczych szkół.

Stosunkowo liczne są tu prace radzieckie. I tak warto wymienić w pierwszym rzędzie prace S. A. ALEKSIEJEWY i jego współpracowników. Ponieważ w znacznej większości pochodzą one z przełomu lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych a jedynie ich wpływ sięga czasów późniejszych cytujemy tu tylko ostatnie pozycje [2, 3]. Dotyczą one fizycznie liniowej teorii powłok pneumatycznych podlegających dużym przemieszczeniom przy małych odkształceniach.

Następna grupa to prace A. S. GRIGORIEWY (wymieniamy jedynie przeglądową pracę

[45] i kilka ostatnich [43, 44, 36, 47]) oraz rozlicznych jego współpracowników i kontynuatorów [34, 35, 120 - 124, 131, 138 - 141, 146 - 148, 155 - 157].

Wszystkie one dotyczą teorii wiotkich powłok obrotowo symetrycznych, ściślej na gruncie teorii skończonych odkształceń ośrodka ciągłego. Ze względu na obrotową symetrię i wynikającą stąd stałość kierunków głównych posługiwano się najczęściej logarytmiczną miarą odkształceń i prawami fizycznymi Nadai-Davisa dla rzeczywistych naprężeń. Przypadki innych związków konstytutywnych odpowiadających ciałom hipersprężystym, lepkosprężystym i lepkoplastycznym rozważone zostały przez J. ORKISZA w serii prac [121 - 124], z których pierwsza najpełniej przedstawia osiągnięcia i możliwości omawianej teorii. W przypadku zadań stacjonarnych teoria ta prowadziła do zagadnienia brzegowego dla układu czterech zwyczajnych, nieliniowych równań różniczkowych, zaś przy procesach niestacjonarnych do zagadnienia początkowo-brzegowego dla układu sześciu quasiliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu (por. [120]). Rozwiązanie otrzymano metodami NC. W pracach tej grupy specjalną uwagę poświęcono problemowi stateczności powłoki przy rozciąganiu oraz zagadnieniu strefy fałdów ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ).

Wśród publikacji radzieckich wyróżniają się swą liczebnością prace ośrodka we Władystoku (por. [136]), w których inicjatorem i inspiratorem jest W. F. MAGUIA [84 - 101] a obok niego B. I. DRUZ [20, 21] i B. N. MARTYNIIEC [102 - 105] (por. też [22, 38, 63, 108, 130]). Prace te charakteryzują się zarówno daleko idącymi uproszczeniami (np. przyjęcie nierozciągłości materiału) jak i użytkowym celem, który najczęściej stanowiło projektowanie wiotkich zbiorników na cieczy i materiały sypkie. Warto tu też podkreślić zainteresowanie strefą fałdów (por. [64, 90, 92 - 94, 169, 170]). Stosunkowo znaczna liczebność prac tej grupy jest jednak rezultatem wariantowania wąskich założeń teoretycznych i braku efektywnego kontaktu z innymi ośrodkami pracującymi nad teorią powłok wiotkich.

W ostatnich latach ukazała się seria prac [25 - 29, 154, 166 - 168] W. W. FENGA i W. H. YANGA oraz ich współpracowników jak również tematycznie pokrewne im prace Y. S. SUNA i C. E. UENGA [145, 158]. Dotyczą one wiotkich powłok tak o dowolnych obrotowo-symetrycznych, jak i innych kształtach. Nawiązując do sformułowania podanego przez GREEA i ADKINSA [42] opierają się one na teorii ścisłej dla materiałów hipersprężystych. Specyfiką tych prac jest m.in. poświęcenie uwagi problemom kontaktowym (por. [26, 28, 29] oraz także [129]). Rozwiązania konkretnych zadań uzyskiwano numerycznie metodami NC [29, 166], metodą różnic skończonych [158, 168] lub FLETCHERA-POWELLA [25, 26, 154].

Poza wyszczególnieniem i krótką charakterystyką „szkół” warto jeszcze wymienić prace poświęcone różnym tematom specjalnym, takim jak:

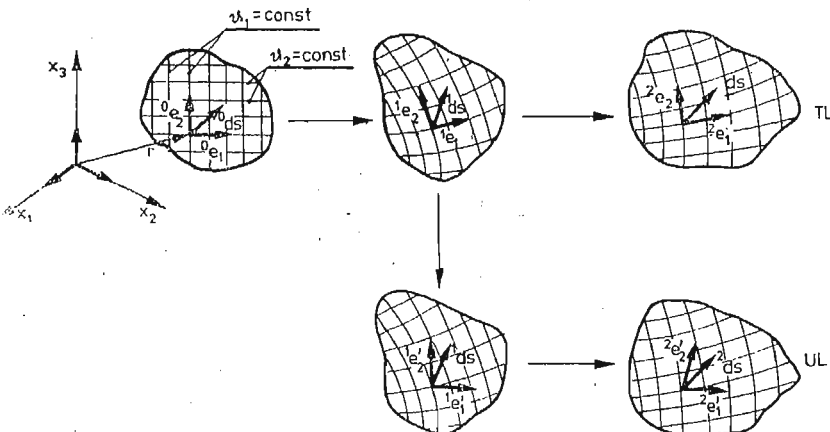
- stateczność: stateczność rozumiana jest (za wyjątkiem pracy [17]) w sensie podanym w punkcie 1.1. niniejszej pracy; rozważany był zarówno przypadek dowolnej powłoki obrotowo-symetrycznej [15, 34, 43, 44, 120] jak i pewne kształty specjalne [31] np. cylindryczny [33, 156], toroidalny [18]; w pracach [120, 165] rozpatrywano stateczność powłoki kulistej przy pełzaniu;
- dynamika: problemy dynamiki powłok pneumatycznych rozważano dotąd w sposób bardzo uproszczony. Najczęściej ograniczano się do rozpatrywania statycznego parcia

wiatru [21, 22, 36, 40, 41]; jedynie w nielicznych przypadkach po wstępnej linearyzacji układu równań analizowano zagadnienie drgań własnych [53, 70, 175] lub zjawisko flutteru [20, 65, 132]. Znacznie uproszczone podejście nieliniowe prezentuje praca [101]. Bogata natomiast jest literatura dotycząca pokrewnych problemów w przekryciach wiszących [177];

- pełzanie: pełzanie dowolnych obrotowo-symetrycznych wiotkich powłok przy różnych prawach fizycznych było przedmiotem prac [50, 120, 123]; rozważono też pewne szczególne przypadki jak membrana kołowa [16, 83], pierścieniowa [163] lub powłoka kulista [165];
- optymalizacja: podejmowane [62, 139, 140] były pierwsze, uproszczone próby formułowania zadań optymalnych;
- problemy różne: analiza wiotkich powłok toroidalnych [60, 67, 68, 107, 109, 110], problem obciążeń lokalnych [127] oraz struktury pneumatyczne wzmocnione kablami [106, 151];
- doświadczenia: osobną grupę, niestety niezbyt liczną, stanowią prace eksperymentalne. W zakresie statyki dotyczą one doświadczeń prowadzonych na membranach kołowych [48, 118] w celu weryfikacji równolegle otrzymywanych rozwiązań teoretycznych. Podobnie było w przypadku badań nad utratą stateczności przez wiotkie powłoki [14, 18]. Stosunkowo najwięcej prac [4, 11, 70, 136, 178] poświęcono problemowi zachowania się powłok pneumatycznych w warunkach opływu strumieniem gazu.

### 3. Powłoki pneumatyczne w ujęciu metody elementów skończonych

**3.1. Uwagi wstępne.** Metoda elementów skończonych stwarza realną szansę wykorzystania ścisłej teorii skończonych odkształceń ośrodka ciągłego do obliczania powłok pneumatycznych o dowolnym kształcie. W tym celu można zaadoptować ogólny sposób postępowania opracowany dla rozwiązywania zagadnień geometrycznie nieliniowych (por. [10, 51, 52, 58, 112, 115]). Aby rozróżnić konfiguracje początkową i aktualną stosuje się opis



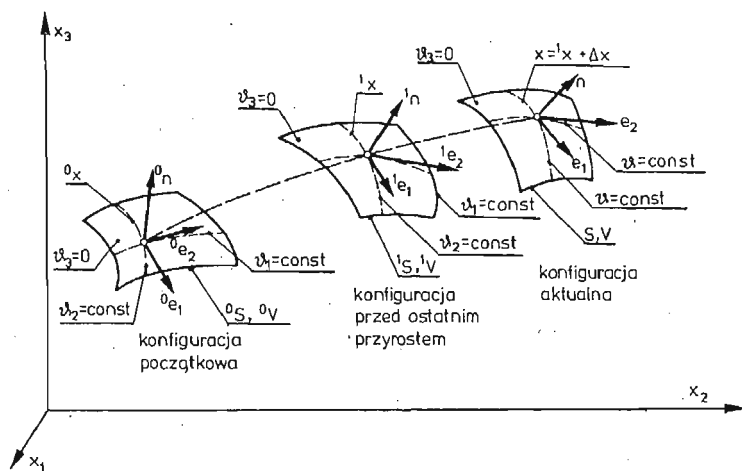
Rys. 1. Rozróżnianie sformułowań TL i UL

Eulera, opis Lagrange'a (TL — total Lagrangian), bądź też jego modyfikację tzw. uaktualniony opis Lagrange'a (UL — updated Lagrangian) ściśle związanym z numeryczną techniką rozwiązywania problemu.

W opisie Eulera rozważane wielkości są odniesione do konfiguracji aktualnej. Takie sformułowanie jest wygodne w tych problemach, gdzie znany jest aktualny kształt powłoki, a poszukiwana jej forma wyjściowa. Znajomość tej formy jest natomiast warunkiem zastosowania opisu Lagrange'a. Konfiguracja odniesienia stanowi wówczas (por. rys. 1) bądź to stały układ początkowy (TL), bądź też układ konwekcyjny związany z kształtem powłoki, ustalony każdorazowo dla przedostatniego kroku postępowania przyrostowego (UL). W praktycznych obliczeniach można spotkać (por. [10]) oba te sformułowania z tym, że w opisie UL struktura odpowiednich macierzy jest prostsza niż w TL, lecz istnieje większe niebezpieczeństwo kumulacji błędów obliczeń.

Równania metody elementów skończonych zastosowanej do teorii wiotkich powłok otrzymywano dotychczas wychodząc z zasady prac wirtualnych. Jednakże, podobnie jak ma to miejsce w rozmaitych innych zagadnieniach nieliniowych, można by również wykorzystać inne zasady wariacyjne podane w postaci przyrostowej (por. [52]).

Obecnie przedstawimy pokrótce sposób wyprowadzenia tych równań posługując się dla przejrzystości zapisem macierzowym. Rozważmy w tym celu element powłoki przedstawiony na rys. 2 i opisany w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych



Rys. 2. Przemieszczenia elementu skończonego.  $x$  — globalny układ przestrzennych współrzędnych kartezjańskich,  $v_1, v_2, v_3$  — lokalny układ materialnych współrzędnych krzywoliniowych

przestrzennych  $x_1, x_2, x_3$ . Wielkości oznaczone indeksem „0” odnoszą się do konfiguracji pierwotnej, „1” do konfiguracji przed ostatnim przyrostem, zaś „2” lub bez indeksu do konfiguracji aktualnej. Wprowadźmy ponadto lokalny, konwekcyjny układ współrzędnych  $v_1, v_2, v_3$  związany z wektorami  $e_1$  oraz  $e_2$  stycznymi do powierzchni środkowej powłoki i normalnym  $n$ . Oznaczmy indeksem „e” wielkości węzłowe w elemencie, zaś przez  $N$  macierz złożoną z funkcji kształtu. W przypadku powszechnie stosowanych

elementów izoparametrycznych, geometrię powłoki opisuje równanie

$$(1) \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{N}\mathbf{x}_e,$$

zaś przemieszczenia

$$(2) \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{x} - {}^0\mathbf{x} = \mathbf{N}(\mathbf{x} - {}^0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{N}\mathbf{u}_e,$$

skąd znając konkretną postać wektora odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  możemy już znaleźć przyrostową relację

$$(3) \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}_e.$$

Wektor odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  najwygodniej jest zdefiniować w lokalnym układzie współrzędnych  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  jako

$$(4) \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\},$$

pomijając, zgodnie z teorią wiotkich membran (por. [42, 115]),  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \equiv 0$  a ponadto składową  $\varepsilon_{33}$ , która choć jest różna od zera to jednak — wobec założonego płaskiego stanu naprężenia w powłoce — nie występuje w wyrażeniu na pracę wirtualną. W przypadku materiałów nieściśliwych wykorzystuje się ją do określenia aktualnej grubości powłoki  $h$ .

Podobnie wektor naprężeń odpowiadający wektorowi odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  przyjmuje się w postaci

$$(5) \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} \equiv 0.$$

Konkretna forma tych wektorów zależy od przyjętej miary odkształcenia i obranego układu współrzędnych.

**3.2. Sformułowanie Eulera.** Zasada prac wirtualnych ma w tym przypadku postać

$$(6) \quad \int_V \boldsymbol{\sigma}'_c \delta\boldsymbol{\varepsilon}_A dV = \int_V \rho \mathbf{b}' \delta\mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{q}' \delta\mathbf{u} dS,$$

gdzie

$\boldsymbol{\sigma}'_c$  — wektor naprężeń Cauchy'ego;

$A$  — indeks odnoszący się do miary odkształceń typu Almansi'ego;

$\mathbf{b}$  — wektor sił masowych;

$\mathbf{q}$  — wektor zewnętrznych obciążeń powierzchniowych;

$\rho$  — gęstość materiału powłoki;

$V$  — objętość powłoki;

$S$  — powierzchnia powłoki.

Wszystkie te wielkości są odniesione do konfiguracji aktualnej.

Na podstawie przeprowadzonej uprzednio dyskretyzacji (1) - (3) oraz relacji  $dV = h dS$  można napisać

$$(4) \quad \delta\mathbf{u}'_e \left( \int_S \mathbf{B}'_A \boldsymbol{\sigma}'_c h dS \right) = \delta\mathbf{u}'_e \left( \int_S \mathbf{N}' \mathbf{b} h \rho dS + \int_S \mathbf{N}' \mathbf{q} dS \right) \equiv \delta\mathbf{u}'_e \mathbf{P}_e.$$

Wielkość

$$(8) \quad \mathbf{P}_e \equiv \int_S \mathbf{N}' (\mathbf{b} h \rho + \mathbf{q}) dS,$$



przedstawia wektor sił węzłowych kinematycznie równoważnych obciążeniom zewnętrznym. Stąd więc równania równowagi elementu zawierające nieznanne przemieszczenia węzłowe mają ostatecznie postać

$$(9) \quad \int_S \mathbf{B}'_A \sigma_c h dS = P_e.$$

**3.3. Sformułowanie Lagrange'a.** W klasycznym opisie Lagrange'a (TL) posługujemy się jedną, ustaloną konfiguracją odniesienia, zazwyczaj określającą pierwotną geometrię powłoki. Zasada prac wirtualnych ma wówczas następującą formę

$$(10) \quad \int_{\circ V} \sigma'_p \delta \varepsilon_G d^{\circ}V = \int_{\circ V} \rho b^t \delta u d^{\circ}V + \int_{\circ S} q^t \delta u d^{\circ}S.$$

W wyniku dyskretyzacji opartej na wzorach (1) - (3) otrzymujemy stąd równania równowagi elementu

$$(11) \quad \int_{\circ S} \mathbf{B}'_G \sigma_p h d^{\circ}S = P_e,$$

przy czym siły węzłowe kinematycznie równoważne obciążeniom wewnętrznym są obecnie równe

$$(12) \quad P_e \equiv \int_{\circ S} \mathbf{N}'(b^{\circ} \rho^{\circ} h + q) d^{\circ}S.$$

We wzorach tych wskaźnik  $G$  oznacza miarę odkształceń Greena-Lagrange'a, zaś  $\sigma_p$  wektor naprężeń Pioli-Kitchhoffa drugiego rodzaju.

**3.4. Uaktualnione sformułowanie Lagrange'a.** W uaktualnionym opisie Lagrange'a stosuje się podejście przyrostowe, w którym konfiguracja odniesienia zmienia się na każdym kroku. Wiąże się ją z reguły z formą jaką przyjmuje powłoka przed ostatnim przyrostem odkształceń (por. rys. 1). Aby wyprowadzić odpowiednią zasadę wariacyjną rozważa się (por. rys. 2) pewną, konfigurację „1” odniesienia oraz konfigurację przyrostową „2”. Zakłada się, że wariacje przemieszczeń wokół stanu równowagi 1 są małe. Można wówczas napisać

$$(13) \quad \int_{1V} \sigma'_p \delta \varepsilon_G d^1V = \int_{1V} \frac{1}{2} \rho b^t \delta u d^1V + \int_{1S} \frac{1}{2} q^t \delta u d^1S,$$

oraz

$$(14) \quad \int_{1V} \sigma'_c \delta \varepsilon_c d^1V = \int_{1V} \frac{1}{2} \rho b^t \delta u d^1V + \int_{1S} \frac{1}{2} q^t \delta u d^1S.$$

W obu tych wyrażeniach wszystkie wielkości związane są z konfiguracją aktualną, lecz odniesione do konfiguracji „1”;  $\mathbf{g}_c$  jest wektorem odkształceń typu Cauchy'ego. Kładąc

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta \varepsilon &\equiv \varepsilon_G - \varepsilon_c, & \Delta \sigma &\equiv \sigma_p - \sigma_c, \\ \Delta \rho &\equiv \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} \rho, & \Delta q &\equiv \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} q, \end{aligned}$$

otrzymamy stąd poszukiwane, przyrostowe sformułowanie zasady wariacyjnej (10) dla powłoki

$$(16) \quad \int_{1S} (\sigma'_c \delta \Delta \varepsilon + \Delta \sigma^t \delta \varepsilon_G) h d^1S = \int_{1S} \Delta \rho b^t \delta u h d^1S + \int_{1S} \Delta q^t \delta u d^1S.$$

Po dyskretyzacji (1) - (3) otrzymujemy stąd równania równowagi

$$(17) \quad \int_{^1S} (\Delta \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}_C + \mathbf{B}_G^t \Delta \boldsymbol{\sigma})^t h d^1S = P_e,$$

gdzie tym razem

$$(18) \quad P_e \equiv \int_{^1S} \mathbf{N}^t (b \Delta q^1 h + \Delta q) d^1S,$$

przy czym

$$(19) \quad \Delta \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_G - \mathbf{B}_C.$$

**3.5. Równania fizyczne.** Równania równowagi elementu należy uzupełnić stosownymi równaniami fizycznymi. Rozpatrywanie różnych możliwych związków konstytutywnych nie jest celem niniejszej pracy, stąd też ograniczymy się jedynie do kilku ogólnych uwag.

Powłoki pneumatyczne wykonuje się na ogół z materiałów, których własności fizyczne poprawnie opisuje teoria ciał wysokoelastycznych [42, 115]. Zachodzi wówczas (por. [8]) relacja

$$(20) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}},$$

co w postaci przyrostowej można zapisać jako

$$(21) \quad \delta \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}^t} \delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie  $W$  oznacza gęstość energii odkształcenia. Dla teorii drugiego rzędu równania (20) mają charakter sprężystości liniowej  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$  zaś dla teorii wyższych rzędów nieliniowej. Równania takie, zwłaszcza dla szczególnego przypadku — materiału Mooney'a-Rivlina — znalazły powszechne zastosowanie w obliczeniach metodą elementów skończonych.

W teorii wiotkich powłok rozważa się ponadto materiały sprężysto-plastyczne i lepko-plastyczne [6, 7, 59] oraz materiały o własnościach reologicznych [118]. Wówczas związki fizyczne są na ogół dane jedynie w postaci przyrostowej

$$(22) \quad \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_T \delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie  $\mathbf{E}_T$  jest macierzą styczną. W takiej sytuacji obliczanie naprężeń nie zawsze jest sprawą trywialną i zależnie od definicji tych naprężeń odbywa się drogą odpowiedniego sumowania ich przyrostów [59].

**3.6. Numeryczne rozwiązywanie problemu.** Równania równowagi elementu (9), (11) oraz (17) są nieliniowe względem przemieszczeń węzłowych nawet przy liniowych związkach fizycznych. Stosowanie efektywnych metod rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych takich jak metoda Newtona-Raphsona, czy też różne metody przyrostowe, wymaga lokalnej linearyzacji tych równań. W przypadku równań metody elementów skończonych taka linearyzacja wiąże się z określeniem tzw. „macierzy stycznej”  $\mathbf{k}_{eT}$ . Można ją uzyskać np. poprzez wariację równań (9), (11) lub (17) i wówczas

$$(23) \quad \delta P_e \equiv (\mathbf{k}_{eL} + \mathbf{k}_{eN}) \delta \mathbf{u}_e \equiv \mathbf{k}_{eT} \delta \mathbf{u}_e.$$

Macierz tę rozbija się na ogół na część liniową  $\mathbf{k}_{eL}$  oraz nieliniową  $\mathbf{k}_{eN}$ . Pierwsza z nich opisuje efekt zmiany naprężeń przy ustalonej geometrii. Przy liniowych związkach fizycz-

nych jest ona równa klasycznej macierzy sztywności znanej z teorii liniowej. Druga ujmując wpływ zmian geometrii powłoki przy niezmiennych naprężeniach i nosi nazwę „macierzy geometrycznej” elementu.

Po agregacji elementów otrzymuje się układy równań przemieszczeniowych powłoki, pierwszy w postaci pełnej nieliniowej

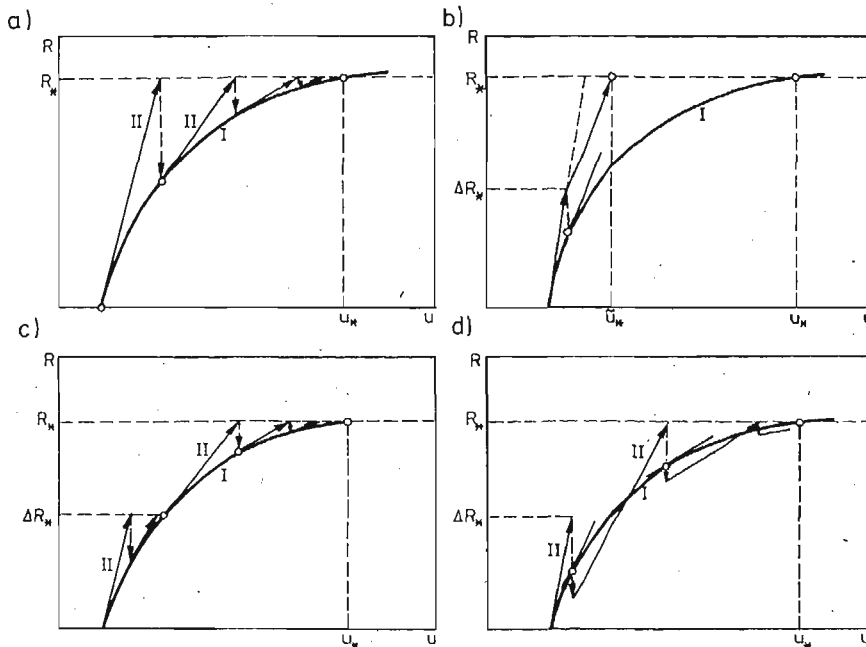
$$(24) \quad f(u_*) = R_*$$

oraz drugi w postaci przyrostowej, zlinearyzowanej

$$(25) \quad K_T \Delta u_* = \Delta R_*$$

Przez „\*” oznaczono tu zbiór wielkości węzłowych w całej powłoce, zaś przez  $R$  wektor wszystkich obciążeń zewnętrznych sprowadzonych do wielkości węzłowych.

Do rozwiązania równań (24) stosuje się (por. rys. 3) na ogół — metodę Newtona-Raphsona; kolejne poprawki liniowe  $\Delta u_*$  oblicza się wówczas przy pomocy równań (25), zaś residua z równań (24);



Rys. 3. Interpretacja graficzna metody: a) Newtona-Raphsona, b) przyrostowej, c) mieszanej, d) samokorygującej, I —  $f(U_*) = R_*$ , II —  $K_T \Delta U_* = \Delta R_*$

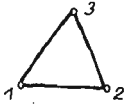
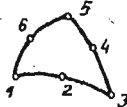
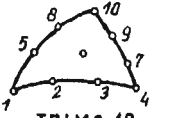

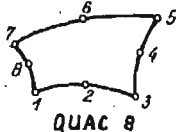
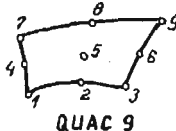
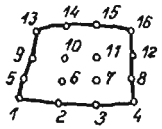
- metodą przyrostową wykorzystując jedynie zlinearyzowane równania (25);
- kombinację obu tych metod ewentualnie połączoną z techniką nadrelaksacji (np. metody samokorygujące).

Istotnym problemem numerycznym jest znalezienie wyjściowej (nie trywialnej) formy powłoki będącej w równowadze. Tylko taka forma bowiem może stanowić właściwą konfigurację odniesienia w podanych uprzednio zasadach wariacyjnych TL i UL. Dlatego też w konkretnych obliczeniach prowadzonych metodą elementów skończonych roz-

wiązywano na ogół takie zadania, w których początkowa forma była z góry znana np. płaska, walcowa, kulista.

Interesujący sposób poszukiwania formy wyjściowej, choć zastosowany nie do powłok pneumatycznych, lecz do siatkowych konstrukcji ścięgowych, zaproponowano w pracy [1]. Umożliwia on rozpoczęcie obliczeń od pewnej płaskiej pomocniczej formy równowagi, której poprzez kolejne przyrosty przemieszczeń nadaje się następnie pożądaną kształt drogą odpowiedniej zmiany warunków brzegowych i sztucznego, chwilowego zwiększenia ciężaru własnego powłoki.

Tablica 1. Wykaz elementów wg pracy [128]

Typ elementu	Liczba węzłów	Jednomiany interpolacyjne w układzie lokalnym	Liczba punktów całkowania numerycz.
 TRIM 3	3	$1$ $\xi_1 \quad \xi_2$	1
 TRIMC 6	6	$1$ $\xi_1^2 \quad \xi_1 \xi_2 \quad \xi_2^2$	7
 TRIMC 10	10	$1$ $\xi_1^3 \quad \xi_1^2 \xi_2 \quad \xi_1 \xi_2^2 \quad \xi_2^3$	13
 QUAM 4	4	$1$ $\xi \quad \eta$	2x2
 QUAC 8	8	$1$ $\xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2$	3x3
 QUAC 9	9	$1$ $\xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2$	3x3
 QUAC 16	16	$1$ $\xi^3 \quad \xi^2 \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^3$	4x4

Natomiast przy znanej formie końcowej, pierwotną formę powłoki można znaleźć stosując sformułowanie Eulera. W pracy [80] zaproponowano, ilustrując to przykładem, aby przyjąć, że kształt powłoki pod działaniem jedynie ciśnienia wewnętrznego (i ciężaru własnego) o ustalonej roboczej wartości jest znany. Stanowi on kolejno:

- formę końcową powłoki przy poszukiwaniu jej formy pierwotnej (sformułowanie E);
- formę początkową powłoki przy poszukiwaniu jej kształtu odpowiadającego różnym obciążeniom użytkowym (sformułowanie UL lub TL).

**3.7. Elementy.** W dotychczasowych pracach najczęściej posługiwano się najprostszymi elementami trójkątnymi TRIM 3 o trzech węzłach. Elementy te, jak wiadomo, mają stałe pole odkształceń oraz naprężeń, stąd przy ich stosowaniu nie jest konieczne uciążliwe całkowanie numeryczne. Z drugiej strony jednak ich dokładność jest mało zadowalająca. Elementom wyższego rzędu poświęcono jak dotąd jedynie nieliczne prace i to stosując w każdej z nich inne podejście.

Najpełniejszy zestaw elementów zarówno trójkątnych typu TRIMC jak i czworokątnych typu QUAC pokazany w tablicy 1 otrzymano w pracy [128] drogą bezpośredniego wykorzystania formuł (11), (17), (23). W pracy [8] przedstawiono rodzinę elementów typu TRIMC otrzymaną na drodze tzw. „naturalnego” podejścia. Polega ono na posługiwaniu się stopniami swobody elementu eliminującymi te przemieszczenia, które są związane z jego ruchem jako bryły sztywnej. Wreszcie w pracach [80, 81] wprowadzono jeden element czworokątny (por. [76]), w którym zastosowano sześciennie funkcje kształtu skonstruowane t.zw. techniką „patch test”.

**3.8. Przegląd literatury.** Wszystkie prace dotyczące obliczania powłok pneumatycznych metodą elementów skończonych oparte są na teorii dużych odkształceń membran. Można je podzielić na trzy grupy.

Pierwsza z nich wiąże się głównie z nazwiskiem J. T. ODENA [111 - 119]. Zaliczyć do niej trzeba przede wszystkim pionierskie prace [11, 118, 119], w których podane zostały teoretyczne podstawy dyskretyzacji wiotkich powłok metodą elementów skończonych oraz monografię [115]. Autorzy pracy [118] wychodząc z równań termodynamiki zarówno dyskutują problematykę fizycznie nieliniową jak i dynamikę membran (por. też [117]). Warto również wspomnieć o pracy [113] poświęconej obliczaniu sił niekonserwatywnych w MES (np. ciśnienie w powłoce pneumatycznej). Do tej grupy, z uwagi na sposób potraktowania tematu, trzeba także zaliczyć prace J. E. KEY'A [57] oraz H. PARISCHA [128]. Ta ostatnia jako jedyna z wymienionych wprowadza elementy wyższych rzędów.

Druga grupa jest dziełem spółki autorskiej J. W. LEONARD, C. T. L. oraz ich współpracowników [76 - 81, 161]. Prócz ścisłości teoretycznej [77, 80] cechuje ją troska o inżynierskie realia dotyczące warunków pracy powłok pneumatycznych takich jak: kolejne fazy obciążania [72, 73], praktyczne zastosowania [74, 45], czy też fakt wzmocnienia konstrukcji linami [81, 161]. Materiał powłoki przyjmowano jako liniowo-sprężysty a wyjątkowo [77] jako hiperelastyczny. Rozważano również [79] problem drgań powłoki.

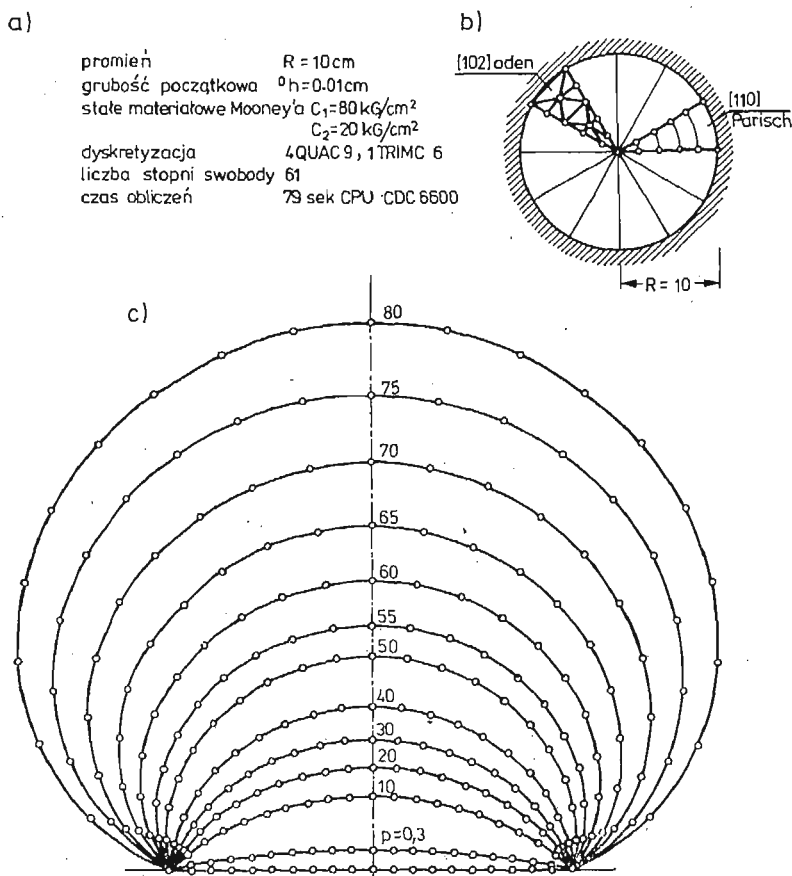
Trzecia grupa to prace [5 - 8, 59] charakteryzujące się tzw. podejściem naturalnym sformułowanym przez J. H. ARGYRISA i jego współpracowników. Dzięki oddzieleniu przemieszczeń elementu związanych z czystym odkształceniem od przemieszczeń wynikających z ruchu sztywnego uzyskuje się lepszą stabilność numeryczną rozwiązań. W pracach tej grupy materiał powłoki traktowano jako liniowo-sprężysty [7], hipersprężysty [8]

bądź też sprężysto-plastyczny [6, 7, 59], choć w tym ostatnim przypadku konkretne rozwiązania nie dotyczyły bezpośrednio powłok pneumatycznych.

Prócz trzech wymienionych grup warto tu też wspomnieć o programie NONSAP [10] przeznaczonym do dynamicznej i statycznej analizy różnych konstrukcji w zakresie geometrycznie i fizycznie nieliniowym, w tym także płaskich membran.

Porównanie diskutowanych tu grup przeprowadzono na przykładzie kilku prac reprezentujących aktualnie najbardziej zaawansowany stan wiedzy w dziedzinie teorii obliczania wiotkich powłok metodą elementów skończonych. Analiza tablicy 2, w której zestawiono dane porównawcze ukazuje równocześnie perspektywę dalszych prac badawczych co zaznaczono znakiem 0 na przykładzie pracy [8].

**3.9. Przykłady rozwiązań.** Dla zilustrowania aktualnych możliwości rozwiązywania problemów praktycznych metodą elementów skończonych podano niżej kilka reprezentatywnych przykładów zaczerpniętych z literatury. Aby łatwiej można było porównać skalę poszczególnych zadań korzystano tylko z dwóch źródeł [128, 80]. W pierwszej z tych prac obliczenia wykonywano na EMC CDC 6600; czas obliczeń podawany jest w sekundach

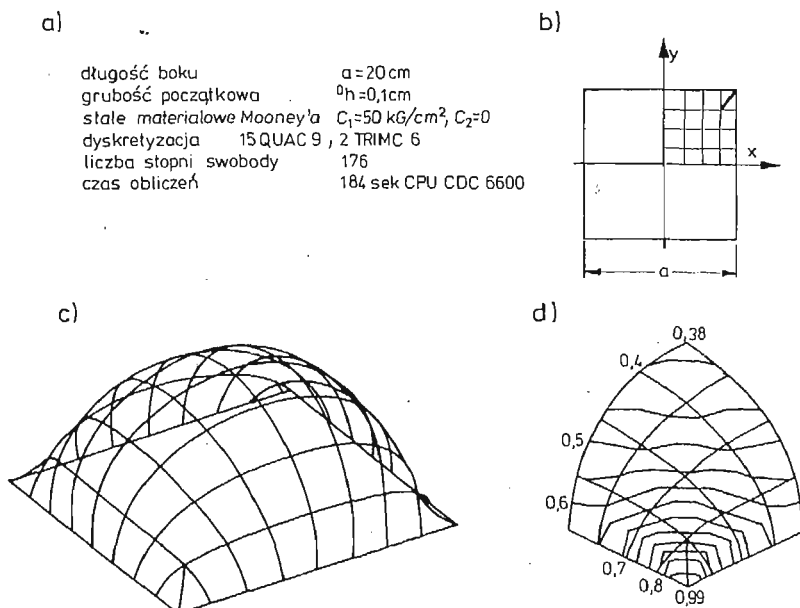


Rys. 4. Membrana kołowa obciążona równomiernym parciem gazu [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma odkształcona

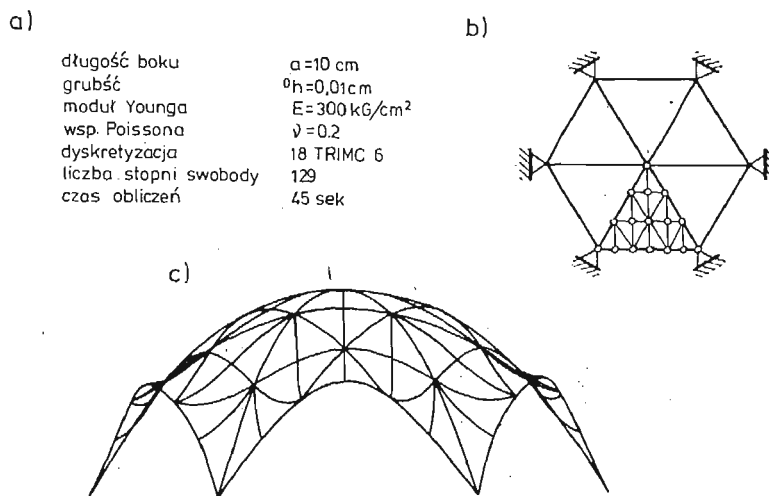
CPU. W czterech ostatnich przykładach wykorzystano prawo Hooke'a, zaś w dwóch pierwszych związek fizyczny (por. [42])

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

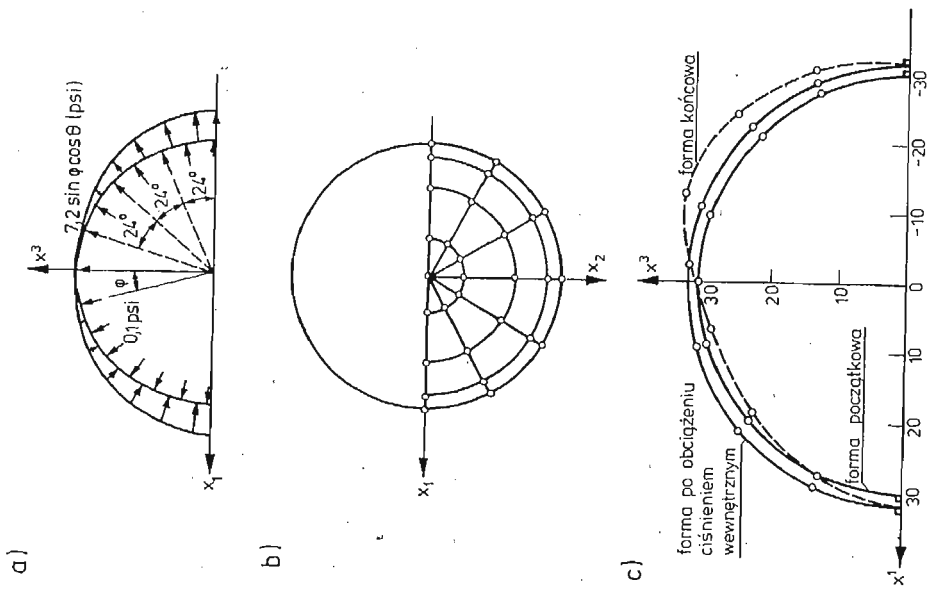
opisujący ciało hipersprężyste Moone'a-Rivlina. Gęstość energii odkształcenia wyraża



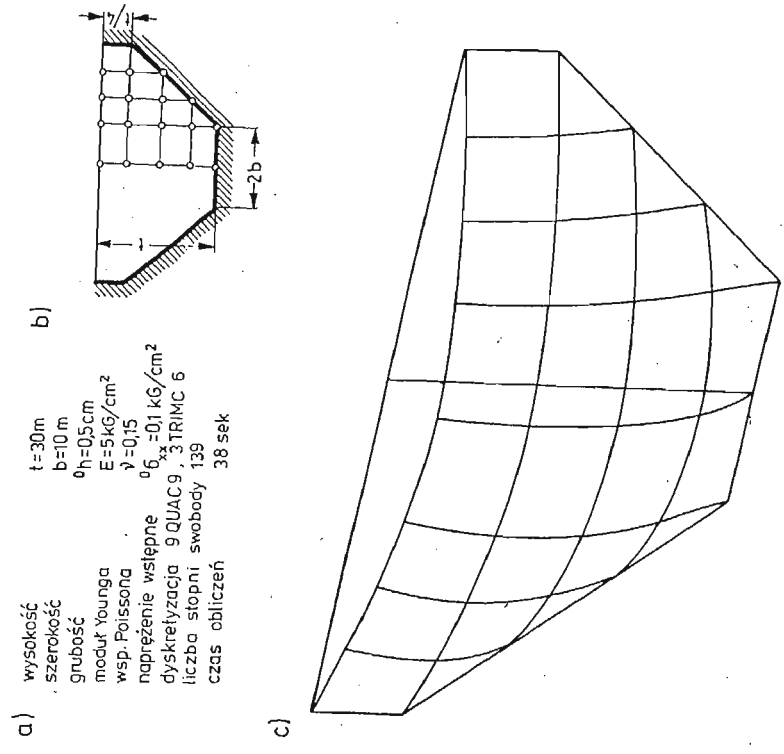
Rys. 5. Membrana kwadratowa obciążona parciem gazu [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma odkształcona, d) grubość względna  $h/h^0$  po odkształceniu



Rys. 6. Membrana sześciokątna obciążona ciężarem własnym [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma po obciążeniu



Rys. 8. Kulista powłoka pneumatyczna obciążona parciem wiatru [80, 81]: a) obciążenie, b) dyskretyzacja, c) forma po obciążeniu — parciem wewnętrznym gazu - - - - wiatrem



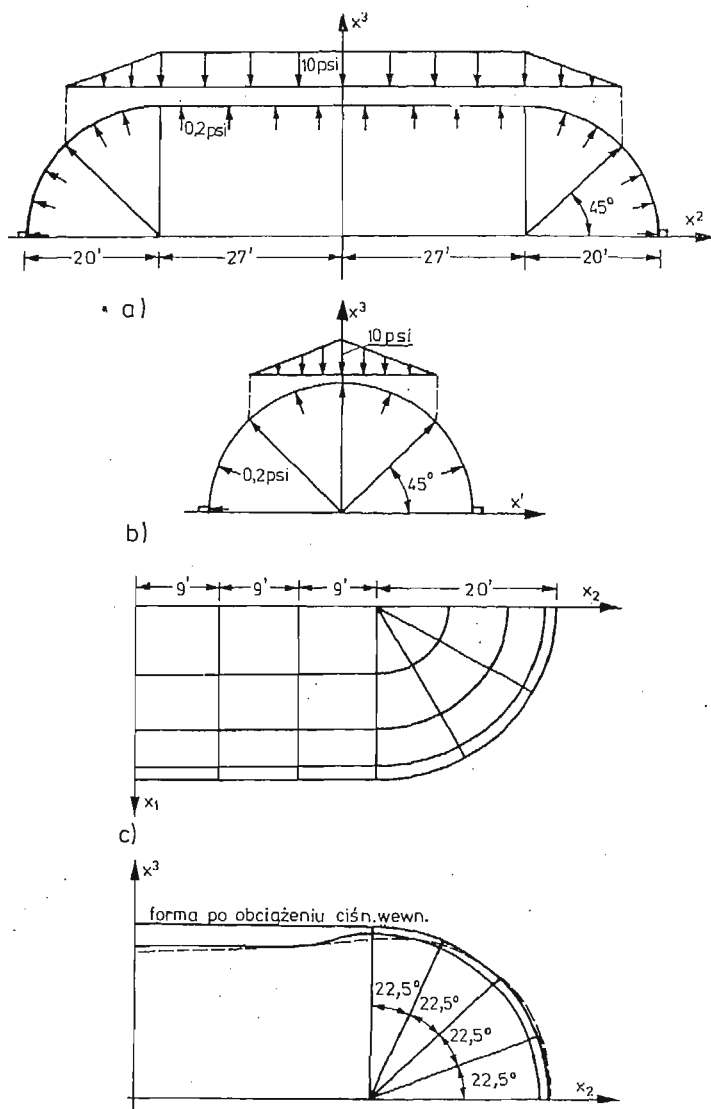
Rys. 7. Membrana obciążona parciem hydrostatycznym [128]: a) dane, b) dyskretyzacja, c) forma po obciążeniu



się tu poprzez niezmienniki stanu odkształcenia  $I_1, I_2$  i zależy również od stałych materiałowych  $C_1$  oraz  $C_2$ .

Rozwiązane zostały następujące zadania szczegółowe:

- membrana kołowa obciążona równomiernym parciem gazu ([128] — rys. 4);
- membrana kwadratowa obciążona parciem gazu ([128] — rys. 5);
- membrana sześciokątna obciążona ciężarem własnym ([128] — rys. 6);
- membrana pięciokątna obciążona parciem hydrostatycznym ([128] — rys. 7);
- kulista powłoka pneumatyczna obciążona parciem wiatru ([80, 81] — rys. 8);
- powłoka pneumatyczna obciążona śniegiem ([80] — rys. 9).



Rys. 9. Powłoka pneumatyczna obciążona śniegiem [80]: a) obciążenie, b) dyskretyzacja, c) forma powłoki odkształconej

## 4. Uwagi końcowe

W pracy zebrano i krótko scharakteryzowano literaturę dotyczącą powłok pneumatycznych, która ukazała się w ostatnim dziesięcioleciu. Wyodrębniono w niej główne nurty (szkoły) związane z kilkoma wiodącymi ośrodkami i szkiecowo przedstawiono metody obliczeniowe stosowane w teorii wiotkich powłok, ze szczególnym uwzględnieniem metody elementów skończonych.

Tablica 2. Zestawienie porównawcze reprezentatywnych prac poświęconych analizie wiotkich powłok metodą elementów skończonych

Grupa Praca		ODEN		LEONARD - Li			ARGYRIS	
		118	128	80	81	77	8	59
Opis	Eulera E			+			+	
	Lagrange'a TL	+	+			+	+	+
	waktualniony Lagrange'a UL			+	+		0	+
Metoda rozwiązania	iteracyjna	+	+	+(E)		+	+	+
	przyrostowa			+(UL)	+	+	+	+
Materiał (równania konstytutywne)	liniowa sprężysty	+	+	+	+		+	
	hipersprężysty	+	+			+	+	
	sprężysto - plastyczny	(+)					0	+
	lepkosprężysty	+					0	
	lepkoplastyczny						0	+
	izotropia	+	+	+	+	+	+	+
	anizotropia	+					+	
	efekty termiczne	+					0	
Elementy	najprostszy trójkatny	+	+				+	+
	wyższego rzędu			+	+	+	+	
Strefa	$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$	+	+	+	+	+	+	+
	$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 = 0$ (fatdy)						0	
Struktura	prosta : membrana	+	+	+		+		+
	złożona : membrana + kable				+		(+)	
Nieznana forma	końcowa	+	+	+(UL)	+	+	+	+
	początkowa			+(E)			0	
	statyka	+	+	+	+	+	+	+
	stateczność						0	
	dynamika	+					0	
	analiza	+	+	+	+	+	+	+
	optymalizacja						0	

Analiza przeprowadzona w niniejszej pracy pozwala na sformułowanie następujących ogólnych wniosków.

- Podstawowy zarys teorii wiotkich membran jest opracowany w przypadku materiałów hipersprężystych (por. [42, 115]). Dalszego rozwoju tej teorii można i oczekiwać przede wszystkim przy zastosowaniu nowych materiałów (nowe prawa konstytutywne).
- W świetle tej teorii poprawnie sformułowane zagadnienia dla powłok pneumatycznych są z reguły nieliniowe (geometrycznie) nawet w przypadku liniowych związków fizycznych.
- Efektywne rozwiązania dla powłok pneumatycznych można aktualnie uzyskać jedynie poprzez odpowiednią dyskretyzację problemu i stosowanie metod numerycznych. W zagadnieniach obrotowo-symetrycznych mogą to być różne metody bezpośredniego całkowania, natomiast w ogólnym przypadku zdecydowanie najbardziej skuteczna okazała się metoda elementów skończonych, która obecnie stanowi jedyne efektywne narzędzie rozwiązywania praktycznie dowolnych problemów teorii wiotkich powłok, chociaż jej potencjalne możliwości ciągle jeszcze nie zostały w pełni wykorzystane (por. tablica 2).
- Pomimo opracowania podstaw teoretycznych oraz pojawienia się skutecznej metody analizy problematyka wiotkich powłok ciągle jeszcze stanowi pole badań naukowych. Świadczą o tym choćby liczne prace naukowe jakie się ostatnio ukazują. Wśród nich w samych tylko latach siedemdziesiątych znaleźć można siedem rozpraw doktorskich [19, 34, 79, 124, 128, 145, 161]. Trzeba jednak nadmienić, że w świetle bezspornych sukcesów metody elementów skończonych w rozwiązywaniu różnych problemów dotyczących powłok pneumatycznych o dowolnym kształcie wiele z tych prac straciło rację bytu i w ogóle nie powinno się ukazać.

Perspektywy dalszych prac nad problematyką wiotkich powłok to przede wszystkim

- uwzględnienie nowych praw konstytutywnych w szczególności dla materiałów o własnościach reologicznych oraz wpływów termicznych;
  - opracowanie ścisłej teorii strefy fałdów ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ );
  - dalszy postęp w dziedzinie teoretycznego sformułowania problemów stateczności i dynamiki;
  - rozwiązywanie zagadnień specjalnych, np. kontaktowych (więzy jednostronne);
  - obliczanie złożonych struktur powłokowo-liniowych;
  - optymalizacja konstrukcji pneumatycznych;
  - dalszy rozwój metod obliczeniowych, w tym głównie:
    - = metody elementów skończonych (por. tablica 2) tak, aby można było przy jej pomocy efektywnie rozwiązywać wszystkie problemy wymienione wyżej;
    - = podjęcie szerszej próby wykorzystania na równi z metodą elementów także metody różnic skończonych, zwłaszcza w jej wersji opracowanej dla nieregularnych siatek węzłów; pierwsze prace w tym kierunku [56, 82] są nader zachęcające;
    - = pełniejsze opracowanie zagadnienia poszukiwania pierwotnej formy powłoki (por. [1, 80]);
  - prowadzenie różnorodnych prac doświadczalnych;
- Realizacja takiego programu prac jest w pełni realna, a jego wykonanie umożliwiłoby

efektywne rozwiązywanie rozmaitych skomplikowanych problemów inżynierskich, które ze swej strony zapewne stawiać będą przed teorią i metodami obliczeniowymi coraz to nowe zadania.

#### Literatura cytowana w tekście

1. TH. ANGELOPULOS; *Zur Formfindung und Dynamik von Vorgespannten Netzwerkkonstruktionen*, Ph. D. thesis, Univ. of Stuttgart, 1977.
2. С. А. АЛЕКСЕЕВ; *Основы общей теории мягких оболочек*, Расчет пространственных конструкций, Стройиздат., Москва, II, 1966.
3. С. А. АЛЕКСЕЕВ; *Задачи статики и динамики мягких оболочек*, ТВКТОП VI, 1966.
4. С. А. АЛЕКСЕЕВ, Ю. А. МАХАЛОВ; *Экспериментальное исследование модели пневмокаркасного сооружения в потоке воздуха*, Строит. Мех., 2, 1972, 9 - 11.
5. J. H. ARGYRIS, P. C. DUNNE; TH. ANGELOPULOS, B. BICHAT; *Large Natural Strains and Some Special Difficulties Due to Nonlinearity and Incompressibility in Finite Elements*, CM. AME, 4, 10 (1974), 219 - 278.
6. J. H. ARGYRIS, M. KLEIBER; *Finite Strain Elasto-Plasticity and Its „Natural“ Discretized Formulations*, CM. AME, 11, 13 (1977), 215 - 247.
7. J. H. ARGYRIS, J. ST. DOLTSINIS, M. KLEIBER; *Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Strain Elasto-Plasticity-Natural Approach Part II*, CM. AME, 2, 14 (1978), 259 - 294.
8. J. H. ARGYRIS, M. HAASE, J. ORKISZ; *Higher Order Simplex Elements for Large Strain Analysis of Membranes — Natural Approach*, Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Mechanics, ISD Stuttgart, Aug. 1978.
9. Л. И. БАДАБУХ, В. И. УСУКИН; *Приближенная теория мягких оболочек вращения*, ТВКТОП VIII, 1971.
10. K. J. BATHE, E. RAMM, E. L. WILSON; *Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis*, I J. NME, 1, 9 (1975), 353 - 386.
11. G. BERGER, E. MACHER; *Results of Wind Tunnel Tests of Some Pneumatic Structures*, Proc. ICPS I, 1967.
12. W. W. BIRD; *The Development of Pneumatic Structures, Past, Present and Future*, Proc ICPS I, 1967.
13. Р. Г. БОРСОВ; *О расчете мягкой цилиндрической оболочки закрепленной вдоль образующих*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 31 - 37.
14. D. L. BOYER, W. GUTKOWSKI; *Liquid Filled Membranes*, Int. J. Non-linear Mechanics, 5, 1970, 299 - 310.
15. Б. Л. БУЖИН; *Устойчивость сетчатой оболочки вращения нагруженной внутренним давлением*, ТВКТОП VIII, 1971, 249 - 254.
16. Z. BYCZAWSKI; *Large Deflections of the Elasto-Creeping Circular Membrane*, AMS, 3, 17 (1965), 427 - 439.
17. L. Y. CHEN, R. T. SHIELD; *The Stability of a Finitely Inflated Cylindrical Elastic Membrane under Axial Compression*, J. Elasticity, 3 - 4, 5 (1975), 363 - 377.
18. J. D. C. CRISP; L. J. HART-SMITH; *Multilobed Inflated Membranes: Their Stability under Finite Deformation*, ISS, 7, 7 (1971), 843 - 862.
19. D. E. DIETRICH; *Nonlinear Analysis of Arbitrary Hyperelastic Membrane Shells by the Finite Element Method*, Ph. D. thesis New York State Univ., Buffalo, 1973.
20. Б. И. ДРУЗЬ; *Колебания мягкой оболочки в потоке газа*, Строит. Мех., 3, 1969, 47 - 49.
21. Б. И. ДРУЗЬ; *О форме поперечного сечения воздухоопорной цилиндрической оболочки*, Строит. Мех., 4, 1973, 16 - 19.
22. В. В. ЕРМОЛОВ; *Деформации цилиндрической пневматической оболочки под действием ветровой нагрузки*, Строит. Мех., 6, 1969, 4 - 7.
23. В. В. ЕРМОЛОВ; *Симптозюм по пневматическим оболочкам*, Строит. Мех., 6, 1973, 74 - 76.

24. Л. А. ФАЛЕВСКАЯ, Л. А. МАТВЕЕВА; *К оценке деформированного состояния составных пневматических конструкций*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 59 - 66.
25. W. W. FENG, P. HUANG; *On the Inflation of Plane Nonlinear Membrane*, Trans. ASME, AM, Ser E, 41 (1974), 767 - 771.
26. W. W. FENG, P. HUANG; *On the General Contact Problem of an Inflated Nonlinear Plane Membrane*, ISS 4, 11 (1975), 437 - 449.
27. W. W. FENG, J. T. TIELKING; *Large Plane Deformations of Rectangular Elastic Sheets*, ZAMP, 6, 27 (1976), 781 - 789.
28. W. W. FENG, J. T. TIELKING, P. HUANG; *The Inflation and Contact Constraint of Rectangular Membrane*, Trans. ASME, AM (w druku).
29. W. W. FENG, W. H. YANG; *On the Contact Problem of an Inflated Spherical Nonlinear Membrane*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 40 (1973), 209 - 214.
30. В. И. ФЕОДОСЬЕВ; *О формах равновесия сферической оболочки при внутреннем давлении*, Прикл. Мат. Мех., 32 (1968).
31. Ю. Ф. ФОКИН; *Устойчивость некоторых безмоментных оболочек при больших деформациях*, Проблемы устойчивости в строительной механике, Стройиздат., 1965.
32. Н. О. FOSTER; *Very Large Deformations of Axially Symmetrical Membranes Made of Neo-Hookean Materials*, I J. ES, 1, 5 (1967).
33. S. FUCHIZAWA, H. TAKEYANA; *Study on The Bulge Forming of Thin-Walled Cylinder*, J. Jap. Soc. Prec. Eng., 8, 37 (1971).
34. Г. ГАСЯК; *Большие деформации тонких оболочек начальной цилиндрической формы*, Кандидатская диссерт. Инж. Строй. Инс., Куйбышева, Москва, 1977.
35. Г. ГАСЯК; *Несущая способность безмоментной оболочки начальной цилиндрической формы при больших деформациях*, Изв. вузов, Машиностроение, 7, 1977.
36. Г. А. ГЕНЕВ; *Расчет цилиндрических пневмооболочек на действие ветровых нагрузок с учетом больших перемещений*, Прочность и деформативность конструкций с применением пластмасс, Стройиздат, 1966.
37. P. G. GLOCKNER, T. VISHWANATH; *On the Analysis of Nonlinear Membranes* Dpt. CE Rpt, Univ. of Calgary, Alberta, Canada, Feb. 1971.
38. Г. И. ГОЛОВНЯ А. Г. МОЛЧАНОВ; *Определение вариационным методом формы равновесия мягкой оболочки имеющей начальную геометрию в виде правильного тетраэдра*, ТВКТОП, IX 1973, 40 - 42.
39. В. В. ГОНЧАРУК; *Цилиндрическая мягкая оболочка под действием давления горизонтальной нагрузки и момента* Тр. НКИ вып. 106, 1975 57 - 60.
40. А. А. ГОРЕШВИЛИ; *О формировании пневматических оболочек*, Исследования строительных конструкций сельскохозяйственных зданий и сооружений, вып. I, Стройиздат, 1967.
41. А. А. ГОРЕШВИЛИ, Л. И. ЯРИН; *Расчет на ветровую нагрузку воздухоопорного цилиндрического свода*, Строит. Мех., 2, 1971, 17 - 19.
42. A. E. GREEN, J. E. ADKINS; *Large Elastic Deformations*, Pergamon Press, Oxford, 1960.
43. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения*, МТТ, I, 1967.
44. A. S. GRIGORIEV; *Tensile Instability in Cases of Large Deformations*, Geophys. T. R. Astr. Soc., 14, 1967.
45. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях*, ТВКТОП VII, 1970, 779 - 787, МТТ, I, 1970.
46. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *Большие деформации неоднородных осесимметрических оболочек*, ТВКТОП VIII, 1971.
47. А. С. ГРИГОРЬЕВ; *О теории больших деформаций тонких неоднородных оболочек*, Механика деформируемых тел и конструкций, Машиностроение, Москва, 1975.
48. L. J. HART-SMITH, J. D. C. CRISP; *Large Elastic Deformations of Thin Rubber Membranes*, I J. ES, 1, 5 (1967), 1 - 24.
49. E. HAUG, G. H. POWELL; *Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures*, SESM Rpt. No 72-7, Dept. of Civ. Engng, Univ. of California, Berkeley, 1972.

50. HELLAN KARE; *Finite Creep of Closed Membranes of Revolution*, Acta Polytechn. Scand. Mech. Eng., Ser. A, 57, 1971.
51. H. D. HIBBIT, P. V. MARCAL, J. R. RICE; *A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement*, ISS, 6 (1970), 1069 - 1086.
52. G. HERRIGMOE, P. G. BERGAN; *Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems*, SM. AME, 7, 12 (1976), 201 - 217.
53. В. А. ИВОВИЧ; *Собственные колебания мягкой пневматической оболочки цилиндрической формы*, Строит. Мех., 2, 1976, 50 - 54.
54. M. VAN JAETHENAN Jr.; *Widerstandsfähigkeit biegeweicher Schalen*, Z. Bauplanung und Bautechnik, 9, 1969.
55. Я. Ф. КЛЮК; *Основные соотношения геометрически нелинейной теории мягких оболочек вращения*, Докл. АН УССР, 8, 1976A, 715 - 719.
56. R. KAO, N. PERRONE; *Large Deflections of Flat Arbitrary Membranes*, C and S, 4, 2 (1972), 535 - 546.
57. J. E. KEY; *On the Numerical Solution of Certain Problems in Finite Element Method*, IJ. NME, 2, 9 (1975), 483 - 487.
58. M. KLEIBER; *Lagrangian and Eulerian Finite Element Formulation for Large Strain Elasto-Plasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 23 (1975), 117 - 126.
59. M. KLEIBER; *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych, teoria i numeryczna analiza konstrukcji*, Prace IPPT PAN, Warszawa, 1978.
60. Ю. Н. КОРОБАНОВ; *Мягкий тор под касательной нагрузкой и внутренним давлением*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 35 - 41.
61. Ю. М. КОРОБАНОВ; *Осесимметричная задача мягкой оболочки вращения в физически и геометрически нелинейной постановке*, ТВКТОП X, 1975, 456 - 464.
62. C. N. KOSTEM; *Optimum Shaped Pneumatic Roofs*, Symposium IASS, Kielce, 18 - 23 June 1973, 77 - 87.
63. В. Д. КУЛАГИН; *Некоторые вопросы общей теории одноосно напряженных мягких оболочек*, Строит. Мех., 3, 1970, 16 - 18.
64. В. Д. КУЛАГИН, В. Э. МАГУЛА; *К расчету мягких оболочек в зоне складчатости*, Сб. материалов 13 и 14 конкурсов, Дальиздат., 1968.
65. H. KUNIEDA; *Flutter og Hanging Roofs and Curved Membrane Roofs*, ISS, 4, 11 (1975), 477 - 492.
66. H. H. KUO; *Numerical Approach to Large Elastic Deformation of Axi-Symmetrical Membrane Problems*, Ph. D. thesis Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1969.
67. A. D. KYDONIEFS; *The Finite Inflation of an Elastic Toroidal Membrane*, IJ, ES., 6, 5 (1967).
68. A. D. KYDONIEFS, A. T. SPENCER; *The Finite Inflation of an Elastic Torus*, IJ. ES., 2, 3 (1965).
69. В. В. ЛЕВАНИДОВ; *Деформация мягкой сферической оболочки изготовленной из ортотропной пленки*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 80 - 87.
70. Э. Л. ЛЕГЛЕР; *Расчетное и экспериментальное исследование собственных колебаний мягкой цилиндрической оболочки. Экспериментальное исследование автоколебаний мягкой цилиндрической оболочки в потоке воздуха*, Тр. ЦАГИ, вып. 1253, 1970.
71. J. W. LEONARD; *Behaviour on Pressure Stabilized Inflatable Shells of Revolution*, Ph. D. thesis Univ. of Illinois, Urbana, III, (1966).
72. J. W. LEONARD; *Inflatable Shells: Pressurization Phase*, Proc. ASCE, EM2, Paper 5212, 93 (1967), 207 - 227.
73. J. W. LEONARD; *Inflatable Shells: In-Service Phase*, Proc. ASCE, EM6, Paper 5642, 93 (1967), 67 - 85.
74. J. W. LEONARD; *Inflatable Shells for Underwater Use*, Proc. Third Annular Offshore Technology Conf., Huoston, Texas, Apr. 1971.
75. J. W. LEONARD; *Use of Pressurized Membranes as a Low-Cost Erection Scheme for Concrete Structures*, Proc. Second Int. Symp. on Lower Cost Housing Problems Related to Urban Renewal and Development, Univ. of Missouri, Rolla, Mo., Apr. 1972.
76. J. W. LEONARD; C. T. LI; *Strongly Curved Finite Element for Shell Analysis*, Proc. ASCE, EM 3, 99 (1973), 515 - 535.
77. J. W. LEONARD, V. K. VERMA; *Double-curved Element for Mooney-Rivlin Membranes*, Proc. ASCE, EM4, 102 (1976), 625 - 641.

78. C. T. LI; *Analysis of Inflatable Shell by Finite Element Method*, Ph. D. dissertation, State Univ. of New York at Buffalo, 1973.
79. C. T. LI, J. W. LEONARD; *Non-linear Response of a General Inflatable Shell to In-service Loads*, IAASS Conference, Calgary, 1972.
80. C. T. LI, J. W. LEONARD; *Finite Element Analysis of Inflatable Shells*, Proc. ASCE, EM3, 99 (1973), 495 - 514.
81. C. T. LI, N. K. SRIVASTAVA; *Analysis of Pneumatic Shell with or without Cable Net; General Finite Element Formulation, Geometrical Nonlinear Behaviour of Cable-reinforced Inflatable Shells*, C and S, 4 (1974), 813 - 828.
82. T. LISZKA, J. ORKISZ; *Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Meshes in Non-linear Problems of Applied Mechanics*, Trans. of the 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, Aug. 1977.
83. А. М. ЛОКОЩЕНКО, С. А. ШЕСТЕРИКОВ; *Круглая вязко-упругая мембрана под действием равномерного давления*, МТТ, 5, 1967.
84. В. Э. МАГУЛА и др.; *Судовые мягкие емкости*, Судостроение, 1966.
85. В. Э. МАГУЛА; *К теории мягких цилиндрических оболочек, обладающих изгибной жесткостью*, Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВВИМУ, вып. 3, Владивосток, 1968.
86. В. Э. МАГУЛА; *Сводка основных зависимостей теории мягких цилиндрических оболочек под гидростатической нагрузкой*, Научные тр. ДВВИМУ, вып. 5, Владивосток, 1968.
87. Э. В. МАГУЛА; *Базовые формулы для расчета мягких оболочек вращения в одноосном состоянии*, Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВВИМУ, вып. 2, Владивосток, 1970.
88. Э. В. МАГУЛА; *Связь одноосного состояния с раскрытием мягкой оболочки*, ТВКТОП VII, 1970, 582 - 587.
89. В. Э. МАГУЛА; *Обобщенные формулы статики некоторых мягких оболочек*, Строит. Мех., 6, 1972, 33 - 35.
90. В. Э. МАГУЛА; *Общие закономерности складкообразования мягких оболочек*, Тр. НКИ, вып. 63, 1972.
91. В. Э. МАГУЛА; *К расчету гибкой цилиндрической оболочки*, Строит. Мех., 2, 1973, 26 - 29.
92. В. Э. МАГУЛА; *К теории мягких оболочек плоского раскрытия*, Тр. НКИ, вып. 92, 1974.
93. В. Э. МАГУЛА; *Сдвиг нагруженной давлением мягкой оболочки плоского раскрытия*, Тр. НКИ, вып. 92, 1974.
94. В. Э. МАГУЛА; *Сдвиг сетчатой оболочки, нагруженной нормальным давлением*, Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам, вып. 28, Владивосток, 1974.
95. В. Э. МАГУЛА; *О противоречии порождаемом гипотезной нерастяжимости мягких оболочек*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 3 - 13.
96. В. Э. МАГУЛА; *Принципы расчета мягких оболочек плоского раскрытия*, ТВКТОП X, т. I, 1975, 465 - 469.
97. В. Э. МАГУЛА; *Методические соображения о процедуре перехода от гибкой к абсолютно гибкой оболочке*, Тр. НКИ, вып. 116, 1976, 86 - 88.
98. В. Э. МАГУЛА, Б. И. ДРУЗЬ, В. Д. КУЛАГИН, Е. П. МИЛОСЛАВСКАЯ, М. В. НОВОСЕЛОВ; *Судовые мягкие емкости*, Судостроение, 1966.
99. В. Э. МАГУЛА, Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *К расчету мягкой цилиндрической оболочки с поперечными диафрагмами*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 44 - 48.
100. В. Э. МАГУЛА, А. Д. МОСКАЛЕНКО; *Статика гибких стенок под давлением несвязной сыпучей среды*, Строит. Мех., 4, 1970, 5 - 9.
101. В. Э. МАГУЛА, Ф. П. ШАВКИН; *Особенности нелинейных колебаний пневматических оболочек с грузом*, Строит. Мех., 2, 1971, 49 - 52.
102. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *Цилиндрическая мягкая оболочка под действием давления и горизонтальной нагрузки*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 52 - 57.
103. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *Влияние жесткой вставки на усилия в цилиндрической мягкой оболочке*, Тр. НКИ, вып. 106, 1975, 48 - 52.
104. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *К расчету вертикальной жесткости цилиндрической мягкой оболочки*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 54 - 58.

105. Б. Н. МАРТЫНЕЦ; *К расчету мягкой цилиндрической оболочки с неравномерной по периметрии*, Тр. НКИ, вып. 116, 1976, 93 - 98.
106. В. А. МЕШКУРОВ; *Графоаналитический метод расчета воздухоопорного купола, усиленного ван-тами*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 67 - 73.
107. J. MERUER, J. FREMAN, A. ROSNA; *Large Deformations and Stresses of a Thin Highly Elastic, Toroidal Shell under Internal Pressure*, ISS, 8, 6 (1970), 1233 - 1241.
108. А. Г. МОЛЧАНОВ, С. П. ЧЕРНИКОВ; *О равновесии мягкой одноосной цилиндрической оболочки под действием осевых растягивающих усилий и внутреннего давления*, ТВКТОП, IX, 1973, 76 - 78.
109. В. А. НАУМОВ, Н. П. СТРЕКОЗОВ; *Исследование напряженного и деформированного состояния мягкого цилиндра, навитого на эластичный барабан*, ТВКТОП, X, т. I, 1975, 478 - 481.
110. В. А. НАУМОВ, В. А. ТЕРЕЩЕНКО; *Расчет мягкой тороидальной оболочки при действии внутреннего давления и торцевых усилий нормальных к оси вращения*, Тр. Моск. высш. техн. уч-ща Н. Э. Баумана, 206, 1975, 103 - 106.
111. J. T. ODEN; *Analysis of Large Deformation of Elastic Membranes by the Finite Element Method*, Proc. IASS Congress on Large Span Shells, Leningrad, Sept. 1966.
112. J. T. ODEN; *Numerical Formulation of Nonlinear Elasticity Problems*, Proc. ASCE, EM, 93 (1967), 235 - 255.
113. J. T. ODEN; *Note on an Approximate Method for Computing Non-Conservative Generalized Forces on Finite of Deformed Finite Element*, AIAA J. 11, 8 (1970), 2088 - 2090.
114. J. T. ODEN; *Finite Deformation of Elastic Plates, Shells and Membranes by the Finite Element Method*, Proc. IASS Calgary, Alberta, Canada, July 1972, 63 - 89.
115. J. T. ODEN; *Finite Element of Non-linear Continua*, MC Graw-Hill, New York, 1972.
116. J. T. ODEN; *Some Results of Finite Element Applications in Finite Elasticity*, C and S, 1, 3 (1973), 175 - 194.
117. J. T. ODEN, J. E. KEY, R. B. FOST; *A Note on the Analysis of Nonlinear Dynamics of Elastic Membranes by the Finite Element Method*, C and S, 2, 4 (1974), 445 - 452.
118. J. T. ODEN, W. K. KUBITZA; *Numerical Analysis of Non-linear Pneumatic Structures*, Proc. ICPS I, 1967.
119. J. T. ODEN, T. SATO; *Finite Strains and Displacements of Elastic Membranes by the Finite Element Method*, ISS, 3 (1967), 471 - 488.
120. J. ORKISZ; *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materialu*, Politechnika Krakowska, Kraków, Zesz. Nauk. 11, (1967).
121. J. ORKISZ; *Finite Deformations of Flexible Axisymmetric Shells According to the Generalized Theory of Plastic Flow*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 9, 17 (1969), 437 - 444.
122. J. ORKISZ; *Finite Deformations of Flexible Inelastic Orthotropic Shells of Revolution*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 11 - 12, 17 (1969), 511 - 518.
123. J. ORKISZ; *Unsteady Creep of Rotationally Symmetric Pneumatic Shells in the Light of the Generalized Kelvin Model*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 6, 21 1973.
124. J. ORKISZ, J. WILK; *Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 7 (1969), 179 - 193. *Numerical Procedure for Slender Axisymmetric Shells Subjected to Plastic Flow in the Range of Large Deformations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1, 18 (1970), 29 - 37.
125. F. OTTO; *Pneumatic Structures*, The MIT Press, Cambridge, Mass., USA, 1967.
126. F. OTTO, R. TROSTEL; *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Fachverlag, Frankfurt - Berlin, 1962.
127. С. В. ПАНОВ; *Локальное нагружение мягкой оболочки вращения*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 38 - 45.
128. H. PARISCH; *Zur Berechnung von Membranschalen unter Endlicher Deformation mit der Methode der Finiten Elemente*, Doctoral Thesis, Univ. Stuttgart, 1977.
129. Б. Л. ПЕЛЕХ; *Некоторые контактные задачи для мягких оболочек из высокоэластичных материалов*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 24 - 30.
130. С. М. ПЕВЗNER; *Взаимодействие грунта и мягкой оболочки в подпорном сооружении*, Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВВИМУ, вып. 3, Владивосток, 1968.



131. Ю. Н. Подладчиков, И. И. Федик; *Исследование форм равновесия тласселых жидкостных оболочек вращения*, ТВКТОП VII, 1970, 479 - 485.
132. Л. Н. Покровский; *Динамика гибких пологих оболочек обтекаемых потоком жидкости*, ТВКТОП IX, 1973, 215 - 218.
133. *Proceedings of the 1 st International Colloquium on Pneumatic Structures*, Stuttgart, 1967 (Proc. ICPS I).
134. *Proceedings of the 2nd International Colloquium on Pneumatic Structures*, Delft, Sept. 1972.
135. E. W. ROSS; *Large Deflections of an Inflated Cylindrical Tent*, Trans. ASME, AM, ser. E, 4, 36 (1969), 845 - 851.
136. *Сборник 5-й Дальневосточн семинара по мягким оболочкам*, Владивосток, 1976 (Сб. 5-й ДСМО).
137. A. SIEV; *Experimental Study of Flutter in Suspension Roofs*, Bull. IASS, 23, 3 (1965).
138. Л. М. СИГНАТУЛИНА; *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, ВНИЭКИ-ПРОДМАШ, Тр. Института 37, Москва, 1974.
139. Ю. И. СОЛОДИЛОВ; *Несущая способность и выбор оптимальной кривизны пневматических сферических оболочек*, Строит. Мех., 2, 1969, 33 - 36.
140. Ю. И. СОЛОДИЛОВ; *Расчет оптимальных параметров пневматической сферической оболочки по критерию несущей способности*, ТВКТОП VII, 1970, 562 - 567.
141. Ю. И. СОЛОДИЛОВ; *О расчете пневматических линзообразных оболочек при больших деформациях*, Строит. Мех., 3, 1971, 64 - 66.
142. Н. П. СТРЕКОЗОВ; *Равновесие мягкой сферической оболочки при осесимметричных нагрузках*, МТТ, 2, 1969.
143. Н. П. СТРЕКОЗОВ; *Некоторые вопросы осесимметричных формоизменений мягких оболочек*, ТВКТОП VIII, 1971, 342 - 344.
144. Н. И. СТРЕКОЗОВ, В. И. ЖАРЧЕНКО; *Равновесие мягкой сферической оболочки при воздействии воздушного потока*, ТВКТОП VII, 1970, 565 - 000.
145. Y. S. SUN; *Large Elastic Deformations of an Anisotropic Inflatable Membrane of Revolution*, Ph. D. thesis, Georgia Inst. Techn., Atlanta, 1972.
146. Л. М. ШАРШУКОВА; *Критерий прочности двухслойных мембранных оболочек вращения*, Сообщение лаборатории мягких оболочек ЦБНИИММФ СССР, вып. 5, Владивосток, 1969.
147. Л. М. ШАРШУКОВА; *Расчет нелинейноупругих тонкостенных оболочек вращения при больших деформациях и перемещениях*, Кандидатская диссерт., Москва, 1969.
148. Л. М. ШАРШУКОВА; *К расчету двухслойных оболочек вращения при больших деформациях*, ТВКТОП VII, 1970, 691 - 694.
149. A. TARCZEWSKI; *Konstrukcje pneumatyczne*, Wyd. NOT, Warszawa, 1965.
150. В. А. ТЕРЕЩЕНКО; *Алгоритм численного решения задач статики мягких оболочек*, Тр. Моск. высш. техн. уч-ща Н. Э. Баумана, 241, 1977.
151. Л. Н. ТЕР-МКРТИЧЬЯН; *Равновесие абсолютно гибкой оболочки, окантованной по краям гибкими нитями*, ТВКТОП IX, 1973, 296 - 299.
152. Л. Н. ТЕР-МКРТИЧЬЯН; *К расчету гибких осесимметричных оболочек при больших перемещениях*, Строит. Мех., 5, 1976, 9 - 11.
153. Л. Н. ТЕР-МКРТИЧЬЯН; *Уравнение состояния мягких оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности*, Сб. Вопр. резания надежности и долговечн. деревореп. инструментов и машин, вып. 4, 1977, 80 - 85.
154. J. T. TIELKING, W. W. FENG; *The Application of the Minimum Potential Energy Principle to Non-linear Axisymmetric Membrane Problems*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 2, 41 (1974), 491 - 497.
155. В. М. ТРУЩИНА; *Большие деформации круглой мембраны из пластического неоднородного материала*, ТВКТОП VIII, 1971.
156. В. М. ТРУЩИНА; *Большие деформации и несущая способность оболочки начальной цилиндрической формы*, МТТ, 5, 1971.
157. В. М. ТРУЩИНА; *О теории больших деформаций однородных и неоднородных оболочек вращения и ее приложения к некоторым задачам прочности и технологии*, Кандидатская диссерт., Москва 1971.

158. C. E. S. UENG, Y. S. SUN; *Large Elastic Deformation of an Inflatable Membrane of Revolution*, AIAA J., 6, 12 (1974), 761 - 766.
159. В. И. Усюкин; *Расчет мембранных оболочек при малом параметре нагрузки методом прогонки*, ТВКТОП VII, 1970, 582 - 587.
160. В. И. Усюкин; *Численный анализ мягких оболочек вращения с произвольной геометрией меридиана при несимметричной деформации*, ТВКТОП IX, 1973, 92 - 93.
161. V. K. VERMA; *Finite Element Analysis of Nonlinear Cable Reinforced Membrane*, Ph. D. thesis, Illinois Inst. Techn., Chicago, 1974.
162. T. VISHWANATH, P. G. GLOCKNER; *On the Nonlinear Membrane Displacement Problem*, Dpt CE Rpt, Univ. of Calgary, Alberta, Canada, Feb. 1971.
163. A. S. WINEMAN; *Large Axisymmetric Deformation of a Nonlinear Viscoelastic Membrane Due to Spinning*, Trans. ASME, AM, 39 (1972), 848 - 851.
164. A. S. WINEMAN; *Large Axially Symmetric Stretching of a Nonlinear Viscoelastic Membrane*, ISS, 8 (1972), 775 - 780.
165. A. S. WINEMAN; *Bifurcation of Response of a Nonlinear Viscoelastic Spherical Membrane*, ISS, 3, 14 (1978), 197 - 212.
166. L. S. YANG, W. W. FENG; *On Axisymmetrical Deformations of Non-linear Membranes*, Trans. ASME, AM, Dec. 1970, 1102 - 1011.
167. W. H. YANG, K. H. HSU; *Indentation of a Circular Membrane*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 38 (1971), 227 - 230.
168. W. H. YANG, C. H. LU; *General Deformations of Neo-Hookean Membranes*, Trans. ASME, AM, Ser. E, 40 (1973), 9 - 12.
169. В. В. Зайцев; *Расчет цилиндрической мягкой оболочки на продольные касательные нагрузки*, Тр. НКИ, вып. 92, 1974.
170. В. В. Зайцев; *Методы расчета цилиндрических мягких оболочек на продольные касательные нагрузки*, ТВКТОП X, т. I, 1975, 414 - 423.
171. О. Г. Затворницкий; *К расчету мягких наливных оболочек*, Строит. Мех., 1, 1970, 18 - 20.
172. П. А. Зиновьев, В. А. Терещенко; *Мягкие равнонапряженные оболочки*, Сб. 5-й ДСМО, 1976, 74 - 79.
173. A. M. BINNIE; *Air-generated Waves on a Moving Membrane*, J. Mech. Eng. Sci., 3, 12 (1970).
174. J. BUJAK, A. ŻÓRAWSKI; *Problemy dynamiczne płaskiego przekrycia wiszącego*, Arch. Inż. Łąd., 17, 4, 1971.
175. H. M. IRVINE; *The Linear Theory of Free Vibrations of Suspended Membranes*, Proc. R. Soc. Lond. A, 350, 1976.
176. V. J. MEYERS; *Pneumatically Formed Sandwich Shell Roof Structures*, Proc. ASCE, St. 3, 104 (1978), 381 - 389.
177. R. SYGULSKI; *Problemy drgań niektórych typów przekryć cieżnowych w opływie powietrza*, Praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1978.
178. E. TRINKL, V. P. SCHNABEL; *Olympiadächer in Windkanal*, Die Bautechnik 1, 1972.
179. В. И. Усюкин; *Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек*, МТТ, 1, 1976, 70 - 75.
180. В. И. Усюкин, В. А. Терещенко, А. Н. Сдобников, С. В. Панов, Р. Г. Борсов; *Расчет пневматических строительных конструкций с использованием ЭВМ*, Доклады Международной конф. ИАСС, Алма-Ата, 1977, Строиз., Москва, 1977, 146 - 151.

#### Wykaz ważniejszych skrótów użytych w spisie literatury

AIAA J.	— Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.
C and S	— Computer and Structures.
Proc. ASCE, ST	— Proc. of ASCE, Journal of Structural Division.
Proc. ASCE, EM	— Proc. of ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division.

- Trans. ASME, AM — Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics.  
 IJ. NME — International Journal for Numerical Methods in Engineering.  
 ISS — International Journal of Solids and Structures.  
 IJ. ES — International Journal of Engineering Science.  
 CM. AME — Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.  
 Proc. ICPS — Proc. of International Colloquium on Pneumatic Structures.  
 Строит. Мех. — Строительная механика и расчет сооружений.  
 Тр. НКИ — Труды Николаевского кораблестроительного института.  
 МТТ — Механика твердого тела.  
 Прикл. Мат. Мех. — Прикладная математика и механика.  
 Сб. 5-й ДСМО — Сборник 5-й Дальневост семин. по мягким оболочкам.  
 ТВКТОП — Труды Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок:  
 — VI Баку, 1966, Изд. Наука, Москва 1966;  
 — VII Днепропетровск, 1969, Изд. Наука, Москва 1970;  
 — VIII Ростов-на-Дону, 1971, Изд. Наука, Москва 1973;  
 — IX Ленинград, 1973, Изд. Судостр., Ленинград 1975;  
 — X Кутаиси, 1975, Изд. Мецниереба, Тбилиси, 1975.

## Резюме

## ПНЕВМАТИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

В настоящей работе сделан критический обзор работ по различным вопросам пневматических оболочек (теория, методы решений, решения) напечатанных за последних десять лет. Специальное внимание обращено к формулировке теории мягких оболочек с точки зрения метода конечных элементов. Излагается общая характеристика проблемы. Указано также в каком направлении развиваются вопросы механики пневмооболочек и численные методы их решения. Кроме этого показаны примеры конкретных решений типичных задач.

## Summary

## PNEUMATIC STRUCTURES

A critical review of numerous papers published in the last ten years on various aspects of the theory of pneumatics structures (mechanics, calculation methods, solutions) is presented. Special attention has been paid to the Finite Element formulation of the theory of membrane shells. A brief, general characteristics of the problem is given and current directions of the development of the theory and solution methods are discussed. Moreover some examples of numerical solutions representative for the contemporary state of art are presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku*