

OKREŚLENIE WYMIANY CIEPŁA POMIĘDZY WIĄZKĄ REGULARNYCH PRĘTÓW
I PŁYNEM PODCZAS PODŁUŻNEGO LAMINARNEGO PRZEPŁYWU
METODĄ KOLLOKACJI BRZEGOWEJ

MIECZYŚLAW CIESZKO, JAN ADAM KOŁODZIEJ (POZNAŃ)

I. Wprowadzenie

Z przepływem płynu lepkiego wzdłuż układu równoległych prętów przy równoczesnej wymianie ciepła między prętami i płynem spotykamy się w niektórych typach reaktorów atomowych, przy procesach przędzenia włókien chemicznych oraz w innych dziedzinach techniki. Analiza tego typu przepływów bywa również wykorzystywana do określenia oporu filtracyjnego lub współczynnika wymiany ciepła w równaniach filtracji.

Ze względu na wagę zagadnienia, problem podłużnego opływu układu prętów był rozważany przez wielu autorów. Jednak prawie wszystkie prace rozważają problem przepływu bez wymiany ciepła. Obszerny przegląd tego typu prac pod kątem wyznaczania charakterystyk filtracyjnych podany jest w pracy [1].

Po raz pierwszy zagadnienie podłużnego opływu równoległej wiązki prętów z wymianą ciepła rozpatrywali E. M. SPARROW, H. L. LOEFLER i H. A. HUBBARD [2]. Autorzy ci analizowali wymianę ciepła między prętami i płynem zakładając, że pręty ułożone w siatce trójkątnej wytwarzają ciepło ze stałą intensywnością na jednostkę objętości. Ponadto zakładali oni, że temperatura w danym przekroju poprzecznym pręta jest identyczna w każdym punkcie. Bardziej ogólne rozważania wymiany ciepła podczas opływu prętów w siatce trójkątnej podał R. A. AXFORD [3]. Założył on, że pręty wytwarzające ciepło ze stałą intensywnością są osłonięte rurami. Nie zakładał ponadto stałej temperatury w przekroju poprzecznym prętów i rur. Niestety, autor ten nie wyznaczył współczynnika przejmowania ciepła w takim układzie ograniczając się do wyznaczenia pola przepływu i temperatury.

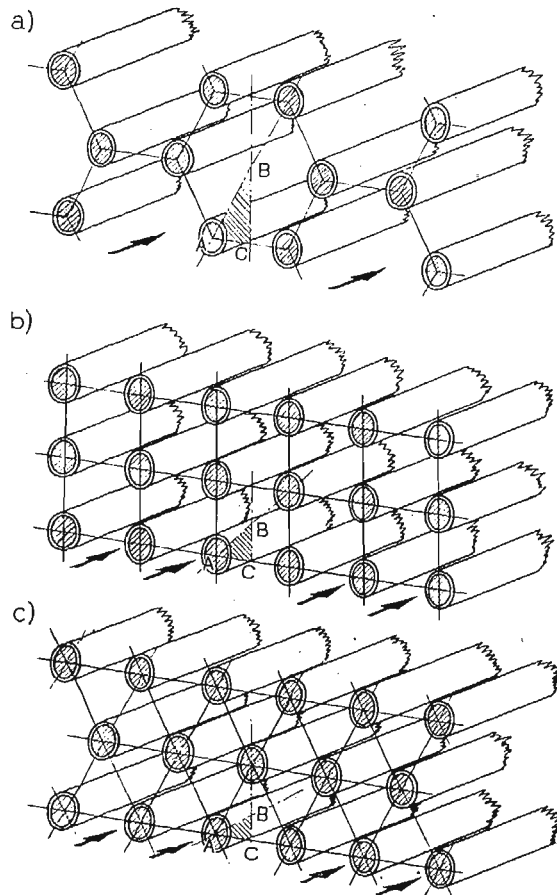
Niniejsza praca jest kontynuacją badań dotyczących wymiany ciepła przy podłużnym opływie układu prętów. Rozpatruje się trzy sposoby ułożenia prętów w układzie, a mianowicie według siatki trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej. Podobnie jak w pracy [3] zakłada się, że pręty wytwarzające ciepło ze stałą intensywnością są osłonięte rurami.

Do wyznaczenia pola przepływu płynu oraz pól temperatury w prętach, rurach i płynie stosuje się metodę kollokacji brzegowej. Dzięki temu równania różniczkowe opisujące problem są spełnione ściśle, a wymienione pola są podane przy pomocy wzorów zamkniętych w postaci obciętych szeregów.

Głównym celem pracy jest wyznaczenie liczby Nusselta, która charakteryzuje wymianę ciepła pomiędzy prętami i płynem w funkcji parametrów geometrycznych i termicznych układu. Liczbę tę wyznacza się w oparciu o otrzymane rozwiązanie pola przepływu i temperatury przyjmując odpowiednią procedurę uśredniania.

2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Weźmy pod uwagę regularne układy równoległych prętów osłoniętych rurami, które są ułożone według siatki trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej jak na rysunku 1. Wprowadzamy następujące wielkości charakteryzujące geometrię siatki: a — promień pręta lub promień wewnętrzny rury, b — promień zewnętrzny rury, c — połowa odległości



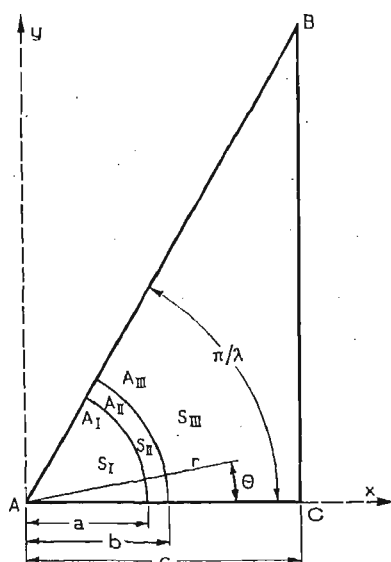
Rys. 1. Równoległe układy prętów cylindrycznych ułożone według siatki sześciokątnej, kwadratowej i trójkątnej.

między osiami dwóch sąsiednich prętów. Stosunek promienia zewnętrznego rur do połowy odległości między osiami sąsiadujących prętów oznaczmy przez $\varepsilon = \frac{b}{c}$. Wielkość ta związana jest z tzw. gęstością upakowania układu φ zależnością, którą dla trzech typów siatek podano w tabeli 1. Stosunek promienia pręta do promienia zewnętrznego rury oznaczmy przez $\eta = \frac{a}{b}$.

Tabela 1

	Typ siatki		
	trójkątna	kwadratowa	sześciokątna
φ	$\frac{\pi \varepsilon^2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi \varepsilon^2}{4}$	$\frac{\pi \varepsilon^2}{3\sqrt{3}}$
λ	6	4	3
S_{III}	$\frac{1}{6} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi \varepsilon^2}{4} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi \varepsilon^2}{3} \right)$

Celem ułatwienia teoretycznej analizy wymiany ciepła zauważmy, że w każdej siatce, według której ułożone są pręty, występują płaszczyzny symetrii, które dzielą nieskończony obszar na elementarne powtarzające się komórki nieograniczone tylko w jednym kierunku (rys. 1). Przekrój poprzeczny takiej komórki, wspólny dla trzech sposobów ułożenia prętów, przedstawia rysunek 2. Sposób ułożenia prętów jest określony parametrem λ , który podaje tabela 1. We wspomnianym przekroju poprzecznym występują trzy obszary:



Rys. 2. Przekrój poprzeczny komórki elementarnej.

- obszar pręta — A_I o polu S_I ,
- obszar rury — A_{II} o polu S_{II} ,
- obszar płynu — A_{III} o polu S_{III} .

W dalszym ciągu przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- przepływ jest ustalony, laminarny oraz w pełni rozwinięty;
- pręty stanowią źródło ciepła o stałej intensywności na jednostkę objętości;

c) rury ciepła nie wytwarzają, a ciepło wytwarzane w płynie na skutek lepkiej dysypacji ignorujemy;

d) wymiana ciepła pomiędzy prętami, rurami i płynem jest w pełni rozwinięta;

e) współczynniki charakteryzujące fizyczne własności prętów, rur i płynu są stałe i nie zależą od temperatury.

Po wprowadzeniu powyższych założeń rozpatrywany problem można sprowadzić do wyznaczenia pola przepływu płynu i pól temperatury w pręcie, rurze i płynie w dowolnym przekroju poprzecznym wspomnianej wyżej komórki układu. Przyjmując cylindryczny układ współrzędnych (r, θ, z) tak jak na rysunku 2 dysponujemy przy tym następującymi równaniami różniczkowymi opisującymi zjawisko w obszarach:

a) pręta (obszar A_I)

$$(1) \quad \frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_1}{\partial \theta^2} = - \frac{\Phi}{\pi a^2 k_1},$$

gdzie: t_1 — temperatura w pręcie, k_1 — współczynnik przewodzenia ciepła w pręcie, Φ — ilość wytwarzanego ciepła na jednostkę długości pręta;

b) rury (obszar A_{II})

$$(2) \quad \frac{\partial^2 t_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_2}{\partial \theta^2} = 0,$$

gdzie: t_2 — temperatura w rurze;

c) płynu (obszar A_{III})

$$(3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz},$$

$$(4) \quad k_3 \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_3}{\partial \theta^2} \right) = w \rho c_p \frac{\partial t_3}{\partial z},$$

gdzie: w — prędkość przepływu w kierunku równoległym do osi prętów, μ — współczynnik lepkości płynu, $\frac{dp}{dz}$ — stały spadek ciśnienia w kierunku osi prętów, t_3 — temperatura w płynie, ρ — gęstość płynu, c_p — ciepło właściwe płynu przy stałym ciśnieniu. Ponadto zgodnie z przyjętymi założeniami mamy

$$(5) \quad \frac{\partial t_3}{\partial z} = \frac{\Phi}{Q \rho c_p},$$

gdzie: Q — objętościowy wydatek przepływu przypadający na jedną rurę.

Warunki brzegowe dla równań (1 - 4) wynikają z przesłanek fizycznych i geometrycznych. Symetria zagadnienia prowadzi do następujących warunków:

$$(6) \quad \frac{\partial t_1}{\partial \theta} = \frac{\partial t_2}{\partial \theta} = \frac{\partial t_3}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} \theta = 0, \\ \theta = \frac{\pi}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta &= 0 \\ \frac{\partial t_3}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial t_3}{\partial \theta} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dla} \quad r = \frac{c}{\cos \theta}.$$

(8)

Zakładając ciągłość temperatury i strumieni ciepła na granicy prętów i rur oraz rur i płynu otrzymujemy

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} t_1 &= t_2 \\ k_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} &= k_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \end{aligned} \right\} \text{ dla } r = a,$$

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} t_2 &= t_3 \\ k_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} &= k_3 \frac{\partial t_3}{\partial r} \end{aligned} \right\} \text{ dla } r = b.$$

Z warunku braku poślizgu płynu po powierzchni rury otrzymujemy

$$(13) \quad w = 0 \quad \text{dla } r = b$$

Równowaga sił ciśnienia i lepkości prowadzi do związku

$$(14) \quad \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \mu \frac{\partial w}{\partial r} r \Big|_{r=b} d\Theta = - \frac{dp}{dz} S_{III}$$

przy czym pola powierzchni S_{III} zostały podane w tabeli 1.

Tak więc zagadnienie brzegowe do rozpatrywanego w pracy problemu określa układ równań (1 - 4) z warunkami brzegowymi (6 - 14)

3. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Znalezienie ścisłego rozwiązania układu równań (1 - 4) ze ścisłym spełnieniem warunków brzegowych (6 - 14) jest zagadnieniem trudnym. Wynika to z faktu, że warunki brzegowe są stawiane na liniach nie będących liniami współrzędnych tego samego układu. Z tego powodu podajemy rozwiązanie, które spełnia ściśle układ równań (1 - 4) oraz warunki brzegowe (6), (9 - 14), a warunki brzegowe (7 - 8) spełnia w sposób przybliżony. Rozwiązanie to ma postać:

$$(15) \quad W = -\frac{1}{4}(R^2 - \varepsilon^2) + \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N X_k \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \cos(\lambda k \Theta),$$

$$(16) \quad T_1 = \frac{k_3}{4\pi k_1} \left[1 - \left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)^2 \right] + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N Z_k \left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)^{\lambda k} \cos(\lambda k \Theta),$$

$$(17) \quad T_2 = -\frac{k_3}{2\pi k_2} \ln\left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right) + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N Z_k \left\{ \operatorname{ch}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)\right] + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon \eta}\right)\right] \right\} \cos(\lambda k \Theta),$$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad T_3 = & \frac{k_3}{2\pi k_2} \ln(\eta) - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{M} \left\{ \frac{1}{8} \left\{ \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \times \right. \right. \\
 & \times \left[\ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) (R^2 + \varepsilon^2) - (R^2 - \varepsilon^2) \right] - \frac{1}{8} \left[(R^2 - \varepsilon^2)(R^2 - 3\varepsilon^2) + \right. \\
 & \left. \left. + 4\varepsilon^4 \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \right] \right\} + \sum_{k=1}^N Z_k \left\{ \operatorname{ch}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \left[\operatorname{ch}(\lambda k \ln(\eta)) - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}(\lambda k \ln(\eta)) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{k_2}{k_3} \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \left[\frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch}(\lambda k \ln(\eta)) - \operatorname{sh}(\lambda k \ln(\eta)) \right] \cos(\lambda k \Theta) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{X_k}{(\lambda k)^2 - 1} \left[(R^2 - \varepsilon^2) \lambda k \operatorname{ch}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] - (R^2 + \varepsilon^2) \operatorname{sh}\left[\lambda k \ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] \right] \cos(\lambda k \Theta) \right\} \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$(19) \quad R = \frac{r}{c},$$

$$(20) \quad W = \frac{w}{c^2 \frac{dp}{dz} - \mu \frac{dz}{dz}},$$

$$(21) \quad T_i = \frac{k_3(t_i - A_0)}{\Phi} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
 (22) \quad M = & \frac{1}{4\pi} \left[\lambda \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \right]^2 \left\{ -\ln\left[\frac{\lambda}{2\pi} \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \right] - 3 + \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{2\lambda} \left[\frac{3}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}{3} \right] + 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{4\pi}{\lambda \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} \times \right. \\
 & \left. \times \sum_{k=1}^N X_k (-1)^k \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{2\pi} \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \right]^{-\frac{\lambda k}{2}}}{(\lambda k + 2)(\lambda k + 1)} - \frac{\left[\frac{\lambda}{2\pi} \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \right]^{\frac{\lambda k}{2}}}{(\lambda k - 2)(\lambda k - 1)} \right\} \right\},
 \end{aligned}$$

przy czym A_0 jest średnią temperaturą na powierzchni rury.

Stałe X_k i Z_k wyznaczamy spełniając w sposób przybliżony warunki (7-8). Warunki te spełniamy mianowicie ściśle w N różnych punktach na brzegu CD. Innymi słowy, stosujemy metodę kollokacji brzegowej zakładając, że punkty kollokacji są

od siebie równo odległe. Biorąc pod uwagę fakt, że punkty te określa N wartości kąta

$$(23) \quad \Theta_j = \arctg \left[\frac{(j-1)}{(N-1)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\lambda} \right], \quad j = 1, 2, \dots, N$$

z warunków (7 - 8) po uwzględnieniu (15) i (18) otrzymujemy następujące układy równań liniowych na niewiadome X_k i Z_k

$$(24) \quad \sum_{k=1}^N A_{jk} X_k = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$(25) \quad \sum_{k=1}^N C_{jk} Z_k = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie:

$$(26) \quad A_{jk} = \lambda k \{ [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^{\lambda k} \cos[(\lambda k + 1)\Theta_j] + [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^{-\lambda k} \cos[(\lambda k - 1)\Theta_j] \},$$

$$(27) \quad B_j = \frac{1}{\cos \Theta_j} - \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) \cos(\Theta_j),$$

$$(28) \quad C_{jk} = \lambda k \cos(\Theta_j) \left\{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\eta)] - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\eta)] \right\} \{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \times \\ \times \sin(\lambda k \Theta_j) \sin(\Theta_j) - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \} + \\ + \frac{k_2}{k_3} \left\{ \frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\eta)] - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\eta)] \right\} \{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) - \\ - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \},$$

$$(29) \quad D_j = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{X_k}{[(\lambda k)^2 - 1] \cos(\Theta_j)} \{ (\lambda k)^2 \{ 1 - [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^2 \} \times \\ \times \{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \} \operatorname{bin}(\lambda k \Theta_j) \operatorname{bin}(\Theta_j) - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \times \\ \times \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \} - \lambda k \{ 1 + [\varepsilon \cos(\Theta_j)]^2 \} \cdot \{ \operatorname{ch}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) - \\ - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \sin(\lambda k \Theta_j) \sin(\Theta_j) \} + 2 \cos(\lambda k \Theta_j) \cos(\Theta_j) \{ \lambda k \operatorname{ch} \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j)) - \\ - \operatorname{sh}[\lambda k \ln(\varepsilon \cos(\Theta_j))] \} \} + \frac{M}{2\pi} \cos^2(\Theta_j) + \frac{\lambda}{8\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) \{ 1 + 2 \ln[\varepsilon \cos(\Theta_j)] - \\ - \varepsilon \cos(\Theta_j) \}^2 - \frac{1}{16} \frac{\{ 1 - [\cos(\Theta_j)]^2 \}^2}{\cos^2(\Theta_j)}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przed przystąpieniem do rozwiązywania układu równań (25) musimy już dysponować rozwiązaniem układu równań (24), ponieważ wyrazy wolne układu (25) określone są rozwiązaniem układu (24). Liczba całkowita N określa wymiar tych układów i zarazem jest ilością punktów kolokacji, w których spełniamy ściśle warunki (7 - 8).

4. Wyznaczenie współczynnika przejmowania ciepła

Przejmowanie ciepła od powierzchni ciała stałego przez płyn, który to ciało opływa jest opisywane przez prawo Newtona w postaci {[4], s. 23}:

$$(30) \quad q_s = \kappa(t_s - t_p),$$

gdzie: q_s — gęstość strumienia ciepła przejmowanego przez płyn od powierzchni ciała stałego, t_s — temperatura powierzchni ciała stałego, t_p — odpowiednio określona temperatura płynu, κ — współczynnik przejmowania ciepła.

Dla konkretnego przepływu κ jest wielkością stałą. Zmienia się jednak ze zmianą jego parametrów charakterystycznych. Celem uzyskania większej uniwersalności rezultatów w miejsce współczynnika przejmowania ciepła podaje się na ogół liczbę Nusselta zdefiniowaną wzorem

$$(31) \quad N_u = \frac{\kappa L}{k},$$

gdzie: L — długość charakterystyczna, k — współczynnik przewodzenia ciepła.

Znajomość pola prędkości przepływu oraz pola temperatury w rozważanych przez nas przypadkach opływu wiązki prętów daje możliwość wyznaczenia współczynnika przejmowania ciepła lub liczby Nusselta. W tym celu musimy ściślej określić znaczenie różnicy temperatur ($t_s - t_p$) we wzorze (30). Z uwagi na nieograniczoność układu i zmienność pola temperatury na zewnętrznej ścianie rury, wygodnie jest przez t_s oznaczać średnią temperaturę zewnętrznej ścianki rury, natomiast przez t_p średnią temperaturę płynu. Wówczas korzystając z definicji temperatury średniej w postaci

$$(32) \quad t_3^{sr} = \frac{\iint_{A_{III}} q t_3 w dA}{\iint_{A_{III}} q w dA},$$

różnicę temperatur ($t_s - t_p$) można przedstawić jako

$$(33) \quad t_s - t_p = (t_3|_{r=b})^{sr} = \frac{\iint_{A_{III}} (t_3|_{r=b} - t_3) w r d r d \Theta}{\iint_{A_{III}} w r d r d \Theta},$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(34) \quad \frac{(t - t_p) k_3}{\Phi} = \frac{\int_a^{\frac{\pi}{\lambda}} \int_a^{\frac{1}{\cos \Theta}} (T_3|_{r=b} - T_3) W R d R d \Theta}{M} = f\left(\lambda, \eta, \varphi, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}\right).$$

Współczynnik przejmowania ciepła κ , zgodnie z równaniem (30) po wykorzystaniu (34) wyrazi się wzorem

$$(35) \quad \kappa = \frac{k_3}{2\pi b f\left(\lambda, \eta, \varphi, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}\right)},$$

natomiast liczba Nusselta, po wprowadzeniu obwodu zewnętrznej ściany rury $2\pi b$ jako długości charakterystycznej, przyjmuje postać

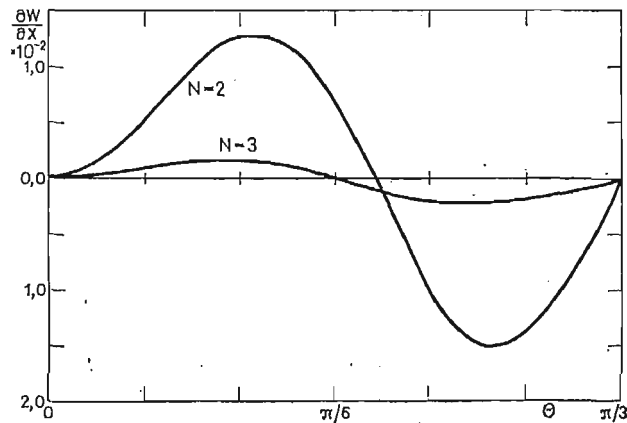
$$(36) \quad N_u = \frac{1}{f\left(\lambda, \eta, \varphi, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}\right)}.$$

W dalszym ciągu liczba Nusselta będzie wyznaczana poprzez numeryczne obliczenie całki występującej we wzorze (34).

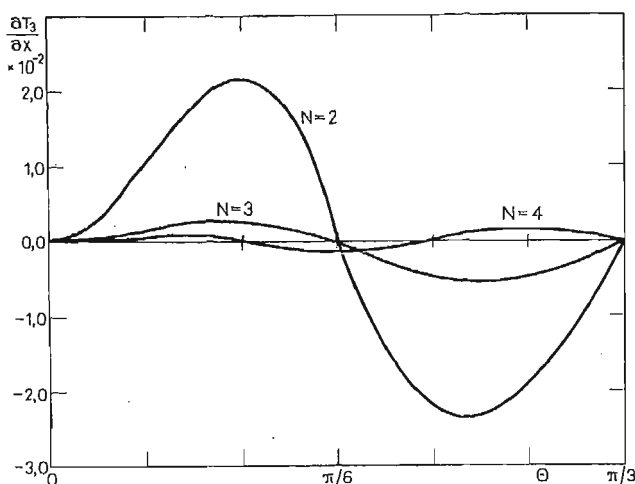
5. Rezultaty numeryczne

W proponowanej metodzie rozwiązania omawianego zagadnienia warunki brzegowe na części brzegu rozważanego obszaru zostały spełnione w sposób przybliżony. Spełnia się je ściśle tylko w skończonej ilości N punktów. Dotyczy to zarówno wyznaczania pola prędkości jak również wyznaczania pola temperatury. Przy czym wyznaczając pole temperatury korzystamy z rozwiązania dla pola prędkości. Tak więc błędy przybliżenia rozwiązania przepływu ingerują w dokładność rozwiązania określającego pole temperatury.

Intuicyjnie może się wydawać, że zwiększając ilość punktów kolokacji (liczbę N) zwiększamy dokładność spełnienia warunków brzegowych, a tym samym dokładność otrzymywanych rezultatów. Eksperymenty numeryczne nie potwierdzają jednak w pełni takiego przypuszczenia. Okazuje się, że liczba N nie musi być duża, aby uzyskać odpowiednio mały maksymalny błąd spełnienia warunków brzegowych pomiędzy punktami kolokacji. Sytuację tę ilustrują rysunki 3 i 4, gdzie podano wykresy błędu spełnienia warunku brzegowego na brzegu CB , zarówno dla rozwiązania przepływu jak i dla pola temperatury. Widzimy, że już przy dwóch punktach kolokacji ($N = 2$) tangens nachylenia stycznej do profilów prędkości lub temperatury, który powinien być równy zero, jest bardzo mały.



Rys. 3. Wartości pochodnej prędkości na brzegu CD dla siatki sześciokątnej przy $\varepsilon = 0,9$, $\eta = 0,95$.



Rys. 4. Wartości pochodnej temperatury na brzegu CD dla siatki sześciokątnej przy $\varepsilon = 0,9$, $\eta = 0,95$,

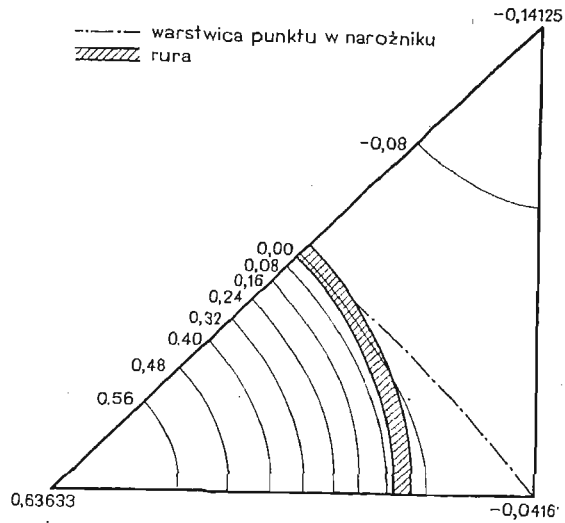
$$\frac{k_1}{k_2} = 1,0, \quad \frac{k_2}{k_3} = 1,0.$$

Dla czterech punktów kollokacji maksymalna wartość wspomnianego tangensa w obu przypadkach jest mniejsza od 10^{-4} .

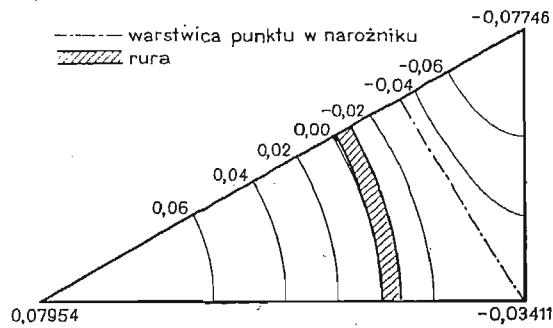
Z drugiej strony powiększanie ilości punktów kollokacji prowadzi w końcu do złego uwarunkowania macierzy układów równań (24) i (25) (przy wartościach N rzędu kilkudziesięciu). Związane to jest z faktem, że zgęszczanie punktów kollokacji powoduje, iż sąsiadujące ze sobą równania we wspomnianych układach, określone dwoma sąsiednimi punktami kollokacji niewiele różnią się od siebie.

Na dokładność spełnienia warunku brzegowego pomiędzy punktami kollokacji przy ustalonym N mają również pewien wpływ parametry λ , ε , $\frac{k_1}{k_2}$, $\frac{k_1}{k_3}$ i η . Maksymalny błąd spełnienia warunków brzegowych rośnie, jeśli λ maleje lub jeśli ε rośnie. Jednak, jak wskazują rysunki 3 i 4, które przedstawiają niekorzystny przypadek ze względu na parametry λ i ε spełnienie warunków brzegowych przy „rozsądnej” wartości N jest zadowalające. Istnieją jedynie problemy natury numerycznej dla wartości ε bliskich maksymalnym i maksymalnych ($\varepsilon = 1$). Wówczas, aby w zadowalający sposób spełnić warunki brzegowe należy powiększać N , co z kolei prowadzi do układów liniowych słabo uwarunkowanych. W rezultacie dla tych wartości ε , przy wzroście N , szybciej uzyskujemy układ słabo uwarunkowany niż w zadowalający sposób spełnimy warunek brzegowy. Z tego powodu dalsze wyniki podaje się dla $\varepsilon \leq 0,9$, które uzyskiwano przy $N < 10$.

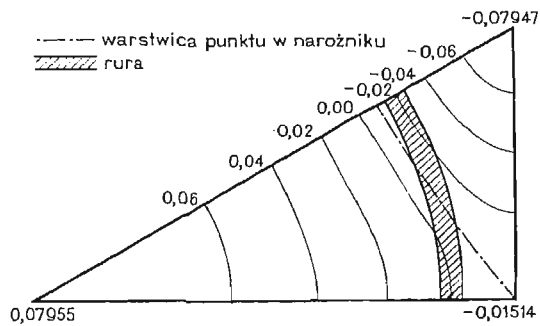
Przykładowe profile pola temperatury w płaszczyźnie rozważanej komórki pokazują rysunki 5 - 10. Z rysunków tych wynika między innymi, że temperatura w przecie zmienia się znacznie i założenie stałej temperatury pręta, jak to uczyniono w pracy [2], jest poważnym uproszczeniem. Możliwie dokładne rozkłady temperatury są istotne z punktu widzenia wyznaczenia naprężeń cieplnych.



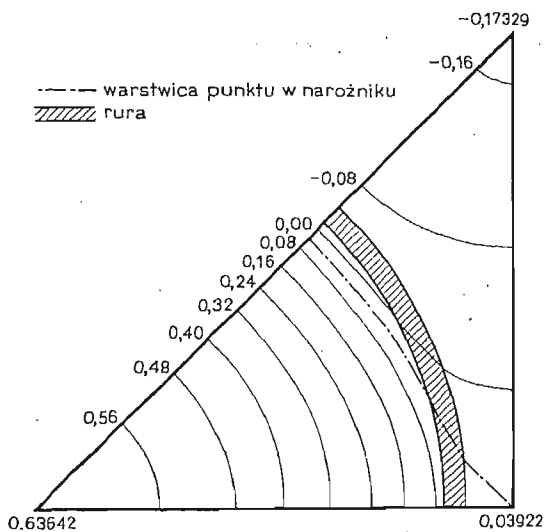
Rys. 5. Przykładowe pole temperatury dla $\lambda = 6$, $\varepsilon = 0,75$, $\eta = 0,95$, $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$, $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$.



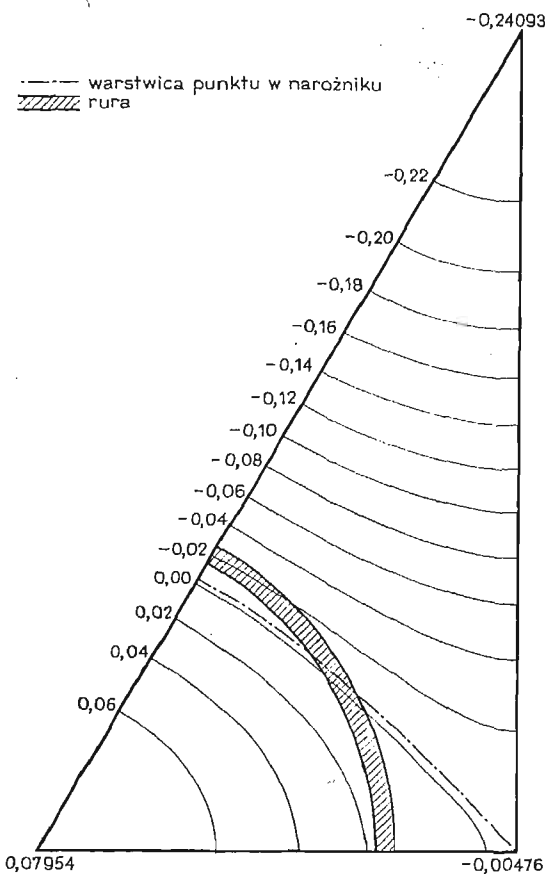
Rys. 6. Przykładowe pole temperatury dla $\lambda = 4$, $\varepsilon = 0,75$, $\eta = 0,5$, $\frac{k_1}{k_2} = 0,25$.



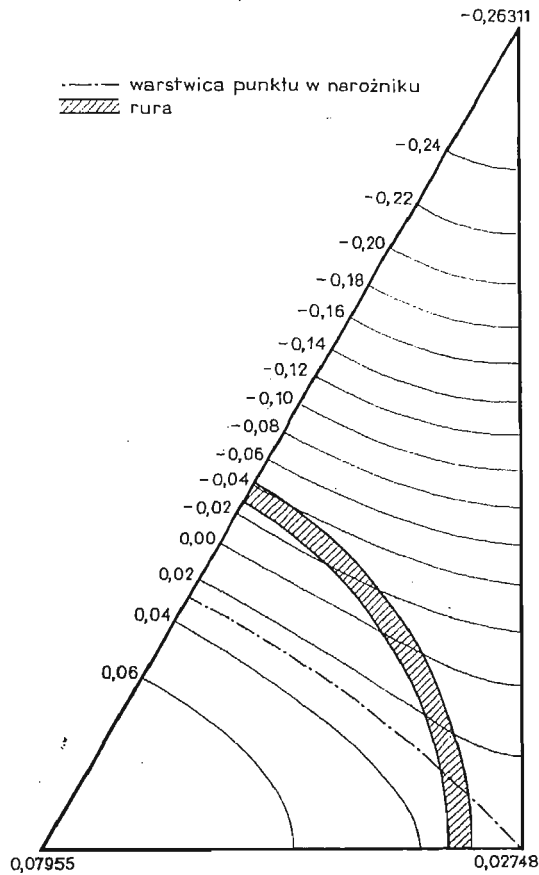
Rys. 7. Przykładowe pole temperatury dla $\lambda = 6$, $\varepsilon = 0,9$, $\eta = 0,95$, $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$, $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$.



Rys. 8. Przykładowe pole temperatury dla $\lambda = 4$, $\varepsilon = 0,9$, $\eta = 0,5$, $\frac{k_1}{k_2} = 0,5$.



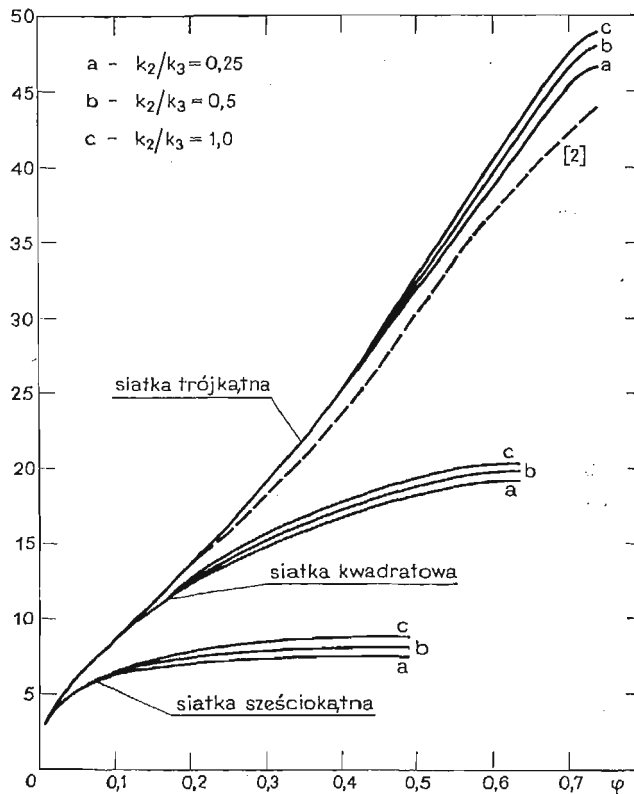
Rys. 9. Przykładowe pole temperatury dla $\lambda = 3$, $\varepsilon = 0,75$, $\eta = 0,95$, $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$, $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$.



Rys. 10. Przykładowe pole temperatury dla $\lambda = 3$, $\varepsilon = 0,9$, $\eta = 0,95$, $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$, $\frac{k_2}{k_3} = 1,0$.

Na rysunku 11 zostały przedstawione wartości liczb Nusselta w funkcji gęstości upakowania układu przy różnych wartościach pozostałych parametrów. Z rysunku tego wynika, że założenie stałej temperatury pręta, jak to uczyniono w pracy [2], nie prowadzi do istotnych zmian liczby Nusselta. Zgodnie ze wzorami (34) i (36) liczba Nusselta jest odwrotnością różnicy średnich temperatur powierzchni, zewnętrznej rury i płynu przy ustalonym strumieniu ciepła pomiędzy prętami i płynem. Z rysunku 9 wynika, że dla wszystkich sposobów ułożenia prętów różnica ta maleje ze wzrostem gęstości upakowania. Oznacza to, że intensywność chłodzenia rośnie, gdy gęstość upakowania maleje.

Widoczny jest dość istotny wpływ sposobu ułożenia prętów na wartość liczby Nusselta. Przy ustalonej gęstości upakowania najkorzystniejsze chłodzenie występuje przy ułożeniu prętów według siatki sześciokątnej, a najmniej korzystne, gdy pręty ułożone są według siatki trójkątnej. Znacznie mniejszy wpływ na wartość liczby Nusselta mają stosunki współczynników przewodzenia ciepła.



Rys. 11. Wartości liczb Nusselta przy $\eta = 0,95$, $\frac{k_1}{k_2} = 1,0$.

Literatura cytowana w tekście

- 1 J. A. KOŁODZIEJ, *Opór filtracyjny układu prętów cylindrycznych przy podłużnym laminarnym opływie*. Archiwum Budowy Maszyn, vol. 28, zeszyt 4, (1980), s. 487-502.
- 2 E. M. SPARROW, A. L. LOEFFLER, H. A. HUBBARD, *Heat Transfer to Longitudinal Laminar Flow Between Cylinders*. Trans. ASME ser. C, Journal Heat Transfer, vol. 83, no. 4, (1961), pp. 415-422.
- 3 R. A. AXFORD, *Two-dimensional, multiregion analysis of temperature fields in reactor tube bundles*. Nuclear Engineering Design, vol. 6, (1967), pp. 25-42.
- 4 S. WIŚNIEWSKI, *Wymiana ciepła*, PWN, Warszawa 1979.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТЕРЖНЕЙ И ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ПРОДАЛЬНОМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

В статье обсуждено стационарное ламинарное течение жидкости вдаль системы цилиндрических стержней. Исследуется теплопередачу между стержнями и жидкостью, причем стержни являются источниками тепла. Система содержит параллельные стержни, каждый из которых прикрыт трубкой. Исследуется три способа расположения стержней в треугольной, квадратной и шестиугольной сетке. Применяя метод граничной коллокации определяется движение жидкости и теплопередачу. Вычисляется число Нуссельта в широком диапазоне отношений поверхности.

S u m m a r y

THE DETERMINATION OF THE HEAT TRANSFER BETWEEN REGULAR BUNDLE OF RODS AND FLUID DURING LONGITUDINAL LAMINAR FLOW, BY MEANS OF BOUNDARY COLLOCATION

The steady longitudinal laminar flow along a system of cylindrical rods is considered. The heat transfer between the rods and fluid is taken into account, where the rods are assumed to be heat sources.

The system consist of the parallel rods each of them is placed in cylindrical tube. Three different patterns of lattice (perpendicular normal cross section of system) are considered: triangular, square and hexagonal.

Using boundary collocation method the problem of fluid flow and heat transfer in the system is solved. The Nusselt's number for wide range of the surface ratio is determined.

IPPT PAN POZNAŃ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 października 1980 roku
