MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 19 (1981)

ANALIZA STATYCZNA KONSTRUKCJI PRĘTOWO-PŁYTOWYCH METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH, Z UWZGLĘDNIENIEM SKRĘCANIA NIESWOBODNEGO

EUGENIUSZ RUSIŃSKI (WROCŁAW)

1. Wstęp

Przeprowadzenie analizy wytrzymałościowej cienkościennych konstrukcji prętowo-płytowych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego metodami tradycyjnymi [1] przysparzało wiele trudności natury obliczeniowej pod względem szybkości jak i zakresu obliczeń. W znanych na świecie i w kraju systemach (np. SEZAM-69, NASKA, WAT-KM) nie uwzględnia się technicznej teorii VLASOVA [1]. Ostatnio pojawiło się wiele publikacji dotyczących obliczania prętowych konstrukcji cienkościennych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego, opartych na metodzie sił oraz metodzie elementów skończonych [2, 3] z opracowanymi programami na EMC.

W niniejszej pracy podejmuje się próbę możliwie ogólnego określenia macierzy sztywności prostokątnego elementu (superelementu) prętowo-płytowego. Wyznaczenie macierzy sztywności takiego elementu jest przydatne w konstrukcjach powtarzalnych oraz zmniejsza efektywny czas obliczeń EMC. Zagadnienie rozważane jest jako liniowe. Rozważania szczegółowe opierają się na metodzie elementów skończonych, z uwzględnieniem technicznej teorii WLASOVA [1].

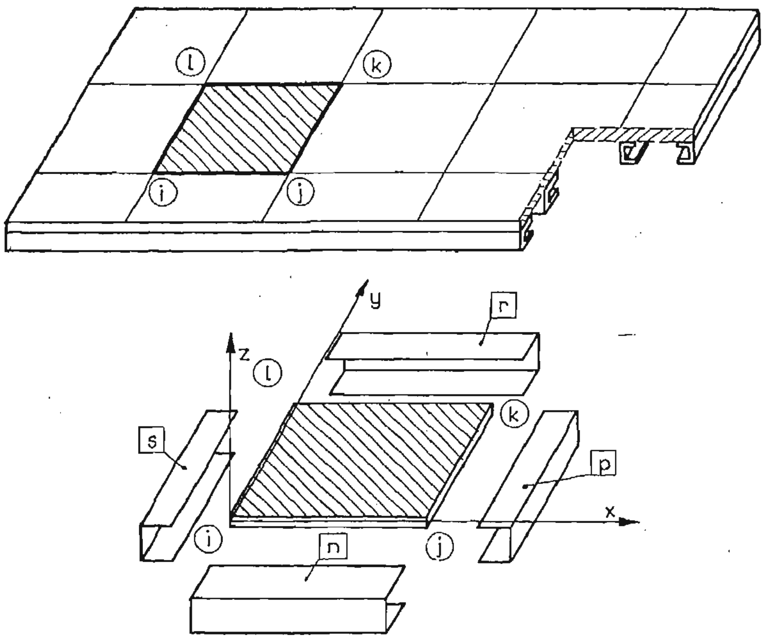
2. Określenie macierzy sztywności elementu prostokątnego prętowo-płytowego

Macierz sztywności elementu prętowo-płytowego wyznaczamy analogicznie jak w pracy [4], metodą superpozycji. Określa się macierz sztywności płyty, a następnie rusztu, pokazanego na rys. 1, składającego się z czterech prętów cienkościennych. Macierz sztywności elementu prętowo-płytowego wyznacza się w ogólnej postaci jako

$$[k_{u-p}] = [k_u]+[k_p], \tag{2.1.}$$

gdzie: $[k_u]$ — macierz sztywności rusztu jednoobwodowego ramy obciążonej przestrzennie,
$[k_p]$ — macierz sztywności elementu płyty.

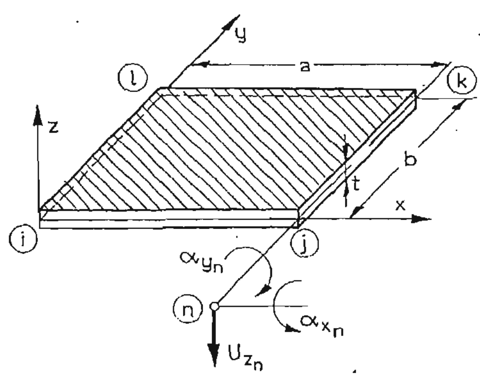
Prostokątny element płyty połączony jest z dowolnymi elementami prętowymi n, p, r, s wzdłuż krawędzi płyty w sposób ciągły (rys. 1). Wielkości węzłowe odniesione są do osi prętów i powierzchni środkowej płyty, pominięto mimośród prętów.



Rys. 1. Konstrukcja rusztowo-płytowa jako zbiór elementów prostokątnych prętowo-powłokowych.

2.1. Macierz sztywności prostokątnego elementu płyty. Analizujemy prostokątny element płyty o węzłach i, j, k, l, gdzie początek układu współrzędnych przyjęto w węźle „i", jak pokazano na rys. 2. W każdym węźle zadane są przemieszczenia $\{V_n\}$. Mają one trzy składowe: przemieszczenie liniowe u_{z_n} w kierunku osi z, oraz dwa obroty α_{x_n}, α_{y_n} wokół osi x i y. Przemieszczenia węzłów można zatem przedstawić w postaci:

$$\{V_n\} = \begin{Bmatrix} u_{z_n} \\ \alpha_{x_n} \\ \alpha_{y_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{z_n} \\ \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right)_n \\ -\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)_n \end{Bmatrix}. \tag{2.1.1.}$$



Rys. 2. Prostokątny element płyty.

Uogólnione siły węzłowe odpowiadające tym przemieszczeniom można interpretować jako jedną siłę i dwa momenty.

$$\{S_n\} = \begin{Bmatrix} P_{z_n} \\ M_{x_n} \\ M_{y_n} \end{Bmatrix}. \tag{2.1.2.}$$

Funkcję kształtu przyjęto w postaci wielomianu [5], w którym występuje 12 parametrów:

$$\begin{aligned} u_z &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 x^2+\alpha_5 xy+\alpha_6 y^2+\alpha_7 x^3+ \\ &+\alpha_8 x^2 y+\alpha_9 xy^2+\alpha_{10} y^3+\alpha_{11} x^3 y+\alpha_{12} xy^3 \end{aligned} \tag{2.1.3.}$$

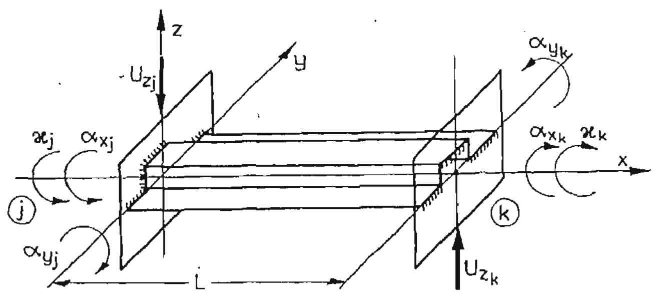
Macierz sztywności, wiążąca siły węzłowe z odpowiednimi im przemieszczeniami węzłów, dla tak przyjętej funkcji kształtu, określa się na podstawie kinematycznego pola przemieszczeń wg [6] w postaci:

$$k_p = \int_0^a \int_0^b [b]^T [D][b] dx dy \tag{2.1.4.}$$

Po wyznaczeniu elementów składowych powyższego równania i scałkowaniu otrzymano macierz sztywności prostokątnego elementu płyty, którą przedstawiono w tablicy 1.

2.2. Macierz sztywności rusztu jednoobwodowego. Rozważany ruszt jest zbudowany z czterech prętów cienkościennych n, p, r, s połączonych ze sobą sztywno (rys. 1). Przy połączeniu sztywnym zginanie prętów jednego kierunku powoduje zginanie i skręcanie prętów drugiego kierunku. W związku z tym w węzłach mogą wystąpić trzy różne wielkości statyczne: siła poprzeczna i dwie składowe momentów. Natomiast w rusztach z prętów cienkościennych przy nieswobodnym skręcaniu powstaje spaczenie przekroju [1], w wyniku czego w węźle występuje czwarta składowa- bimoment. Przedstawiony na rys. 1 ruszt jest opisany węzłami i, j, k, l z początkiem układu współrzędnych w węźle „i".

W celu wyznaczania macierzy sztywności cienkościennego elementu (rys. 3) wykorzystuje się zamieszczone w pracy [1] równanie różniczkowe kątów obrotu przekroju przy nieswobodnym skręcaniu w postaci:



Rys. 3. Wydzielony element pręta cienkościennego.

$$\alpha_x^{IV} - \frac{GI_d}{EI_\omega}\alpha_x'' = 0, \tag{2.2.1.}$$

T a b l i c a 1.

Macierz sztywności prostokątnego elementu płyty w stanie zgięciowym.

$[kp] =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	e_1	e_5	$-e_6$	e_7	e_9	$-e_{11}$	e_{13}	e_{14}	$-e_{16}$	e_8	e_{17}	$-e_{15}$
2		e_2	$-e_4$	e_9	e_{10}	0	$-e_{14}$	e_{18}	0	$-e_{17}$	e_{19}	0
3			e_3	e_{11}	0	e_{12}	e_{16}	0	e_{20}	$-e_{15}$	0	e_{21}
4			S	e_1	e_5	e_6	e_8	e_{17}	e_{15}	e_{13}	e_{14}	e_{16}
5				Y	e_2	e_4	$-e_{17}$	e_{19}	0	$-e_{14}$	e_{18}	0
6					M	e_3	e_{15}	0	e_{21}	$-e_{16}$	0	e_{20}
7						E	e_1	$-e_5$	e_6	e_7	$-e_9$	e_{11}
8							T	e_2	$-e_4$	$-e_9$	e_{10}	0
9								R	e_3	$-e_{11}$	0	e_{12}
10									I	e_1	$-e_5$	$-e_6$
11										A	e_2	e_4
12												e_3

$$A_1 = \frac{Et^3ab}{12(1-\nu^2)}$$

$$e_1 = A_1\left(\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}+\frac{14-4\nu}{5a^2b^2}\right),$$

$$e_2 = A_1\left(\frac{4}{3b^2}+\frac{4}{15}\,\frac{1-\nu}{a^2}\right),$$

$$e_3 = A_1\left(\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{15}\,\frac{1-\nu}{b^2}\right), \qquad e_4 = \frac{A_1\nu}{ab}$$

$$e_5 = A_1\left(\frac{2}{b^3}+\frac{1+4\nu}{5a^2b}\right), \qquad e_6 = A_1\left(\frac{2}{a^3}+\frac{1+4\nu}{5ab^2}\right),$$

$$e_7 = A_1\left(-\frac{4}{a^4}+\frac{2}{b^4}-\frac{14-4\nu}{5a^2b^2}\right), \qquad e_8 = A_1\left(\frac{2}{a^4}-\frac{4}{b^4}-\frac{14-4\nu}{5a^2b^2}\right),$$

$$e_9 = A_1\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1+4\nu}{5a^2b}\right), \qquad e_{10} = A_1\left(\frac{2}{3b^2}-\frac{4}{15}\,\frac{1-\nu}{a^2}\right),$$

$$e_{11} = A_1\left(\frac{2}{a^3}+\frac{1-\nu}{5ab^2}\right), \qquad e_{12} = A_1\left(\frac{2}{3a^2}-\frac{1-\nu}{15b^2}\right), \qquad e_{13} = A_1\left(-\frac{2}{a^4}-\frac{2}{b^4}+\frac{14-4\nu}{5a^2b^2}\right),$$

$$e_{14} = A_1\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1-\nu}{5a^2b}\right), \qquad e_{15} = A_1\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1+4\nu}{5ab^2}\right), \qquad e_{16} = A_1\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1-\nu}{5ab^2}\right),$$

$$e_{17} = A_1\left(\frac{2}{b^3}+\frac{1-\nu}{5a^2b}\right), \qquad e_{18} = A_1\left(\frac{1}{3b^2}+\frac{1-\nu}{15a^2}\right), \qquad e_{19} = A_1\left(\frac{2}{3b^2}-\frac{1-\nu}{15a^2}\right),$$

$$e_{20} = A_1\left(\frac{1}{3a^2}+\frac{1-\nu}{15b^2}\right), \qquad e_{21} = A_1\left(\frac{2}{3a^2}-\frac{4}{15}\,\frac{1-\nu}{b^2}\right).$$

oraz równanie osi ugięcia pręta

(2.2.2.) $$EI_y z = -Mg$$

gdzie: E — moduł Younga,

G — moduł Kirchhoffa,

I_d — moment bezwładności przekroju na skręcanie,

I_ω — główny wycinkowy moment bezwładności przekroju,

I_y — moment bezwładności przekroju na zginanie.

Z przedstawionych powyższych równań różniczkowych wyznaczono macierz sztywności dla pręta cienkościennego (rys. 3), którą zamieszczono w tablicy 2.

Tablica 2.

Macierz sztywności cienkościennego elementu pręta.

$$[k_g] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} A & 0 & 0 & -B & -A & 0 & 0 & -B \\ & M & -P & 0 & 0 & R & P & 0 \\ & S & S & 0 & 0 & -P & S & 0 \\ & & Y & F & B & 0 & 0 & T \\ & & & M & A & 0 & 0 & B \\ & & & & E & M & P & 0 \\ & & & & & T & S & 0 \\ & & & & & & & F \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$$A = \frac{12EI_y}{L^3}, \quad B = \frac{6EI_y}{L^2}, \quad F = \frac{4EI_y}{L}, \quad T = \frac{2EI_y}{L}, \quad k^2 = \frac{GI_d}{EJ_\omega}$$

$$M = \frac{GI_d}{qk}[k \cdot L\cosh(kL) - \sinh(kL)],$$

$$P = \frac{GI_d}{q}[\cosh(kL) - 1],$$

$$R = \frac{GI_d}{qk}[\sinh(kL) - kL], \quad S = \frac{GI_d}{q} k \cdot \sinh(kL),$$

$$q = 2 + kL\sinh(kL) - 2\cosh(kL)$$

gdzie: L przyjmuje wartości a lub b.

Po określeniu macierzy sztywności pręta, określamy macierz sztywności rusztu jednoobwodowego według następującej zależności:

(2.2.11.) $$k_u = \sum_{i=1}^{n} [C^T][k_g][C]_i$$

gdzie: $[C]$ — macierz transformacji z układu rusztu jednoobwodowego do układu lokalnego pręta.

Macierz transformacji przedstawia zależność

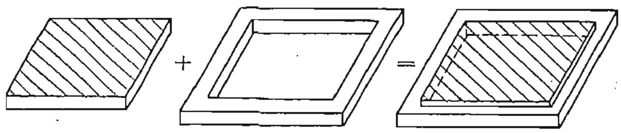
$$[C] = \begin{bmatrix} [C_E] & \\ & [C_E] \end{bmatrix}, \tag{2.2.12.}$$

gdzie:

$$[C_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \tag{2.2.13.}$$

Kąt γ w tym przypadku przyjmuje dwie wartości, zależnie od położenia pręta, w ruszcie jednoobwodowym: 0 lub $\pi/2$. Macierz sztywności elementarnego rusztu jednoobwodowego $[k_u]$ przedstawiono w tablicy 3.

2.3. Macierz sztywności elementu prostokątnego prętowo-płytowego. Znając macierze sztywności elementów, płyty $[k_u]$ (tabl. 1) oraz jednoobwodowego rusztu $[k_p]$ (tabl. 3) wyznacza się



Rys. 4. Prostokątny element prętowo-płytowy.

macierz sztywności elementu prętowo-płytowego $[k_{u-p}]$ na zasadzie superpozycji jak to pokazano na rys. 4.

Zagadnienie sprowadza się do dodania odpowiednich składników do siebie. Dodawania tego nie można zrobić wprost, gdyż macierz sztywności $[k_u]$ ma w węźle 4 składowe $(u_{z_i}, \varkappa_i, \alpha_{x_i}, \alpha_{y_i})$ natomiast macierz sztywności płyty ma w węźle po 3 składowe $(u_{z_i}, \alpha_{x_i}, \alpha_{y_i})$ W macierzy sztywności płyty brakujące wiersze i kolumny pochodzące od deplanacji przekroju pręta uzupełnia się zerami, w wyniku czego otrzymuje się nową macierz $[k_p^*]$.

Wówczas równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$[k_{u-p}] = [k_u] + [k_p^*], \tag{2.3.1.}$$

gdzie: $[k_p^*]$ — macierz sztywności elementu płyty z zerową deplanacją przekroju.

Ze względu na wymiary macierzy sztywności $[k_{u-p}]$ przedstawia się ją w formie:

$$[k_{u-p}] = \begin{bmatrix} [k_1][k_2] \\ S_{Y_M}[k_3] \end{bmatrix}. \tag{2.3.2.}$$

Odpowiednie podmacierze $[k_1]$, $[k_2]$ i $[k_3]$ zamieszczone są w kolejnych tablicach 4, 5 i 6.

3. Program PPLY

Powyżej przedstawiona macierz sztywności cienkościennego elementu prętowo-płytowego, posłużyła do zbudowania programu PPLY opartego na metodzie elementów skończonych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego. Program ten napisano w języku

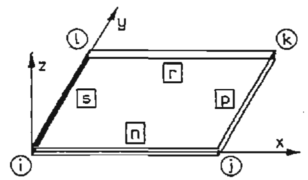
Tablica 3.

Macierz sztywności rusztu jednoobwodowego.

$[k_u] =$

„i”				„j”				„k”				„l”			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A_n+A_s	0	B_s	$-A_n$	$-A_n$	0	0	$-B_n$	0	0	0	0	$-A_s$	0	$-B_s$	0
	M_n+M_s	$-P_n$	P_s	0	R_n	P_n	0	0	0	0	0	0	R_s	0	P_s
		S_n+F_s	0	0	$-P_n$	S_n	0	0	0	0	0	B_s	0	T_s	0
			F_n+S_s	B_n	0	0	T_n	0	0	0	0	0	$-P_s$	0	S_s
			S	A_n+A_p	0	$-B_p$	B_n	$-A_p$	0	$-B_p$	0	0	0	0	0
				Y	M_n+M_p	P_n	$-P_p$	0	R_p	0	P_p	0	0	0	0
					M	S_n+F_p	0	B_p	0	T_p	0	0	0	0	0
						E	F_n-S_p	0	$-P_p$	0	$-S_p$	0	0	0	0
							T	A_p+A_r	0	B_p	$-B_r$	$-A_r$	0	0	$-B_r$
								R	M_p+M_r	$-P_r$	P_p	0	R_r	P_r	0
									I	F_p+S_r	0	0	$-P_r$	S_r	0
										A	F_r+S_r	B_r	0	0	T_r
												A_s+A_n	0	$-B_s$	B_n
													M_s+M_n	P_n	$-P_s$
														S_n+F_s	0
															T_n-S_s

$A_n = A_n \cdot n'$, $A_p = A_p \cdot p'$, ..., $T_s = T_s \cdot s'$



n, p, r, s — numery prętów
i, j, k, l — numery węzłów

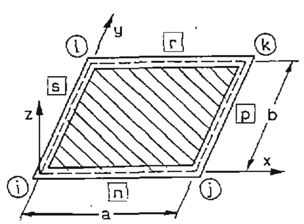
Współczynniki n', p', r', s' przyjmują tylko dwie wartości, 1 gdy występuje dany pręt w elemencie lub 0, gdy nie występuje.

Tablica 4.

Podmacierze sztywności prostokątnego elementu prętowo-płytowego

$[k_1] =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
$A_n+A_s+e_1$	0	B_s+e_5	$-A_n-e_6$	$-A_n+e_7$	0	e_9	$-B_n-e_{11}$	1
	M_n+M_s	$-P$	P_s	0	R_n	P_n	0	2
		$S_n+F_s+e_2$	$-e_4$	e_9	$-P_n$	S_n+e_{10}	0	3
			$F_n+S_s+e_3$	B_n+e_{11}	0	0	T_n+e_{12}	4
				$A_n+A_p+e_1$	0	$-B_p+e_5$	B_n+e_6	5
					M_n+M_p	P_n	$-P_p$	6
						$S_n+F_p+e_2$	e_4	7
							$F_n-S_p+e_3$	8



Tablica 5.

Podmacierze sztywności prostokątnego elementu prętowo-płytowego [cd.]

$[k_2] =$

9	10	11	12	13	14	15	16	
e_{13}	0	e_{14}	$-e_{16}$	$-A_s-e_8$	0	$-B_s+e_{17}$	$-e_{15}$	1
0	0	0	0	0	R_s	0	P_s	2
$-e_{14}$	0	e_{18}	0	B_s-e_{17}	0	T_s+e_{19}	0	3
e_{16}	0	0	e_{20}	$-e_{15}$	$-P_s$	0	S_s+e_{21}	4
$-A_p+e_8$	0	$-B+e_{17}$	e_{15}	e_{13}	0	e_{14}	e_{16}	5
0	R_p	0	P_p	0	0	0	0	6
B_p-e_{17}	0	T_p+e_{19}	0	$-e_{14}$	0	e_{18}	0	7
e_{15}	$-P_p$	0	$-S_p+e_{21}$	$-e_{16}$	0	0	e_{20}	8

Tablica 6.

Podmacierze sztywności prostokątnego elementu prętowo-płytowego [cd.]

$[k_3] =$

	9	10	11	12	13	14	15	16
9	$A_p+A_r+e_1$	0	B_p-e_3	$-B_r+e_6$	$-A_r+e_7$	0	$-e_9$	$-B_r+e_{11}$
10		M_p+M_r	$-P_r$	P_p	0	R_r	P_r	0
11			$F_p+S_p+e_2$	$-e_4$	$-e_9$	$-P_r$	S_r+e_{10}	0
12				$F_r+S_r+e_3$	B_r-e_{11}	0	0	T_r+e_{12}
13					$A_s+A_n+e_1$	0	$-B_s-e_5$	B_n-e_6
14						M_s+M_n	P_n	$-P_s$
15							$S_nF_s+e_2$	e_4
16								T_n-S_5

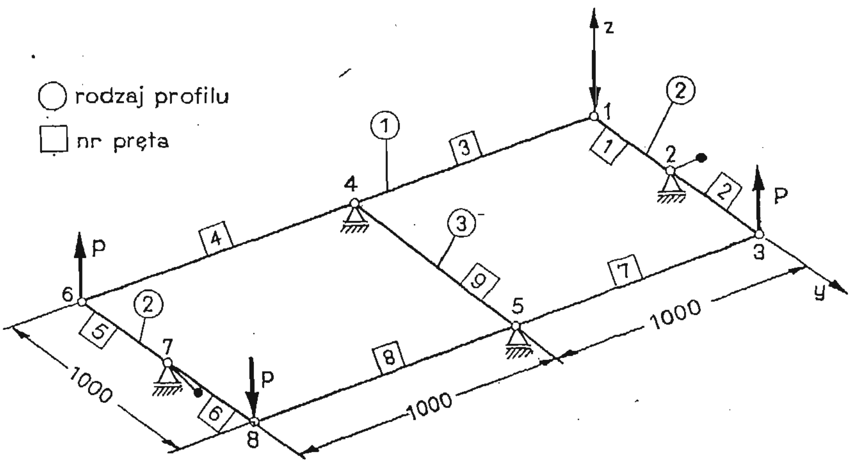
FORTRAN 1900 i uruchomiono go na maszynie cyfrowej serii ODRA 1300. Obliczać można dowolne konstrukcje płaskie obciążone przestrzennie, składające się z elementów:
— prętowo-płytowych (o elementach prostokątnych),
— prętowych (ruszty),
— płytowych.

Pręty mogą być o dowolnym, lecz stałym przekroju, a w połączeniu z płytą stanowią jej ożebrowanie lub wzmocnienie brzegów. Obciążenie zewnętrzne może być stałe ciągłe lub skupione — przykładane w węzłach elementów. W danym do programu należy podać dyskretne wielkości geometryczne prętów i płyty. Jako wyniki otrzymuje się przemieszczenia węzłów konstrukcji (u_z, $\varkappa$, α_x, α_y) oraz siły wewnętrzne w elementach prętowych i płytowych. Ponadto program PPLY liczby w każdym elemencie prętowym naprężenia:
— gnące (σ_g),
— normalne wycinkowe (σ_ω — pochodzące od bimomentu),
— styczne do San-Venanta (τ_v),
— styczne wycinkowe (τ_ω),
— zredukowane (σ_z — wg hipotezy Hubera),
oraz w elemencie płyty naprężenia σ_x, σ_y, τ_{xy} i zredukowane σ_z.

4. Przykłady liczbowe

Na podstawie opracowanego programu rozwiązano szereg prostych przykładów liczbowych. Jako pierwszy przedstawiono przykład ramy płaskiej (rys. 5) obciążonej przestrzennie, której wytrzymałość obliczono dwiema metodami, powyższą z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego (PPLY) oraz bez skręcania nieswobodnego (WAT-KM). Wyniki obliczeń według metod zostały przedstawione w tablicach 7 i 8.

Analiza naprężeń stycznych (tabl. 7) wykazała, że system WAT-KM daje zawyżone wartości naprężeń stycznych (w tym przypadku o 61,5%) przy jednakowym lub mniejszym momencie skręcającym w porównaniu z przedstawioną metodą obliczeń. Rozbieżność



Rys. 5. Model ramy skręcanej.

Tabela 7.

Zestawienie wewnętrznych momentów skręcających i naprężeń stycznych w poszczególnych elementach ramy (porównanie z nieswobodnym skręcaniem).

Nr pręta	PPLY M_V [kGcm]	PPLY M_ω [kGcm]	PPLY M^* [kGcm]	KM-WAT M_s [kGcm]	PPLY τ_v [MPa]	PPLY τ_ω [MPa]	PPLY τ_P [MPa]	KM-WAT τ_K [MPa]	Δ_{P-K} [%]
1	−798,0	−1600,5	−2398,6	−1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	−16,9
2	−798,0	−1600,5	−2398,6	−1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	−16,9
3	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	−61,5
4	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	−61,5
5	−798,0	−1600,5	−2398,6	−1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	−16,9
6	−798,0	−1600,5	−2398,6	−1129,5	40,59	8,3	48,9	58,9	−16,9
7	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	−61,5
8	959,1	1920,6	2879,8	2882,9	23,50	3,68	27,18	70,6	−61,5
9	−489,3	−3193,6	−3683,0		23,0			—	

$$^*M_s = M_v + M_\omega; \quad \Delta_{P-K} = \frac{\tau_P - \tau_K}{\tau_K} \cdot 100; \quad \tau_P = \tau_v + \tau_\omega$$

PPLY — system oparty na metodzie elementów skończonych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego,
KM — system oparty na metodzie elementów skończonych (bez skręcania nieswobodnego) opracowany przez KMS i Wytrz. Mat. WAT.

Tabela 8.

Zestawienie maksymalnych naprężeń normalnych i zastępczych w elementach ramy skrętnej (porównanie z nieswobodnym skręcaniem).

Nr pręta	PPLY σ_g MPa	PPLY σ_ω MPa	PPLY σ_n^* MPa	KM-WAT $\sigma_g = \sigma_n$ MPa	$\Delta_{(P-K)n}$ %	PPLY σ_z MPa	KM-WAT σ_z MPa	$\Delta_{(P-K)z}$ %
1	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
2	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
3	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	−26,0
4	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	−26,0
5	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
6	7,389	237,1	244,5	7,397	96,9	258,7	102,3	152,8
7	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	−26,0
8	1,99	75,39	77,38	2,576	96,7	90,57	122,4	−26,0
9	0,00	276,87	276,87	0,0	100		—	

$$\Delta_{(P-K)n} = \frac{\sigma_{n_P} - \sigma_{n_K}}{\sigma_{n_P}} \cdot 100; \quad \Delta_{(P-K)z} = \frac{\sigma_{z_P} - \sigma_{z_K}}{\sigma_{z_K}} \cdot 100; \quad \sigma_n = \sigma_g + \sigma_\omega$$

σ_g — naprężenia gnące, σ_ω — normalne naprężenia wycinkowe (pochodzące od nieswobodnego skręcania), σ_z — naprężenia zastępcze wg hipotezy Hubera.

ta wynika stąd, że przy skręcaniu nieswobodnym prętów cienkościennych całkowity moment skręcający jest równy

$$M_s = M_v + M_\omega \tag{4.1.}$$

momentowi de San Venanta (M_v) i momentowi giętno-skrętnemu (M_ω), natomiast w metodzie bez skręcania nieswobodnego (system WAT-KM) przyjmuje się, że moment całkowity skręcający

$$M_s = M_v, \tag{4.2}$$

jest równy momentowi de San Venanta, w wyniku czego otrzymuje się nieadekwatne naprężenia styczne. Z porównania naprężeń normalnych (σ_n) obu metod w tabl. 8 wynikają duże rozbieżności, ponieważ w metodzie z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego są one równe

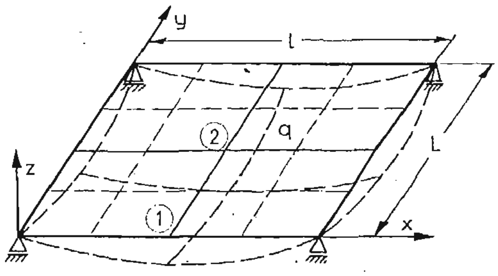
$$\sigma_n = \sigma_g + \sigma_\omega, \tag{4.3.}$$

tzn. sumie naprężeń gnących (σ_g) i wycinkowych (σ_ω) — pochodzących od bimomentu. W metodzie (WAT-KM) bez skręcania nieswobodnego naprężenia normalne są równe naprężeniom gnącym

$$\sigma_n = \sigma_g. \tag{4.4}$$

Z porównania naprężeń zastępczych (tabl. 8) wynika, że błąd w obliczeniach prowadzonych bez uwzględnienia teorii prętów cienkościennych jest znaczny i osiąga w tym wypadku 152,8%. Oprócz tego należy zwrócić uwagę na maksymalne naprężenia (przekrój niebezpieczny), które według obu metod są w różnych przekrojach ramy (rys. 5).

Drugim przykładem jest płyta kwadratowa izotropowa (rys. 6), podparta w narożach i obciążona równomiernie (q). W tabl. 9 porównano wyniki analizy



Rys. 6. Płyta kwadratowa izotropowa obciążona równomiernie.

metodą elementów skończonych otrzymane programem PPLY z przykładem Zienkiewicza [7] i innymi rozwiązaniami przybliżonymi. W tym przypadku, gdzie koncentracja sił w narożach komplikuje zagadnienie, uzyskano dosyć dobrą zgodność zarówno przemieszczeń, jak i naprężeń. Przy bardziej zagęszczonej siatce podziału na elementy uzyskuje się większą dokładność i zbieżność wyników.

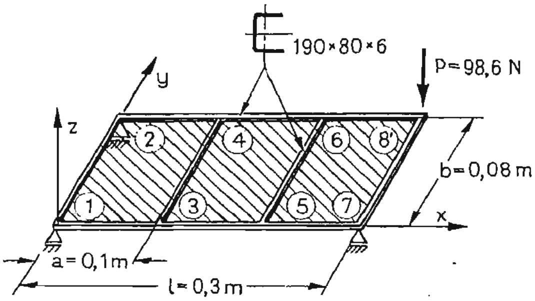
Trzecim przykładem liczbowym jest konstrukcja prętowo-płytowa skręcana asymetrycznie. Przedstawioną konstrukcję na rys. 7 podzielono na trzy elementy

Tablica 9.

Zestawienie przemieszczeń kwadratowej płyty liczone różnymi metodami.

	Siatka	u_z (ugięcie) Punkt 1	Punkt 2	Mnożnik
Obciążenie ciągłe (q)				
PPLY	2×2	0,0145	0,0217	
	4×4	0,01677	0,0249	
Zienkiewicz	2×2	0,0126	0,0176	$-\frac{qL^4}{D_1}$
	4×4	0,0165	0,0232	
Marcus	—	0,0180	0,0281	
Lee i Ballesteras	—	0,0170	0,0265	
Obciążenie siłą skupioną (P)				
PPLY	2×2	0,07695	0,14662	$-\frac{P^2}{D_1}$
	4×4	0,09066	0,15977	

Punkt 1 — środek boku, punkt 2 — środek płyty, D_1 — sztywność płyty.



Rys. 7. Konstrukcja prętowo-płytowa skręcana asymetrycznie.

prętowo-płytowe (2.3.2.) Analizę wytrzymałościową przeprowadzono MES z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego programem PPLY. Ze względu na brak w literaturze podobnej analizy cienkościennej konstrukcji prętowo-płytowej, w tabl. 10 porównano wyniki przemieszczeń węzła pod siłą skupioną dla trzech przypadków konstrukcji: płytowej, ramowej i ramowo-płytowej.

Przeprowadzona analiza trzech przykładów wykazała, że przedstawiona metoda obliczeń cienkościennych konstrukcji prętowo-płytowych daje wyniki zadawalające. Uwzględnienie dodatkowego stopnia swobody $\varkappa$ (deplanacja przekroju pręta cienkościennego), pozwala na osiągnięcie wyników zbliżonych, odpowiadających rzeczywistym w stosunku do tradycyjnej MES (tabl. 7, 8). Ponadto wyprowadzona macierz sztywności płyty (tabl. 1) w porównaniu z wynikami np. Zienkiewicza (tabl. 9) przy tej samej siatce podziału daje wyniki dokładniejsze. Dla podziału na elementy 2×2 różnica wyników wynosi 18%, a przy 4×4 już 6,8% (tabl. 9). Różnice wyników maleją przy wzroście liczby elementów, na jaką konstrukcja została podzielona. Natomiast jest bardzo ważne, że program PPLY

Tablica 10.

Maksymalne przemieszczenia trzech typów konstrukcji.

Przemieszczenia w węźle nr 8	konstrukcja			Mnożnik
	ramowa	płytowa	ramowo-płytowa	
u_z[m]	−0,33685	−33,01587299	−0,33344	10^{-2}
$\varkappa$ [1/m]	−0,00000233	0,0	−0,00000231	10^2
α_x[rad]	−0,00420937	−0,31269841	−0,00416688	—
α_y[rad]	0,0011192	0,11005291	0,0011079	—

dla dużych elementów daje wyniki dokładniejsze od innych metod, a tym samym potwierdza możliwość stosowania programu do analizy wytrzymałościowej cienkościennych konstrukcji z podziałem na elementy prętowo-płytowe. Taki podział dla konstrukcji powtarzalnych pozwala w znaczny sposób skrócić efektywny czas liczenia i nie zajmuje tyle pamięci EMC, jak przy użyciu systemu ASKA, SEZAM-69 lub KM-WAT, w których oddzielnie są liczone macierze sztywności poszczególnych prętów i płyt.

Literatura cytowana w tekście

1. V. Z. Własov, *Tonkostennye uprugie sterzhni.* Gosud. izdat. fiziko-matem. literatury, Moskva 1959.
2. J. H. Argyris, D. Radaj, *Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger Stöbe und Stabsysteme.* Ingenieur — Archity, Nr 40/1971.
3. E. Rusiński, *Obliczanie ram samochodowych wedlug metody elementów skończonych i teorii prętów cienkościennych,* Technika Motoryzacyjna nr 1 i 2/78.
4. E. Rusiński, *Analiza konstrukcji prętowo-tarczowych metodą elementów skończonych.* MTiS, zeszyt 2/1981.
5. J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis.* McGraw-Hill 1968.
6 O. C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych.* Arkady, Warszawa 1972.
7. O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, *The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs,* Proc. Inst. Civ. Eng., 28, s. 471 - 88, 1964.

Резюме

СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕРЖНЕ-ПАНЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ СТЕСНЁННОГО КРУЧЕНИЯ

В работе описан усовершенствованный по сравнению с применяемым до сих пор методом конечных элементов для анализа тонкостенных стержнепанельных конструкций. Предложен новый способ подразделения конструкций на стержне — панельные элементы, состоящие из панели и стержней на краях, а также определена мастрица жёткости такого элемента с учётом стеснённого кручения. Определена также матрица напряжений и внешная сплошная нагрузка элемента панели. Разработана программа на языке ФОРТРАН 1900 для расчёта тонкостенных конструкций: стержневых, панельных и стержне-панельных.

Summary

THE METHOD OF FINITE ELEMENTS IN STATICAL ANALYSIS OF THE ROD-SHIELD CONSTRUCTION, WITH NON-FREE TORSION, TAKEN INTO ACCOUNT

The existing finite elements method has been improved for the analysis of thin-walled rod-shield constructions. The rod-shield construction consist of a thin panel framed with rods on all sides.

The stiffness matrix of such elements has been determined by taking into account the non-free torsion of the rods. The stress-matrix and external continous loading matrix of an element have been also determined. The program PPLY in FORTRAN 1900 language for calculations of thin-walled constructions has been worked out. The program applies to calculation of rod constructions, rod-shield constructions and panel constructions. The program has been tested on computer Odra 1300. The paper has been illustrated with examples to verify the total procedure.

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 22 października 1979 roku.