

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH NAPRĘŻEŃ W KOMPOZYTACH LAMELKOWYCH

STANISŁAW MATYSIAK, ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Badanie stanu naprężeń w kompozytach włóknistych można, w wielu przypadkach praktycznych, sprowadzić do rozpatrywania ośrodka sprężystego z wtrąceniami (inkluzjami) w kształcie lametek. Inkluzje włókniste są zwykle głównym elementem przenoszącym siły i obciążenia działające na cały obszar kompozytu. W praktyce moduł Younga włókien jest znacznie większy od modułu Younga matrycy. Przyjmujemy, że materiał matrycy jest liniowo sprężysty, a sztywność włókien na tyle większa od sztywności matrycy, że można założyć ich nieodkształcalność. Założenie, że włókna mają kształt płaskich lametek prowadzi do uproszczenia analizy pozwalając równocześnie wyciągnąć wnioski dotyczące naprężeń w matrycy w przypadku, gdy włókna nie odbiegają zbyt od kształtu taśmy.

Wyznamy tu stan naprężeń i przemieszczeń występujące w matrycy, przede wszystkim interesować nas będą składowe stanu naprężenia w bezpośrednim otoczeniu włókien. Wyprowadzone wzory będą przydatne przy określeniu wyężenia w matrycy oraz przy wyznaczeniu naprężeń mogących prowadzić do dekohezji na granicy między włóknami i matrycą, powstawania szczelin, przekroczenia granicy plastyczności i osiągnięcia odkształceń trwałych w matrycy, itp. Składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia zależą od współczynnika Poissona ν . Interesujące jest to, że np. składowa naprężenia normalna do powierzchni lamelki osiąga maksymalną wartość dla $\nu \cong 0,317$. Znajomość rozkładu naprężeń w ośrodku nieograniczonym pozwala na oszacowanie stanu naprężenia w kompozycie, pod warunkiem, że odległość między poszczególnymi lamelkami (włóknami) nie jest mała w porównaniu do ich wymiarów poprzecznych. Nie zajmujemy się w tej pracy ważną dla kompozytów sprawą uśredniania wartości stałych materiałowych i naprężeń [3, 7].

2. Stan naprężeń w matrycy w otoczeniu wtrącenia w kształcie cienkiej taśmy

Materiał kompozytowy można traktować jako ośrodek sprężysty o skokowej niejednorodności, lub w przybliżeniu jako ośrodek niejednorodny z ciągłą, ale o dużym gradiencie, zmiennością przestrzenną stałych materiałowych. Najstarsza metoda polega na rozpatrzeniu dwóch lub więcej ciał, z których jedno jest matrycą, a pozostałe wtrąceniami, przy uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych dla każdego z tych ciał, w tym warunków ciągłości (zwanymi czasami warunkami na „zszyciu”) przemieszczeń i naprężeń normalnych. Zakładamy tu, że wtrącenia włókniste, w kształcie lametek, są odpowiednio

uporządkowane oraz, że inkluzje są oddalone od siebie tak, że odnośne odległości są co najmniej kilkakrotnie większe od szerokości lub grubości lamelek. Założymy, że materiał lamelek jest na tyle sztywniejszy od materiału matrycy, że możemy przyjąć jego nieodkształcalność. Materiał matrycy jest sprężysty, izotropowy i jednorodny. Lamelka jest nieskończenie długa o szerokości $2a$ i pomijalnej grubości. Przy tych założeniach przyjmiemy dwuwymiarowy stan odkształcenia. W zależności od sposobu przyłożenia sił rozpatrzmy dwa przypadki szczególne.

Lamelka zajmuje następujący obszar: $D = \{(x, y, z); |x| < h, |y| < a, z \in R\}$, gdzie (x, y, z) oznacza układ współrzędnych kartezjańskich, $h \ll a$.

Przypadek 1. Obciążenia zewnętrzne prostopadłe do powierzchni lamelki.

Przestrzeń z inkluzją taśmową jest poddana rozciąganiu obciążeniami σ_0 w kierunku osi x , prostopadłym do powierzchni lamelki. Wektor przemieszczenia w dwuwymiarowym stanie odkształcenia ma postać $u(x, y) = (u, v, 0)$.

Rozwiążemy zagadnienie brzegowe teorii sprężystości sprowadzające się do równań przemieszczeniowych Naviera w postaci

$$(2.1) \quad (1-2\nu)u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\beta\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 (u_1 \equiv u, u_2 \equiv v),$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad u(0, y) = v(0, y) = 0, \quad |y| \leq a,$$

oraz warunkami „wypromieniowania” w nieskończoności

$$(2.3) \quad \sigma_{xx} \rightarrow \sigma_0, \quad \sigma_{xy} \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy} \rightarrow 0, \quad \text{dla } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.$$

Rozwiązanie otrzymamy przez prostą superpozycję dwóch rozwiązań: zagadnienie (a) — półprzestrzeń bez wtrącenia w jednorodnym stanie naprężenia z warunkami brzegowymi (2.3), oraz zagadnienia uzupełniającego (b) spełniającego równania różniczkowe cząstkowe (2.1) z warunkami brzegowymi komplementarnymi do (2.2) i warunkami regularności w nieskończoności.

Rozwiązanie zagadnienia (a) ma postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_0 x; & v(x, y) &= -\frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 y, \\ \sigma_{xx}(x, y) &= \sigma_0, & \sigma_{xy}(x, y) &= \sigma_{yy}(x, y) = 0, \\ & \forall x, y \in R^2. \end{aligned}$$

Zagadnienie uzupełniające (b) jest równoważne następującemu mieszanemu zagadnieniu brzegowemu dla półprzestrzeni $x \in [0, \infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, którym rządzą równania różniczkowe cząstkowe (2.1) wraz z warunkami brzegowymi:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, & y &\in R, \\ v(0, y) &= \frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 y, & |y| &< a, \\ \sigma_{xy}(0, y) &= 0, & |y| &> a, \end{aligned}$$

oraz jednorodne warunki regularności w nieskończoności.

Przypuśćmy, że z rozwiązania wyniknie, że $\sigma_{xy}(0, y) = -s(y)H(y-a)$, $y \in R$, przy czym $s(-y) = -s(y)$, oraz $s(y) \in \mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$. Rozwiązanie zagadnienia (b) przyjmuje postać następującą:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\frac{1}{4(1-\nu)\mu} x \mathcal{F}_c[\exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y], \\
 v(x, y) &= -\frac{1}{4(1-\nu)\mu} \mathcal{F}_s[\xi^{-1}\{-(3-4\nu) + \xi x\} \exp(-\xi x)s(\xi); \xi \rightarrow y], \\
 (2.6) \quad \sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \mathcal{F}_c[(1-2\nu - \xi x)\exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y], \\
 \sigma_{xy}(x, y) &= -\mathcal{F}_s\left[\left(1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \xi x\right) \exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y\right], \\
 \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \mathcal{F}_c[\{-(3-2\nu) + \xi x\} \exp(-\xi x)\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y],
 \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{F}_s[;]$, $\mathcal{F}_c[;]$ są odpowiednio sinusową i kosinusową transformacją Fouriera, ponadto $\tilde{s}(\xi) = \mathcal{F}_s[s(y); y \rightarrow \xi]$. $s(y)$ spełnia warunki brzegowe (2.5)₂ i (2.5)₃, które prowadzą do następującego układu dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad v(0, y) &= \frac{3-4\nu}{4\mu(1-\nu)} \mathcal{F}_s[\xi^{-1}\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y] = \frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 y, \quad y \in [0, a), \\
 \sigma_{xy}(0, y) &= -\mathcal{F}_s[\tilde{s}(\xi); \xi \rightarrow y] = 0, \quad y > a.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie dualnych równań całkowych (2.7) ma postać [8]:

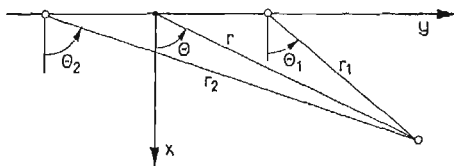
$$(2.8) \quad \tilde{s}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2\nu(1-\nu)}{3-4\nu} \sigma_0 a J_1(a\xi),$$

gdzie $J_1(a\xi)$ jest funkcją Bessela.

Po podstawieniu wartości całek [4] występujących we wzorach (2.6) otrzymamy następujące rozwiązanie zagadnienia uzupełniającego:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\frac{\nu\sigma_0}{2\mu(3-4\nu)} r \cos\Theta \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left[\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right] \right\}, \\
 v(x, y) &= \frac{\nu\sigma_0}{2\mu(3-4\nu)} \left\{ (3-4\nu) \left[r \sin\Theta - \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r^2 \cos\Theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left[\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right] \right\}, \\
 \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left\{ (1-2\nu) \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right) \right] - \right. \\
 (2.9) \quad &\quad \left. - r \cos\Theta \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos\frac{3}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \right\}, \\
 \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{2\nu(1-\nu)}{3-4\nu} \sigma_0 \left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left[\Theta - \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} r \cos\Theta \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin\frac{3}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \right\},
 \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \sigma_{yy}(x, y) = -\frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left\{ -(3-2\nu) \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\Theta - \frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) \right) \right] + \right. \\ \left. + r \cos \Theta \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos \frac{3}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) \right\},$$



Rys. 1

gdzie r , r_1 , r_2 oraz Θ , Θ_1 , Θ_2 są określone wzorami (rys. 1)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Theta = \arctg \frac{y}{x},$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}, \quad \Theta_1 = \arctg \frac{y-a}{x},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}, \quad \Theta_2 = \arctg \frac{y+a}{x},$$

dla $x = 0$, $|y| < a$, $\Theta_1 = \frac{3}{2}\pi$, $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ oraz $\frac{3}{2}\pi$,

dla $x = 0$, $|y| > a$, $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = \frac{\pi}{2}$ oraz $\frac{3}{2}\pi$.

Z kolei dla $x = 0$ otrzymujemy następujące składowe przemieszczenia i naprężenia. Wzory te podajemy dla zagadnienia wyjściowego, tzn. superpozycji rozwiązań zagadnienia (a) i (b):

$$(2.10) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ v(0, y) &= \frac{\nu}{2\mu} \sigma_0 \operatorname{sgn}(y) \sqrt{y^2 - a^2} H(|y| - a), \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \left[1 - \frac{\nu(1-2\nu)}{3-4\nu} \right] \sigma_0 + \frac{\nu(1-2\nu)}{3-4\nu} \frac{|y|\sigma_0}{\sqrt{y^2 - a^2}} H(|y| - a), \\ \sigma_{xy}(0, y) &= -\frac{2\nu(1-\nu)}{3-4\nu} \sigma_0 \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} H(a - |y|), \\ \sigma_{yy}(0, y) &= \frac{3-2\nu}{3-4\nu} \nu\sigma_0 \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}} H(|y| - a) \right], \end{aligned}$$

gdzie $H(y)$ oznacza funkcję Heaviside'a.

Obliczmy jeszcze współczynnik intensywności naprężeń:

$$K_I = \lim_{y \rightarrow a^+} 2\sqrt{2\pi(|y| - a)} \sigma_{xx}(0, y),$$

skąd, po podstawieniu otrzymujemy

$$(2.11) \quad K_I = \frac{2\sqrt{\pi}(1-2\nu)\nu}{3-4\nu} \sqrt{a} \sigma_0.$$

Z powyższych rozważań możemy wyciągnąć dwa następujące wnioski:

1. lamelki o dużej sztywności spełniają rolę koncentratora naprężeń w matrycy,
2. współczynnik intensywności naprężeń osiąga największą wartość dla $\nu = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \cong \cong 0,317$.

Przypadek 2. Obciążenie równoległe do powierzchni lamelki.

Obecnie przyjmiemy, że obciążenie zewnętrzne q_0 jest równoległe do osi Oy , przy niezmiennym położeniu lamelki. Układ równań różniczkowych nie ulegnie zmianie, podobnie jak warunki brzegowe na powierzchni lamelki, jedynie warunki w nieskończoności przyjmą teraz postać:

$$\sigma_{xx} \rightarrow 0, \quad \sigma_{xy} \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy} \rightarrow q_0, \quad \text{dla } \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$$

Również w tym przypadku wykorzystamy zasadę superpozycji. Zagadnienie (c) odpowiada równomiernemu stanowi naprężenia wywołanemu w ośrodku sprężystym bez inkluzji obciążeniami q_0 przyłożonymi w nieskończoności. Rozwiązanie zagadnienia (c) otrzymamy z rozwiązania zagadnienia (a) przez cykliczną zamianę współrzędnych:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{\nu}{2\mu} q_0 x, & v(x, y) &= \frac{1-\nu}{2\mu} q_0 y, \\ \sigma_{xx}(x, y) &= \sigma_{xy}(x, y) = 0, & \sigma_{yy}(x, y) &= q_0, \\ & \forall x, y \in R^2. \end{aligned}$$

Zagadnienie uzupełniające (d) sprowadza się do rozwiązania równań różniczkowych równowagi (2.1) z warunkami regularności w nieskończoności oraz następującymi warunkami brzegowymi:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u &\in R, \\ v(0, y) &= -\frac{1-\nu}{2\mu} q_0 y, & \text{dla } |y| < a, \\ \sigma_{xy}(0, y) &= 0, & |y| > a. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zagadnienia (d) otrzymujemy przez podstawienie we wzorach (2.9) wartości

$$(2.14) \quad \sigma_0 = -\frac{1-\nu}{\nu} q_0.$$

Przez superpozycję rozwiązań zagadnień (c) i (d) otrzymujemy dla $x = 0$ rozwiązanie odpowiadające przypadkowi 2 obciążeń zewnętrznych:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ v(0, y) &= -\frac{1-\nu}{2\mu} q_0 \operatorname{sgn}(y) \sqrt{y^2-a^2} H(|y|-a), \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} q_0 \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} H(|y|-a) \right], \end{aligned}$$

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}(0, y) &= \frac{2(1-\nu)^2}{3-4\nu} q_0 \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} H(a-|y|), \\ \text{[cd.]} \quad \sigma_{yy}(0, y) &= \frac{(1-\nu)(3-2\nu)}{3-4\nu} q_0 \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} H(|y|-a) + q_0 \left[1 - \frac{(1-\nu)(3-2\nu)}{3-4\nu} \right]. \end{aligned}$$

Współczynnik intensywności naprężeń przyjmie w tym przypadku wartość

$$(2.16) \quad K_I = \frac{2\sqrt{\pi a}(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} q_0,$$

osiągając maksymalną wartość dla $\nu = 0$.

3. Wyniki liczbowe i wnioski

Z otrzymanych wzorów, w obu przypadkach obciążeń możemy obliczyć koncentrację naprężeń oraz współczynniki intensywności naprężeń. Dla porównania podajemy, że odpowiedni współczynnik intensywności naprężeń szczeliny Griffitha w dwuwymiarowym stanie odkształcenia przyjmuje wartość

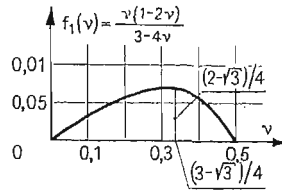
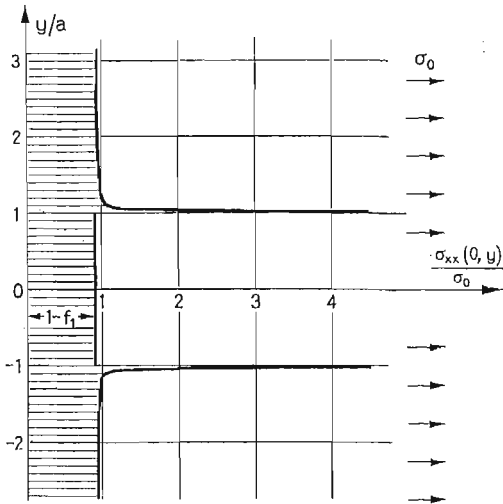
$$(3.1) \quad K_I = \sqrt{\pi a p_0},$$

gdzie p_0 są obciążeniami prostopadłymi do powierzchni szczeliny. Jak widać współczynnik ten nie zależy od stałych materiałowych. W przypadku inkluzji można mieć wątpliwości jak należy obliczyć współczynnik intensywności naprężeń. Każda ze składowych stanu naprężenia wzrasta nieograniczenie w otoczeniu wierzchołków inkluzji i niewiadomo, która z nich będzie decydująca przy inicjacji pęknięcia. Wydaje się, że w przypadku odklejania się materiału matrycy od inkluzji decydujący wpływ będzie mieć składowa styczna tensora naprężeń, w przypadku pęknięcia na zewnątrz inkluzji w płaszczyźnie lamelki składowa normalna naprężenia.

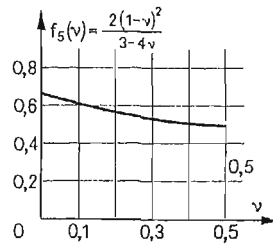
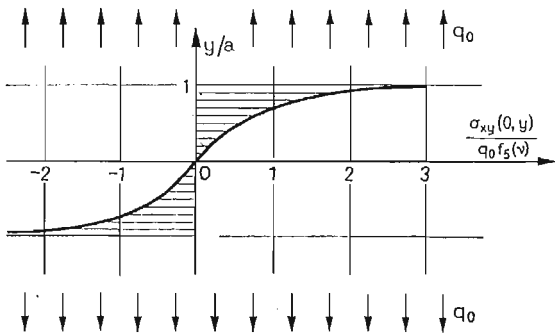
Na rysunkach 2-7 przedstawiliśmy rozkład poszczególnych składowych naprężenia oraz podaliśmy wykresy sześciu funkcji stałej materiałowej Poissona $f_1(\nu) - f_6(\nu)$. Okazuje się, że każda z wymienionych składowych naprężenia zależy w inny sposób od stałej Poissona, osiągając największe wartości bądź na brzegach przedziału zmienności, lub przyjmując ekstremum wewnątrz dziedziny określoności ν . W przypadku obciążeń normalnych do powierzchni lamelki σ_0 , naprężenia $\sigma_{xx}(0, y)$ osiągają maksimum dla wartości stałej

Poissona $\nu_m = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, wtedy $f_1(\nu_m) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. Naprężenia $\sigma_{xy}(0, y)$ oraz $\sigma_{yy}(0, y)$ znikają dla $\nu = 0$ i przyjmują odpowiednie największe wartości dla materiału nieściśliwego.

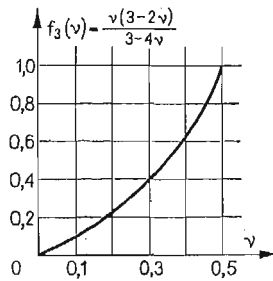
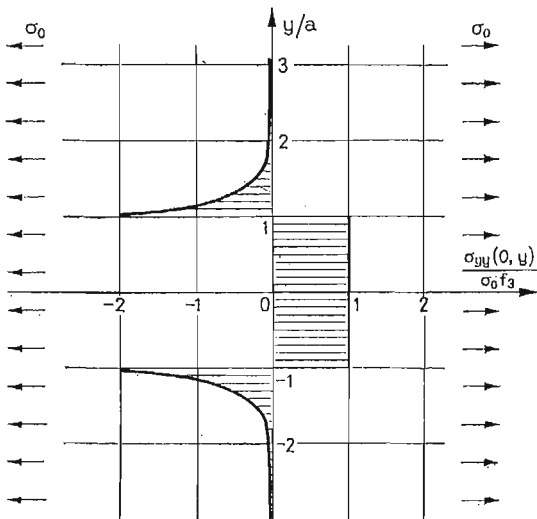
Z kolei przy obciążeniach równoległych do powierzchni lamelki q_0 otrzymujemy największe wartości $\sigma_{xx}(0, y)$ oraz $\sigma_{xy}(0, y)$ dla $\nu = 0$, ponadto $\sigma_{xx}(0, y)$ znika dla materiału nieściśliwego. Naprężenia $\sigma_{yy}(0, y)$ natomiast przyjmują wartość minimalną dla $\nu_m = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ wynoszącą $f_6(\nu_m) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, a jednakowe wartości największe dla $\nu = 0$ i $\nu = 0,5$.



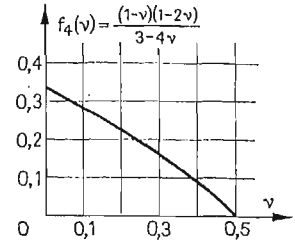
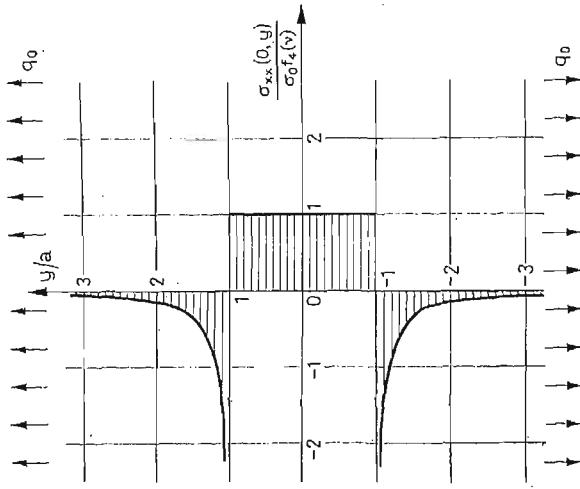
Rys. 2



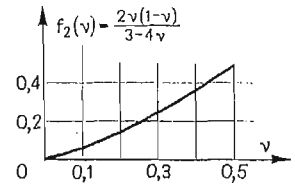
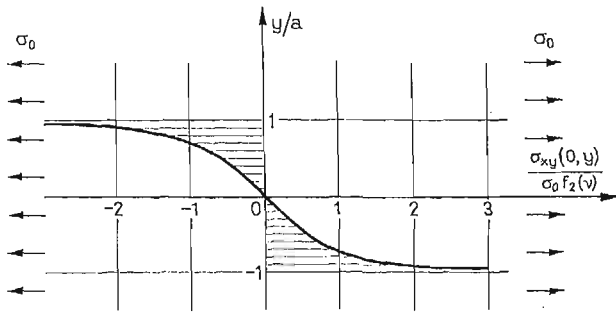
Rys. 3



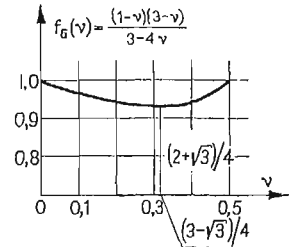
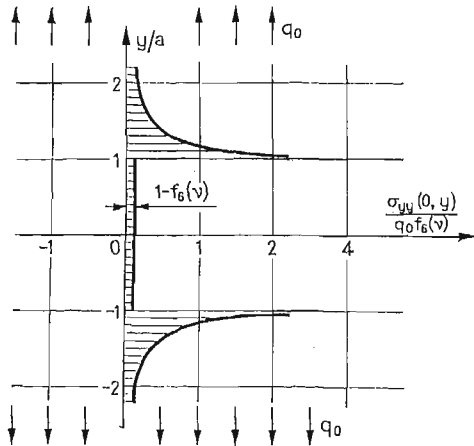
Rys. 4



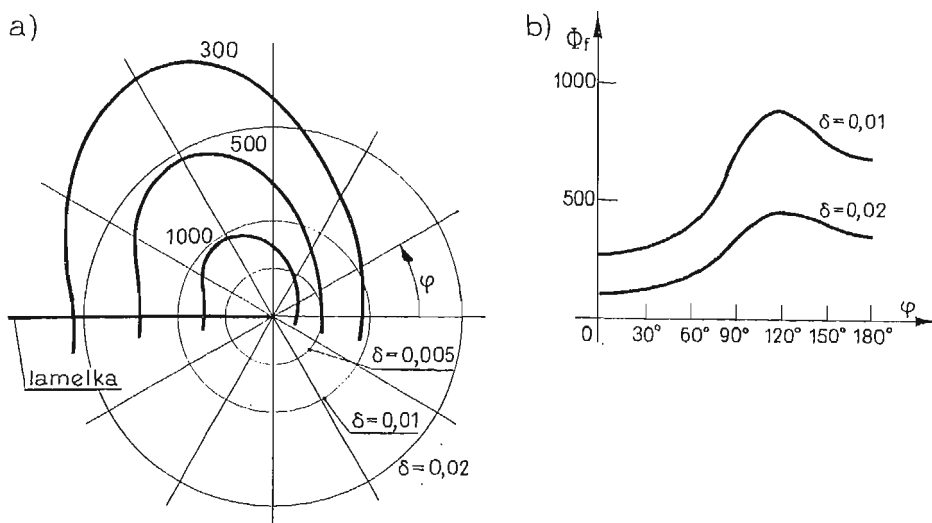
Rys. 5



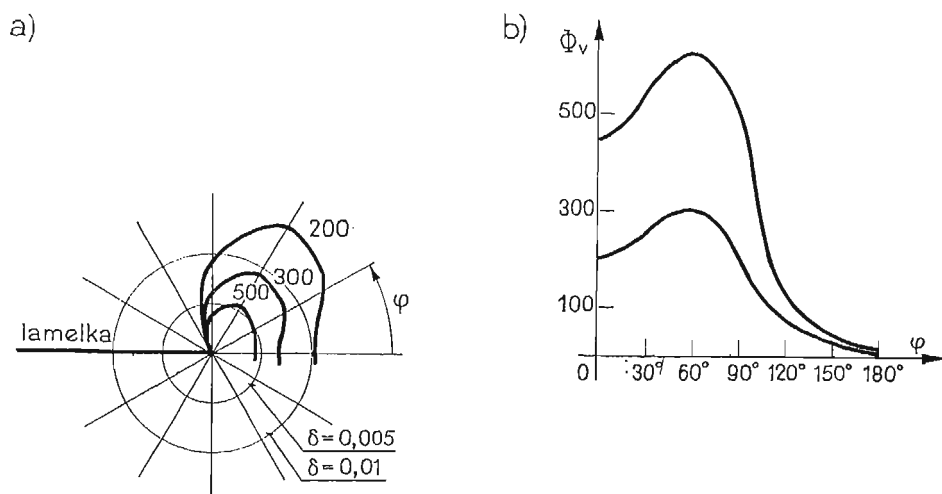
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Zaletą przedstawionego tu rozwiązania analitycznego dla kompozytu z nieodkształcalnymi lamelkami jest łatwość wyciągnięcia interesujących nas wniosków. Rozwiązanie dla lamelki sprężystej prowadzi do równania całkowego Fredholma II rodzaju na pewną funkcję w przestrzeni transformacji. Rozwiązanie można otrzymać na drodze numerycznej, z kolei przemieszczenia i naprężenia otrzymujemy przez obliczenie odpowiednich transformacji odwrotnych. Dyskusja otrzymanych na tej drodze wyników jest trudna i uciążliwa i prowadzi do wzorów przybliżonych.

4. Ogólny przypadek obciążenia

Przypuśćmy, że równomierne pole naprężeń p_0 jest nachylone pod kątem α do powierzchni lamelki. Wtedy wystarczy do wyprowadzonych wzorów podstawić

$$(4.1) \quad \sigma_0 = p_0 \sin \alpha, \quad q_0 = p_0 \cos \alpha.$$

Odpowiedni warunek brzegowy w zagadnieniu uzupełniającym (b) wzór (2.5) przyjmie postać

$$(4.2) \quad v(0, y) = \frac{y}{2\mu} p_0 [\nu(\sin \alpha + \cos \alpha) - \cos \alpha],$$

do wzorów (2.9) należy wtedy podstawić

$$(4.3) \quad \sigma_0 = p_0 \left[\sin \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{\nu} \cos \alpha \right].$$

Rozwiązanie ogólne otrzymamy przez dodanie, w odpowiedni sposób, do wzorów (2.9) rozwiązań zagadnienia (a), będącego uogólnieniem rozwiązania (2.4), w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 2\mu u(x, y) &= -p_0 x [\nu(\sin \alpha + \cos \alpha) - \sin \alpha], \\ 2\mu v(x, y) &= p_0 y [\nu(\cos \alpha - \sin \alpha) - \cos \alpha], \\ \sigma_{xx}(x, y) &= p_0 \sin \alpha, \quad \sigma_{xy}(x, y) = 0, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= p_0 \cos \alpha. \end{aligned}$$

5. Energia właściwa odkształcenia postaciowego

W przypadku dwuwymiarowego stanu odkształcenia mamy następujący znany wzór na energię właściwą odkształcenia postaciowego:

$$(5.1) \quad \Phi_f = \frac{1}{12\mu} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \{(\nu - 1)\sigma_{xx} + \nu\sigma_{yy}\}^2 + \{(\nu - 1)\sigma_{yy} + \nu\sigma_{xx}\}^2 + 6\sigma_{xy}^2].$$

Podstawienie odpowiednich wyrażeń na naprężenia wyznaczone w p. 2 pracy pozwala na znalezienie krzywych stałej właściwej energii odkształcenia postaciowego $\phi_f(x, y) = \text{const}$. Ponieważ rozwikłanie tego równania jest uciążliwe, a najbardziej interesuje nas wartość energii w bezpośrednim otoczeniu wierzchołków lamelki, tzn. punktu $(0, a)$ wyprowadzimy wzory przybliżone, wykorzystując rozwinięcia asymptotyczne dla małej wartości $r_1/a = \delta \ll 1$ (por. rys. 1). Otrzymujemy następujące wzory:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left[(1-2\nu) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \right] + O(\delta^{1/2}), \\ \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{2(1-\nu)\nu}{3-4\nu} \sigma_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sin \frac{\varphi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \right] + O(\delta^{1/2}), \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \sigma_{yy}(x, y) = -\frac{\nu\sigma_0}{3-4\nu} \left[-(3-2\nu) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right] + O(\delta^{1/2}).$$

[cd.]

Wzór na energię właściwą odkształcenia postaciowego ma postać:

$$(5.3) \quad \phi_f(x, y) = \frac{1}{12\mu} \frac{\nu^2 \sigma_0^2}{(3-4\nu)^2} \left\{ 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 + \right. \\ + \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) (-4\nu^2 + 6\nu - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right]^2 + \\ + \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) (-4\nu^2 + 6\nu - 3) + (1-2\nu) \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right]^2 + \\ \left. + 24(1-\nu)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{2\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \right]^2 \right\} + O(\delta).$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzór na właściwą energię objętościową:

$$\Phi_v = \frac{1}{12\mu} \frac{\nu^2 \sigma_0^2}{(3-4\nu)^2} (1-2\nu)(1+\nu) \left[4(1-\nu) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sin \varphi \sin \frac{3}{2} \varphi \right]^2 + O(\delta);$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1.$$

Literatura cytowana w tekście

1. J. D. ACHENBACH, *A theory of elasticity with microstructure for directionally reinforced composites*. CISM Courses and Lectures nr 167, 1975, Udine.
2. W. E. CLAUSEN, A. W. LEISSA, *Stress and deflection analysis of fibrous composite materials under external load*, AFML-TR-67-151.
3. I. N. FRANCEVIČ, D. M. KARPINOS, *Kompozycyjne materiały włóknistego strojenia*, Kijów, Naukowa Dumka, 1970.
4. I. S. GRADSZTEJN, I. M. RYŻIK, *Tablicy integralow, summ, rjadow, proizwiedenij*, Nauka, Moskwa, 1971.
5. Z. HASHIN, *Theory of fiber reinforced materials*, NASA Contractor Report, Nr 1974, March 1972.
6. L. JENTSCH, *VII Sympozjum zagadnień i metod fizyki matematycznej*, Karl-Marx-Stadt, 18 - 22 VI 1979, referat sekcyjny pt. *Zagadnienia matematyczne teorii sprężystości ciał o jednorodności skokowej*.
7. G. P. SENDECKIJ, *Mechanics of composite materials*, Academic Press 1974, także wydanie rosyjskie Mir, Moskwa 1978.
8. I. N. SNEDDON, *Mixed boundary value problems in the potential theory*, North Holland Publ. Com, Amsterdam, 1966.
9. G. A. WAN-FO-FY, *Prikladnaja Miechanika*, 1, 5, 111 (1965), Kijów.
10. G. A. WAN-FO-FY, *Miechanika Polimierow*, 4, 593 (1966).

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ
С ЛЕНТООБРАЗНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Рассматривается композиционный материал с лентообразными волокнами. Выведены формулы на напряжения и перемещения в матрице окружающей волокна в случае растягивающих усилий. Результаты рассуждений касающихся зависимости от коэффициента Пуассона приведены в виде диаграмм. Приведены также выражения на плотность энергии.

Summary

PROPERTIES OF STRESSES IN COMPOSITES WITH RIBBON-LIKE INCLUSIONS

A composite with rigid, ribbon-like fibres has been considered. The formulae have been derived for stress and displacements in the matrix surrounding a fiber in the case of tensile forces. The dependence on Poisson's ratio has been discussed and given in diagrams. The expression for energy density completes the paper.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI
