MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 19 (1981)

ANALIZA NIESTANDARDOWA W MECHANICE NEWTONOWSKIEJ PUNKTU MATERIALNEGO

CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

Spis treści

Wstęp

Mechanika newtonowska punktów materialnych, podobnie jak i inne działy fizyki teoretycznej, jest teorią opisującą pewną klasę zjawisk fizycznych przy pomocy odpowiednich modeli matematycznych. Modele te formułowane są z reguły w ramach aparatu pojęciowego analizy matematycznej. Tym samym wszystkie wartości dowolnej funkcji liczbowej (występującej w znanych w mechanice modelach zjawisk) są wielkościami „tego samego rzędu" tj. należą do tzw. archimedesowych systemów wielkości. Oznacza to, że dla każdych dwóch dodatnich skalarowych wielkości fizycznych a, b, które są porównywalne (tj. $a = b$ lub $a < b$ lub $a > b$), istnieje zawsze liczba naturalna n taka, że $na \geqslant b$. Tworzenie matematycznych modeli zjawisk uwzględniających wielkości „różnych rzędów" wymaga zastosowania bardziej ogólnego aparatu analitycznego, dysponującego niearchimedesowymi systemami wielkości. Systemy takie spotykamy w tzw. analizie niestandardowej, w której prócz liczb rzeczywistych „standardowych" mamy także do czynienia z liczbami „nieskończenie małymi" i „nieskończenie wielkimi" co do wartości bezwzględnej.

Początek rozwoju analizy niestandardowej przypada na rok 1961, w którym została ogłoszona praca A. Robinsona [1]. Wprawdzie istnienie niearchimedesowych systemów wielkości było znane już wcześniej, niemniej dopiero w [1] wykazano, że mogą być one konstruowane przy pomocy pewnych procedur prowadzących do rozszerzenia pojęcia liczby rzeczywistej. Pełny wykład podstaw analizy niestandardowej zawiera monografia A. Robinsona [2] z roku 1966 (por. także opracowanie M. Machovera i J. Hirschfelda [3] oraz monografię M. Daviesa [4]). Warto nadmienić, że A. Robinson, będący twórcą niestandardowej analizy, był też współautorem (wraz z P. J. Kelemenem) pierwszej pracy poświęconej zastosowaniu metod analizy niestandardowej w fizyce teoretycznej, [5]. Przegląd prac A. Robinsona na temat niestandardowej analizy zawiera drugi tom opracowania [6]. Szereg prac dotyczących różnych zagadnień analizy niestandardowej oraz jej zastosowań można znaleźć w opracowaniach pokonferencyjnych [8, 9].

Korzystanie z wielkości „nieskończenie małych" lub „nieskończenie dużych" w mechanice Newtona punktu materialnego jest fizycznie umotywowane; przykładowo skokowa zmiana prędkości punktu materialnego prowadzi do nieskończonej wartości przyspieszenia, zderzeniom punktów materialnych towarzyszą nieskończone wartości sił a skończone zmiany pędu, krętu lub energii mogą zachodzić w nieskończenie małych przedziałach czasu. Wprowadzenie do mechaniki niearchimedesowych systemów wielkości, typowych dla analizy niestandardowej, umożliwia nadanie wielkościom nieskończonym charakteru ilościowego (tj. traktowanie ich tak samo jak liczb skończonych) i głębsze wniknięcie w strukturę wymienionych powyżej sytuacji fizycznych.

Zasadniczym celem pracy jest sformułowanie podstaw i opis niektórych zagadnień mechaniki Newtona (mechaniki skończonych układów punktów materialnych) przy użyciu analizy niestandardowej jako aparatu matematycznego teorii. W ramach takiego sformułowania możemy tworzyć nowe modele matematyczne zjawisk, które opisuje i bada mechanika. Są to modele nie mające znanych odpowiedników w dotychczasowym sformułowaniu mechaniki Newtona. W szczególności, jako przypadek równań mechaniki skończonych lecz „niestandardowych" układów punktów materialnych otrzymamy znane równania mechaniki kontinuum. Tym samym analiza niestandardowa jest pomostem między mechaniką „dyskretną" a mechaniką kontinuum materialnego. Zastosowania analizy niestandardowej w mechanice przedstawione w pracy mają więc dwojaki charakter; z jednej strony prowadzą do pewnych „standardowych" sformułowań (analiza niestandardowa jest wtedy stosowana jako metoda), z drugiej strony otrzymujemy relacje, które mogą być wyrażone wyłącznie przy wykorzystaniu pojęć niestandardowych (np. relacja między tensorem naprężenia a oddziaływaniami punktów materialnych).

Przedstawione poniżej opracowanie składa się z trzech rozdziałów. Rozdział pierwszy to wprowadzenie do analizy niestandardowej, korzystające z cytowanych już monografii [2, 4] oraz pierwszych ustępów opracowania W. A. J. Luxemburga [7]. Drugi rozdział podaje podstawy mechaniki Newtona jako fragmenty pewnego systemu relacyjnego i omawia niestandardowe rozszerzenie tego systemu. Prowadzi to do niestandardowego modelu mechaniki Newtona. Jedno z prostych zastosowań tego modelu podano w rozdziale trzecim. Bardziej złożonym przypadkom zastosowań będzie poświęcona oddzielna praca. Całość opracowania ogranicza się do zastosowania analizy niestandardowej w mechanice Newtona skończonych układów punktów materialnych.

1. Co to jest analiza niestandardowa?[1)]

1.1. Systemy relacyjne. Podstawy analizy niestandardowej są nierozerwalnie związane z podstawami logiki matematycznej, a w szczególności z działem logiki zwanym teorią modeli. Tym samym odpowiedź na pytanie „co to jest analiza niestandardowa?" poprzedzić należy wprowadzeniem pewnych pojęć z których korzysta teoria modeli. Punktem wyjścia rozważań jest pojęcie systemu relacyjnego jako pewnego systemu obiektów zwanych relacjami. W systemie tym wyróżnimy przede wszystkim obiekty zwane elementami indywiduowymi. Przyjmujemy *a priori*, że są to pewne elementy „pierwotne" (*urelemente*), tj. takie o których nic nie zakładamy prócz tego, że nie są one zbiorami. Wszystkie inne obiekty systemu relacyjnego są utworzone przy pomocy elementów indywiduowych, przy czym będziemy rozróżniać obiekty różnego typu (jak zbiory, relacje n-członowe, relacje między relacjami etc.). Wprowadzając najpierw czysto formalnie pojęcie typu, podamy następnie definicję systemu relacyjnego.

Klasę wszystkich typów oznaczymy przez T i zdefiniujemy indukcyjnie przyjmując, że:

1° 0 jest typem (zamiast symbolu „0" można wprowadzić np. symbol „$*$", por. [10] s. 205, lub dowolny inny symbol),

2° jeśli $\tau_1, \ldots, \tau_n$ są typami to $\tau \equiv (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ jest typem,

3° T jest najmniejszą klasą spełniającą warunki 1°, 2°.

Systemem relacyjnym nazwiemy indeksowaną rodzinę zbiorów $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$ taką, że:

1° B_0 jest danym nieskończonym zbiorem elementów indywiduowych (elementy te będziemy także nazywać relacjami typu zero),

2° B_τ dla $\tau = (0, \ldots, 0)$ (n razy) jest dla każdego n, $n \geq 1$, danym zbiorem relacji n-członowych w B_0 (tj. zbiorem podzbiorów w $B_0 \times \ldots \times B_0$, n razy; każdy z tych podzbiorów nazwiemy relacją typu $(0, \ldots, 0)$),

3° jeżeli $B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}$, $n \geq 1$, są już zdefiniowanymi zbiorami relacji odpowiednio typów $\tau_1, \ldots, \tau_n$, to B_τ dla $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ jest danym zbiorem relacji n-członowych w produkcie $B_{\tau_1} \times \ldots \times B_{\tau_n}$ (tj. zbiorem podzbiorów w $B_{\tau_1} \times \ldots \times B_{\tau_n}$, z których każdy nazwiemy relacją typu $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$).

Zgodnie z powyższą definicją, dla każdego $\tau \in T$, zbiór B_τ jest zbiorem relacji typu τ, np. $B_{(0)}$ jest znanym zbiorem zbiorów elementów indywiduowych (ogólniej $B_{(\tau)}$ jest znanym zbiorem podzbiorów zbioru B_τ) a k-tą dziedzinę relacji typu $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $1 \leq k \leq n$, tworzą relacje typu τ_k. System $\mathfrak{M}$ zawiera tylko relacje określonego typu (zgodnie z tzw. zasadą czystości typów, por. np. [10], s. 214) tj. nie występują w nim takie obiekty jak

[1)] Rozdział ten zawiera ogólne wprowadzenie do analizy niestandardowej, niezbędne do zrozumienia lektury dalszej części pracy. Przedstawione tu podejście korzysta z pojęcia systemu relacyjnego i teorii typów, por. np. [2,7]; podejście alternatywne, teoriomnogościowe omówiono w [4] (por. także [13]).

np. zbiory utworzone z elementów indywiduowych i zbiorów tych elementów. Dla każdego $\tau \in T$ i $\tau \neq 0$, zbiór B_τ nie musi zawierać wszystkich relacji typu τ; w szczególności może być zbiorem pustym. System relacyjny zawierający wszystkie relacje wszystkich typów nazwiemy zupełnym; w systemie takim dla każdego $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ mamy $B_{\tau_1} \times \ldots \times B_{\tau_n} \in B_{(\tau_1, \ldots, \tau_n)}$, $n \geqslant 1$.

Niech $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$ będzie danym (niezupełnym) systemem relacyjnym oraz niech $(A_\tau)_{\tau \in T}$ będzie zupełnym systemem relacyjnym takim, że $A_0 = B_0$. Relacje należące do $A_\tau \setminus B_\tau$, $\tau \in T$, nazwiemy wtedy zewnętrznymi (względem $\mathfrak{M}$) a relacje należące do B_τ — relacjami wewnętrznymi (względem $\mathfrak{M}$). Zbiór wszystkich relacji wewnętrznych wszystkich typów oznaczymy przez M. Z definicji $A_0 \setminus B_0 = \emptyset$ tj. wszystkie relacje typu zero są wewnętrzne.

Celem opisu systemu relacyjnego $\mathfrak{M}$ wprowadzamy pewien język formalny L. Język ten zawiera, między innymi, zbiór symboli C, zwanych stałymi. Wprowadzając dowolne lecz ustalone i wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru M na pewien podzbiór zbioru C, stwierdzamy, że każda relacja systemu $\mathfrak{M}$ jest oznaczona przy pomocy pewnej stałej języka L. Prócz stałych język formalny zawiera też inne symbole (takie jak funktory zdaniotwórcze, kwantyfikatory, nawiasy, symbole do oznaczania zmiennych, etc.) przy pomocy których, w pewien określony sposób, budujemy formuły języka L. Spośród różnych formuł języka L interesować nas dalej będą jedynie formuły, które dotyczą systemu relacyjnego $\mathfrak{M}$; nazwiemy je zdaniami określonymi w systemie $\mathfrak{M}$. Każda taka formuła zawierać może więc jedynie te stałe języka L, które oznaczają pewne relacje systemu $\mathfrak{M}$; ponadto wszystkie symbole formuły oznaczające zmienne (jeśli występują) muszą być związane kwantyfikatorami. Każde zdanie określone w systemie $\mathfrak{M}$ może być w tym systemie prawdziwe lub fałszywe.

W dalszym ciągu założymy, że dany jest pewien zupełny system relacyjny $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$ oraz zbiór zdań języka L prawdziwych w tym systemie. Zbiór ten oznaczymy przez K, nazywając system $\mathfrak{M}$ modelem zbioru zdań K.

1.2. Modele niestandardowe. Niech teraz $^*\mathfrak{M} = (^*B_\tau)_{\tau \in T}$ będzie systemem relacyjnym różnym od $\mathfrak{M}$, którego zbiór wszystkich relacji $^*M$ został wzajemnie jednoznacznie odwzorowany na pewien podzbiór zbioru C stałych języka formalnego L (tj. języka wprowadzonego poprzednio do opisu systemu $\mathfrak{M}$). Jeżeli każde zdanie prawdziwe w $\mathfrak{M}$ jest jednocześnie prawdziwe w $^*\mathfrak{M}$ to system relacyjny $^*\mathfrak{M}$ nazwiemy niestandardowym modelem zbioru zdań K[2]. Łatwo zauważyć, że zbiór relacji M można zanurzyć w $^*M$; każdy bowiem element w M jest oznaczony przy pomocy pewnej stałej języka formalnego L, która jednocześnie oznacza pewien element w $^*M$. Relacje systemu $^*\mathfrak{M}$, które są oznaczone tymi samymi stałymi co pewne relacje systemu $\mathfrak{M}$, będziemy nazywać standardowymi. W dalszym ciągu zbiór relacji standardowych systemu $^*\mathfrak{M}$ będziemy oznaczać symbolem M, tj. symbolem oznaczającym zbiór relacji systemu $\mathfrak{M}$. Podobnie przez B_τ oznaczymy również zbiór relacji standardowych typu τ, będący podzbiorem zbioru $^*B_\tau$. Taka niejednoznaczność oznaczeń nie prowadzi do nieporozumień, gdyż zasadniczym przedmiotem rozważań jest dalej system relacyjny $^*\mathfrak{M}$. Zachodzi jednak pytanie, czy system $^*\mathfrak{M}$ zawiera także relacje nie standardowe. Pozytywna odpowiedź na to pytanie

[2] Podobnie każde zdanie prawdziwe w $^*\mathfrak{M}$ i określone w $\mathfrak{M}$ jest także prawdziwe w $\mathfrak{M}$.

jest związana z pojęciem tzw. relacji współbieżnych w systemie $\mathfrak{M}$. Relację $(R) \in B_\tau$, gdzie $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, nazywamy współbieżną (jest to więc relacja binarna) gdy dla każdego skończonego ciągu elementów $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathrm{dom}(R)$ istnieje element $b \in \mathrm{ran}\,(R)$[3] taki, że $(a_1, b) \in (R)$, $(a_2, b) \in (R)$, $\ldots$, $(a_m, b) \in (R)$. Każdej relacji współbieżnej w $\mathfrak{M}$ odpowiada relacja standardowa $(^*R)$ w $^*\mathfrak{M}$ (oznaczona w języku L są samą stałą). Można wykazać, że istnieje element $c \in \mathrm{ran}\,(^*R)$ spełniający warunek: $(^*a, c) \in (R)$ dla każdego $^*a \in \mathrm{dom}\,(R)$. Nie uzasadniając powyższego stwierdzenia (por. np. [2]) zauważmy, że relacja $\neq$ („nie równa się"), której dziedziną i przeciwdziedziną jest dowolny nieskończony zbiór B_{τ_1}, jest relacją współbieżną typu $\tau = (\tau_1, \tau_1)$ w systemie relacyjnym $\mathfrak{M}$. Tym samym istnieje element $c \in {}^*B_{\tau_1}$ taki, że $^*a \neq c$ dla każdego $^*a \in B_{\tau_1}$. Element c jest więc niestandardową relacją typu τ_1 w $^*\mathfrak{M}$. Wykazuje się także, że system relacyjny $^*\mathfrak{M}$, który nazwiemy rozszerzeniem zupełnego systemu $\mathfrak{M}$, jest niezupełny. Tym samym będziemy mieć dalej do czynienia z relacjami standardowymi (które są zawsze wewnętrzne), z relacjami wewnętrznymi niestandardowami oraz z relacjami zewnętrznymi (nie należącymi do $^*M$ lecz należącymi do pewnego zupełnego systemu relacyjnego, w którym $^*B_0$ jest zbiorem elementów indywiduowych). W szczególności każdy nieskończony zbiór B_τ jest relacją zewnętrzną typu (τ) (por. [6], s. 378).

W dwóch następnych podrozdziałach pracy podamy dwa proste przykłady ilustrujące rozważania ogólne naszkicowane powyżej. Zgodnie z tymi rozważaniami będziemy zakładać, że:

1° dany jest pewien zupełny system relacyjny $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$, w którym zbiór B_0 elementów indywiduowych jest nieskończony, wraz ze zbiorem zdań K prawdziwych w tym systemie (mówiąc poglądowo, jest to zbiór zdań „opisujących" system $\mathfrak{M}$),

2° istnieje system relacyjny niezupełny $^*\mathfrak{M} = (^*B_\tau)_{\tau \in T}$, będący rozszerzeniem systemu $\mathfrak{M}$ (tj. $B_\tau \subset {}^*B_\tau$ dla każdego $\tau \in T$), „opisywany" tym samym zbiorem zdań K co system $\mathfrak{M}$; każde zdanie prawdziwe w $\mathfrak{M}$ jest więc także prawdziwe w $^*\mathfrak{M}$ (jednakże przy zastrzeżeniu, że dotyczy ono wyłącznie relacji wewnętrznych względem $^*\mathfrak{M}$!),

3° w systemie $^*\mathfrak{M} = (^*B_\tau)_{\tau \in T}$ istnieją relacje wewnętrzne niestandardowe (tj. należące do $^*B_\tau \setminus B_\tau$), których istnienie wykazujemy tworząc relacje współbieżne w $\mathfrak{M}$.

Dowolną procedurę analityczną w ramach której wprowadzamy niestandardowy model $^*\mathfrak{M}$ zbioru zdań K (prawdziwych w pewnym systemie relacyjnym $\mathfrak{M}$) nazwiemy dalej analizą niestandardową.

1.3. Liczby rzeczywiste w analizie niestandardowej. Jako system relacyjny $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$ przyjmiemy teraz system zupełny w którym zbiorem B_0 elementów indywiduowych jest zbiór R liczb rzeczywistych. Przedmiotem rozważań będzie rozszerzenie $^*\mathfrak{M} = (^*B_\tau)_{\tau \in T}$ systemu $\mathfrak{M}$. Oznaczając $^*R \equiv {}^*B_0$, również elementy zbioru $^*R$ (tj. elementy indywiduowe systemu $^*\mathfrak{M}$) nazwiemy liczbami rzeczywistymi. Zgodnie z przyjętymi poprzednio założeniami mamy $R \subset {}^*R$, gdzie R jest teraz zbiorem standardowych liczb rzeczywistych. Są to liczby oznaczane w języku L tymi samymi stałymi co liczby rzeczywiste w $\mathfrak{M}$. Ponieważ relacja $<$ („mniejszy niż") w zbiorze R jest współbieżna, przeto istnieje liczba $a \in {}^*R$ taka, że $r < a$ dla każdego $r \in R$. Tym samym istnieje liczba rzeczywista większa od wszystkich standardowych liczb rzeczywistych. Podobnie wykazujemy, że istnieje

[3] Symbole dom (R), ran (R), oznaczają odpowiednio dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji (R).

liczba rzeczywista mniejsza od wszystkich standardowych liczb rzeczywistych. Liczby takie nazwiemy nieskończonymi. W zbiorze $*R$ są określone wszystkie te relacje, które są określone dla znanych w analizie liczb rzeczywistych. Są to relacje standardowe systemu $*\mathfrak{M}$. Tym samym dowolne elementy zbioru $*R$ można dodawać, mnożyć, i dzielić (za wyjątkiem dzielenia przez zero) otrzymując elementy zbioru $*R$. W szczególności istnieje liczba $\varepsilon = a^{-1}$, gdzie a jest liczbą nieskończoną; liczbę taką nazwiemy infinitezymalną. Łatwo wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb nieskończonych (zbiór $*R$ nie jest ograniczony gdyż nie jest ograniczony zbiór „klasycznych" liczb rzeczywistych) a więc istnieje także nieskończenie wiele liczb infinitezymalnych. Zbiór wszystkich liczb infinitezymalnych oznaczymy przez $\mu(0)$, $\mu(0) \subset *R$. Jeśli a jest dowolną lecz ustaloną liczbą rzeczywistą to przez $\mu(a)$ oznaczymy zbiór wszystkich liczb postaci $a+\varepsilon$, gdzie ε jest dowolną liczbą infinitezymalną; zbiór taki nazywamy monadą liczby a. Liczbę rzeczywistą, która nie jest nieskończona, nazwiemy skończoną. Można wykazać, że każda skończona liczba r daje się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $r = {}^0r+\varepsilon$, gdzie ${}^0r \in R$, $\varepsilon \in \mu(0)$. Liczbę standardową ${}^0r$ nazywamy wtedy częścią standardową liczby skończonej r. Łatwo wykazać, że nie istnieje w żadnej monadzie w $*R$ liczba najmniejsza lub największa. Podobnie liczby takie nie istnieją w zbiorach liczb nieskończonych dodatnich i ujemnych.

Zbiór liczb naturalnych jako podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, jest określony pewną relacją typu (0) w $\mathfrak{M}$. Ta sama relacja w $*\mathfrak{M}$ (będąca relacją standardową) określa w $*R$ podzbiór $*N$, którego elementy nazywamy w dalszym ciągu liczbami naturalnymi. Oznaczmy ponadto przez N zbiór liczb naturalnych w $*N$, którego elementy są oznaczane (w języku L) przy pomocy tych samych stałych co znane liczby naturalne. Elementy zbioru N, $N \subset *N$, nazwiemy standardowymi liczbami naturalnymi. Łatwo wykazać, że wszystkie niestandardowe liczby naturalne są nieskończone. Każdy zbiór postaci $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_k \in *B_\tau$, nazwiemy skończonym nawet, gdy n jest nieskończoną liczbą naturalną. Gdy n jest skończoną (a więc standardową) liczbą naturalną, ciąg ten nazwiemy S — skończonym (standardowo skończonym). Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich jest systemem niearchimedesowym w tym sensie, że nie dla każdych $a, b \in *R^+$ istnieje liczba naturalna skończona n taka, że $na > b$ (liczba n, występująca w definicji archimedesowego systemu wielkości, por. Wstęp, jest skończoną liczbą naturalną).

W powyższych rozważaniach pojawiają się w sposób naturalny takie podzbiory zbioru $*R$ jak $\mu(a)$, $*R \setminus R$, R, $*N \setminus N$, N. Jako zbiory elementów indywidualnych (relacji typu 0) są to więc relacje typu (0). Zachodzi pytanie, czy relacje te należą do $*M$, tj. czy są relacjami wewnętrznymi. Celem wykazania, że relacja $*N \setminus N$ jest zewnętrzna (tj. że zbiór nieskończonych liczb naturalnych nie należy do $*B_{(0)}$) weźmy pod uwagę zdanie „każdy nie pusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy". Zdanie to, jako prawdziwe w systemie relacyjnym $\mathfrak{M}$ (dla $B_0 = R$) jest także prawdziwe w jego rozszerzeniu $*\mathfrak{M}$ (gdzie $*B_0 = *R$). Z drugiej jednakże strony nie istnieje najmniejsza nieskończona liczba naturalna (gdyby n było taką liczbą, to $n-1$ byłoby liczbą skończoną, co nie jest prawdą). Tym samym zbiór $*N \setminus N$ jest relacją zewnętrzną. Podobnie zewnętrznymi są wszystkie powyżej wymienione podzbiory zbioru $*R$.

Dowody powyższych twierdzeń wraz z dokładnym omówieniem wprowadzonych pojęć a także niestandardowe ujęcie rachunku różniczkowego i całkowego jest tematem trzeciego rozdziału monografii Robinsona [2].

1.4. Przestrzenie metryczne w analizie niestandardowej. Przestrzenią metryczną nazywamy parę (T, ϱ) gdzie T jest pewną przestrzenią punktową a $\varrho\colon T\times T \to R$ jest funkcją, która każdej parze punktów x, $y \in T$ przyporządkowuje nieujemną liczbę $\varrho(x, y)$ (odległość punktów x, y), przy czym dla dowolnych x, y, $z \in T$ mamy: 1° $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, 2° $\varrho(x, y) = 0$ tylko gdy $x = y$, 3° $\varrho(x, y)+\varrho(y, z) \geqslant \varrho(x, z)$. Celem zastosowania analizy niestandardowej do teorii przestrzeni metrycznych wprowadzimy zupełny system relacyjny $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau\in T}$ w którym $T \subset B_0$ i $R \subset B_0$, tj. w którym przestrzeń T i zbiór R są relacjami typu (0). Relacje te są standardowymi relacjami w rozszerzeniu $^*\mathfrak{M} = (^*B_\tau)_{\tau\in T}$ systemu $\mathfrak{M}$. Tym samym $^*T \subset {}^*B_0$, $^*R \subset {}^*B_0$, gdzie własności zbioru $^*R$ liczb rzeczywistych zostały omówione w poprzednim rozdziale. Zbiór standardowych punktów przestrzeni $^*T$ oznaczymy przez T. Monadą dowolnego punktu $x \in {}^*T$ nazwiemy zbiór $\mu(x)$ punktów y takich, że $\varrho(x, y)$ jest liczbą infinitezymalną. Galaktyką dowolnego punktu $x \in {}^*T$ nazwiemy zbiór $G(x)$ punktów y, takich, że $\varrho(x, y)$ jest liczbą skończoną; wszystkie punkty standardowe należą oczywiście do jednej galaktyki, którą nazywamy główną.

Topologię w przestrzeni $^*T$, której bazą jest zbiór wszystkich kul $B(x, r)\colon = \{y|\varrho(x, y) < r\}$, $x \in {}^*T$, $r \in {}^*R^+$, nazywamy Q-topologią. W przestrzeni $^*T$ wprowadzimy także topologię, której bazą będzie zbiór tzw. S-kul, $S(x, r) := \{y|{}^0\varrho(x, y) < r\}$, $x \in {}^*T$, $r \in R^+$, o standardowych promieniach r (symbol $^0\varrho(x, y)$ oznacza część standardową skończonej odległości $\varrho(x, y)$ dowolnego punktu y kuli od jej środka x); wprowadzoną topologię nazywamy S-topologią (standardową topologią). Topologia ta odgrywa ważną rolę w zastosowaniach analizy niestandardowej w mechanice. Korzystając z S-topologii, dla dowolnego (wewnętrznego lub zewnętrznego) podzbioru D, $D \subset {}^*T$, wprowadzimy pojęcia jego S-wnętrza, S-domknięcia oraz S-brzegu. Dla zbiorów wewnętrznych można wykazać, że zbiory: $S\text{-int}D := \{x|\mu(x) \subset D\}$, $S\text{-clos}D := \{x|\mu(x) \cap D \neq \phi\}$ oraz $S\text{-bound}D := \{x|\mu(x) \cap D \neq \emptyset \wedge \mu(x) \cap ({}^*T\setminus D) \neq \emptyset\}$ są kolejno: S-wnętrzem, S-domknięciem i S-brzegiem zbioru wewnętrznego D.

Niech $(x_n)_{n\in {}^*N}$ będzie dowolnym ciągiem w $^*T$. Punkt $x \in {}^*T$ nazwiemy F-granicą tego ciągu gdy dla każdego $\varepsilon \in R^+$ istnieje $n_0 \in N$ takie, że $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_0$; w powyższej definicji ε, n_0 są liczbami standardowymi. Łatwo zauważyć, że gdy x jest F-granicą ciągu (x_n) to każdy punkt należący do monady $\mu(x)$ jest także F-granicą tego ciągu. W czwartym rozdziale tej pracy będziemy korzystać z następującego twierdzenia: eżeli x jest F-granicą ciągu wewnętrznego $(x_n)_{n\in {}^*N}$ w $^*T$, to istnieje nieskończona liczba naturalna λ, $\lambda \in {}^*N\setminus N$ taka, że odległość $\varrho(x, x_m)$ jest infinitezymalna dla wszystkich nieskończonych m spełniających warunek $m < \lambda$. Tym samym każdy punkt x_m gdzie $m < \lambda$ i $m \in {}^*N\setminus N$ jest F-granicą ciągu wewnętrznego $(x_n)_{n\in {}^*N}$.

Niech D będzie dowolnym podzbiorem w głównej galaktyce przestrzeni $^*T$; symbolem ^0D oznaczymy wtedy podzbiór $^*T$ zawarty w T (tj. złożony wyłącznie z punktów standardowych) zdefiniowany przez $^0D := \{x|x \in T \wedge \mu(x) \cap D \neq \emptyset\}$. Niech następnie $f\colon D \to {}^*R$ będzie funkcją o dziedzinie D, przyjmującą jedynie wartości skończone i taką, że dla każdego $x \in D$ mamy $f\big(\mu(x) \cap D\big) \subset \mu\big(f(x)\big)$. Tym samym dla każdego $x \in D$ istnieje dokładnie jeden punkt $^0x \in {}^0D$ oraz dla każdego $f(x)$, $x \in D$, istnieje dokładnie jedna liczba standardowa y, $y \in R$, dana przez $y = {}^0f(x)$ (tj. będąca częścią standardową liczby $f(x)$) i taka sama dla wszystkich $x \in \mu(^0x) \cap D$. Przyjmując $^0y \equiv {}^0f(^0x)$ dla każdego $^0x \in {}^0D$, zdefiniujemy funkcję ${}^0f\colon {}^0D \to R$. Funkcję tę nazywamy częścią standardową funkcji $f\colon D \to {}^*R$. Można wykazać, że gdy funkcja $f\colon D \to {}^*R$ jest zdefiniowana i S-ciągła (tj. ciągła w S-topologii) na wewnętrznym zbiorze D, to jej część standardowa ${}^0f$ jest jednostajnie ciągła na ${}^0D$. Gdy D jest zbiorem wewnętrznym w ${}^*T$ to ${}^0D$ jest zbiorem domkniętym w T. Szersze omówienie wprowadzonych tu pojęć oraz dowody powyższych twierdzeń można znaleźć w czwartym rozdziale monografii A. ROBINSONA [2].

2. Niestandardowy model mechaniki Newtona.

2.1. Analiza niestandardowa a mechanika. Analiza niestandardowa w matematyce znajduje zastosowanie jako metoda dowodzenia „standardowych" twierdzeń; celem wykazania prawdziwości pewnego zdania w systemie relacyjnym $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$ wystarczy wykazać jego prawdziwość w systemie rozszerzonym ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*B_\tau)_{\tau \in T}$ co zwykle zdecydowanie upraszcza dowód. Niezależnie od znaczenia analizy niestandardowej jako metody dowodzenia „standardowych" twierdzeń, przedmiotem badań mogą być rozszerzone systemy ${}^*\mathfrak{M}$. Traktując mechanikę Newtona jako pewien fragment matematyki sformułujmy ją w postaci zbioru zdań prawdziwych w pewnym zupełnym systemie relacyjnym $\mathfrak{M} = (B_\tau)_{\tau \in T}$. Tym samym relacje mechaniki Newtona zanurzymy w zbiorze M relacji systemu $\mathfrak{M}$. Pojęcia pierwotne mechaniki będą odgrywać rolę elementów indywiduowych (relacji typu zero) a prawa i twierdzenia mechaniki będą zdaniami prawdziwymi w systemie relacyjnym $\mathfrak{M}$. Wprowadzając następnie rozszerzenie ${}^*\mathfrak{M} = ({}^*B_\tau)_{\tau \in T}$ systemu $\mathfrak{M}$ będziemy rozpatrywać mechanikę w ramach analizy niestandardowej w podobny sposób, jak w poprzednim rozdziale w ramach analizy niestandardowej były badane niektóre elementy teorii przestrzeni metrycznych. Wszystkie prawa i twierdzenia mechaniki nie zmieniają przy tym swej postaci będąc zdaniami prawdziwymi w systemie rozszerzonym ${}^*\mathfrak{M}$. Mówiąc poglądowo, procedura taka nie zmienia treści samej mechaniki lecz wyraża tą treść przy pomocy bardziej bogatego aparatu analitycznego. Nawiązując do uwag przedstawionych we wstępie łatwo zauważyć, że zastosowanie analizy niestandardowej pozwoli na jednoczesne rozpatrywanie w mechanice wielkości „różnego rzędu" (skończonych i nieskończonych); konsekwencją tego będzie, między innymi, nowa interpretacja więzów w mechanice Newtona oraz możliwość otrzymania „standardowych" równań mechaniki kontinuum jako przypadku szczególnego mechaniki skończonych (lecz niestandardowych) układów punktów materialnych.

Przydatność mechaniki do opisu pewnych zjawisk przyrody rozstrzyga doświadczenie. Tym samym wartościom liczbowym uzyskanym z teorii winny odpowiadać zbliżone do nich wartości liczbowe uzyskane w rezultacie pomiarów badanego zjawiska. Ponieważ wartości pomiarowe są liczbami wymiernymi „standardowymi", przeto tylko liczby standardowe, uzyskane z teorii korzystającej z aparatu niestandardowej analizy, mogą służyć za podstawę weryfikowania przydatności teorii do opisu badanego zjawiska. Nie oznacza to jednak, że wielkości niestandardowe, występujące w niestandardowym modelu mechaniki Newtona, nie mają jasnej interpretacji fizycznej. Jak wykażemy w dalszych rozważaniach, zastosowanie aparatu analizy niestandardowej umożliwia głębszy i pełniejszy opis analityczny pewnej klasy zjawisk fizycznych, dostarczając nowych modeli matematycznych tych zjawisk.[4)]

2.2. Podstawowe relacje mechaniki Newtona. Mechnikę Newtona punktu materialnego będziemy rozpatrywać najpierw w ramach pewnego zupełnego systemu relacyjnego $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$. Przyjmiemy w tym celu, że zbiór A_0 elementów indywiduowych zawiera jako podzbiory następujące przestrzenie nieskończenie elementowe:

1° czterowymiarową rozmaitość różniczkową E, będącą przestrzenią zdarzeń p, $p \in E$,

2° czterowymiarową przestrzeń wektorową V, będącą przestrzenią translacji czasoprzestrzennych $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \in V$,

3° przestrzeń $\mathcal{M}$, której elementy nazwiemy punktami materialnymi P, $P \in \mathcal{M}$,

4° trójwymiarową przestrzeń wektorową F, której elementy nazwiemy siłami f, $f \in F$,

5° zbiór liczb rzeczywistych R.

Wymienione powyżej elementy indywiduowe $p, \boldsymbol{v}, P, f$ systemu $\mathfrak{M}$ interpretujemy jako pojęcia pierwotne mechaniki; ich zbiory E, V, $\mathcal{M}$, F oraz zbiór R są relacjami typu (0), tj. $E, V, \mathcal{M}, F, R \in A_{(0)}$.

Zgodnie ze znanymi aksjomatami odnośnie czasu i przestrzeni w mechanice Newtona (por. np. [11]) wprowadzimy jako relację typu (0) podzbiór S, $S \subset V$, który interpretujemy jako trójwymiarową przestrzeń wektorową translacji czystoprzestrzennych. Ponadto wprowadzimy relację typu $(0, 0, 0)$, daną funkcją $g: E \times V \to E$ przyjmując, że V działa w E jako abelowa grupa translacji, tranzytywnie i swobodnie. Podzbiory $E_p \equiv \{p\} + S$ w E interpretujemy, dla dowolnego $p \in E$, jako przestrzenie zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem p (przestrzenie zdarzeń równoczesnych). Wektory należące do $V \setminus S$ nazywamy wektorami czasowymi.

W mechanice Newtona możemy posługiwać się różnymi układami jednostek fizycznych przy pomocy których wyrażamy długości przedziałów czasowych, odległości czystoprzestrzenne, wielkości sił oraz masy punktów materialnych. W związku z tym wyróżnimy następujące zbiory relacji:

1° Zbiór $T \in A_{((0,0))}$, gdzie elementami zbioru T są formy liniowe $\tau: V \to R$, spełniające warunek $\operatorname{Ker} \tau = S$ (tj. $\tau(\boldsymbol{u}) = 0$ dla każdego $\tau \in T$ oraz $\boldsymbol{u} \in S$) przy czym dla każdej pary $\tau_1, \tau_2 \in T$ istnieje $\Theta \in R$, $\Theta \neq 0$, takie, że $\tau_1 = \Theta \tau_2$. Zbiór T nazwiemy przestrzenią form czasowych a $\tau(p-q)$ nazwiemy odległością zdarzeń $p, q \in E$ w formie czasowej τ, $\tau \in T$.

2° Zbiór $H \in A_{((0,0,0))}$, gdzie elementami zbioru H są iloczyny skalarowe $h: S \times S \to R$, przy czym dla każdej pary $h_1, h_2 \in H$ istnieje $\varepsilon \in R^+$ takie, że $h_1 = \varepsilon^2 h_2$[5)]. Dowolny element h, $h \in H$, nadaje przestrzeniom zdarzeń równoczesnych E_p strukturę przestrzeni

---

[4)] Zauważmy także, że ograniczenie wielkości stosowanych w teorii fizycznej do wielkości „pomiarowych", które są liczbami wymiernymi, oznaczałoby rezygnację nie tylko z aparatu analizy niestandardowej lecz także z klasycznego rachunku różniczkowego.

[5)] Zmiana iloczynu skalarowego $h_1 \to h_2$ nie zmienia kątów między dowolnymi wektorami u, $w \in S$ lecz jedynie ich długość:

$$\frac{h_1(u, w)}{\sqrt{h_1(u, u) h_1(w, w)}} = \frac{h_2(u, w)}{\sqrt{h_2(u, u) h_2(w, w)}}, \qquad h_1(u, u) \to h_2(u, u).$$

metrycznych (E_p, ϱ); liczbę $\varrho(x, y) = \sqrt{h(x-y, x-y)}$, $x, y \in E_p$, nazwiemy odległością zdarzeń równoczesnych $x, y \in E_p$ w metryce określonej iloczynem skalarowym h, $h \in H$.

3° Zbiór $\Phi \in A_{((0,0,0))}$, gdzie elementami zbioru Φ są iloczyny skalarowe $\varphi: F \times F \to R$, przy czym dla każdej pary $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ istnieje $\alpha \in R^+$ takie, że $\varphi_1 = \alpha\varphi_2$. Iloczyn ten określa kąty między siłami $f_1, f_2 \in F$ niezależnie od wyboru funkcji φ, natomiast wielkości sił $|f| = \sqrt{\varphi(f, f)}$ w zależności od wyboru funkcji φ, $\varphi \in \Phi$.

4° Zbiór $M \in A_{((0,0))}$, gdzie elementami zbioru M są odwzorowania $m: \mathcal{M} \to R^+$, przy czym dla każdej pary $m_1, m_2 \in M$ oraz każdej pary $P, Q \in \mathcal{M}$ mamy $m_1(P)/m_1(Q) = m_2(P)/m_2(Q)$. Liczbę $m(P)$ nazywamy masą punktu materialnego dla przyjętej miary m, $m \in M$. Dla każdej pary $m_1, m_2 \in M$ istnieje $\mu > 0$ takie, że $m_1 = \mu m_2$.

Układ elementów indywiduowych $e_i \in S$, $a_i \in F$, $e_0 \in V \setminus S$, $P_0 \in \mathcal{M}$ taki, że dla przyjętych $(\tau, h, \varphi, m) \in T \times H \times \Phi \times M$ mamy $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\varphi(a_i, a_j) = \delta_{ij}$, $\tau(e_0) = 1$, $m(P_0) = 1$ (wyznacza on ortonormalne bazy wektorowe w S i F) nazwiemy układem odniesienia dla (τ, h, φ, m)[6].

Przedmiotem rozważań mechaniki są pewne skończone zbiory punktów materialnych, które dalej będziemy nazywać ciałami. Celem wprowadzenia do rozważań pojęcia ciała oznaczymy przez $\mathcal{U}$ relację typu $((0))$, $\mathcal{U} \in A_{((0))}$, przyjmując, że $\mathcal{U}$ jest podzbiorem zbioru $2^{\mathcal{M}}$ zawierającym skończenie elementowe podzbiory zbioru $\mathcal{M}$. Relację $\mathcal{U}$ nazwiemy uniwersum materialnym (por. np. [12], rozdział 1) a jej elementy nazwiemy ciałami. Każde ciało w mechanice Newtona jest więc skończonym zbiorem $\mathcal{B}$ punktów materialnych, $\mathcal{B} = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$[7]. Niech I, $I \subset R$, będzie pewnym przedziałem liczbowym. Odwzorowania

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{B} \times I \ni (P, t) \to p_0 + te_0 + r^k(P, t)e_k \in E,\\ &\mathcal{B} \times I \ni (P, t) \to f^k(P, t)a_k \in F, \end{aligned}$$

gdzie p_0 jest dowolnym lecz ustalonym zdarzeniem, $p_0 \in E$, a funkcje $r^k(P, \cdot)$, $f^k(P, \cdot)$, spełniają znane warunki regularności, nazywamy odpowiednio ruchem i rozkładem sił dla ciała $\mathcal{B}$ w przedziale czasu I, $I \subset R$.

Własności dowolnego ciała $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$, opiszemy dalej dwoma aksjomatami. Po pierwsze postulujemy, że istnieją takie układy odniesienia (zwane inercyjnymi) w których relacja między ruchem $(2.1)_1$ a rozkładem sił $(2.2)_2$ dla dowolnego ciała $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$ ma postać

$$(2.5)\qquad m(P)\ddot{r}^k(P, t) = f^k(P, t), \quad P \in \mathcal{B}, \quad t \in I.$$

Po drugie postulujemy, że dla każdego ciała $\mathcal{B}$ wypadkowa siła $f(P, t) = f^k(P, t)a_k$, działająca na dowolny punkt $P \in \mathcal{B}$ w dowolnej chwili $t \in I$ jest określona wyrażeniem analitycznym postaci[8]

$$(2.3)\qquad f^k(P, t) = \hat{f}^k_P(t, r(P, t), \dot{r}(P, t)) + \sum_{Q \in \mathcal{B} \setminus \{P\}} \check{f}_{PQ}\big(\varrho(r(P, t), r(Q, t))\big) \frac{r^k(P, t) - r^k(Q, t)}{\varrho\big(r(P, t), r(Q, t)\big)}, \quad P \in \mathcal{B},$$

[6] Wskaźniki i, j, k przebiegają tu i dalej ciąg 1, 2, 3.

[7] Założymy także, że dla każdego naturalnego n istnieją ciała n-elementowe, $\mathcal{B} = \{P_1, \ldots, P_n\}$, oraz, że podzbiory $\mathcal{B}$ należące do uniwersum materialnego $\mathcal{U}$ są rozłączne (por. także uwagę po wzorze).

[8] Tu i dalej oznaczamy: $r \equiv (r^1, r^2, r^3)$, $\dot{r} \equiv (\dot{r}^1, \dot{r}^2, \dot{r}^3)$, $\varrho = (r_1, r_2) \equiv \sqrt{h(r_1 - r_2, r_1 - r_2)}$ i zakładamy $r(P, t) \neq r(Q, t)$ dla każdego $P \neq Q$, $t \in I$.

w którym $\hat{f}^k_P(\cdot)$ oraz $\check{f}_{PQ}(\cdot) = \check{f}_{QP}(\cdot)$ są znanymi dla każdego ciała $\mathscr{B}$ i dostatecznie regularnymi funkcjami. Jednocześnie zakładamy, że dla dowolnych $P, Q \in \mathscr{B}$ istnieje ciąg punktów $P_0 = P, P_1, \ldots, P_k = Q$ należących do $\mathscr{B}$ i taki, że $\check{f}_{P_i P_{i+1}}(\cdot) \not\equiv 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Tym samym dla każdych $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \in \mathscr{U}$, $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$, mamy $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$. Wartość funkcji $\hat{f}^k_P(t, \cdot) a_k$ jest wypadkową sił zewnętrznych działających na punkt P w chwili t, wartość funkcji $\check{f}_{PQ}(\cdot)$ jest wielkością oddziaływania punktu Q na punkt P w ciele $\mathscr{B}$.

Równania (2.2) i (2.3) przedstawiają relacje, należące do systemu $\mathfrak{M}$, będące ograniczeniami narzuconymi na ruch i rozkład sił dla dowolnego ciała $\mathscr{B} \in \mathscr{U}$; po wyrugowaniu funkcji $f^k(P, t)$ otrzymamy równania Newtona tego ciała. W powyższym sformułowaniu podstaw mechaniki Newtona (w którym obowiązują zależności (2.3)) mamy więc do czynienia wyłącznie z ciałami swobodnymi. Uniwersum materialne $\mathscr{U}$ jest zbiorem ciał swobodnych. Mechanikę Newtona tych ciał będziemy natomiast traktować jako zbiór zdań pewnego języka formalnego L, prawdziwych w systemie relacyjnym $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$.

2.3. Niestandardowa interpretacja czasoprzestrzeni Galileusza. Niech teraz system relacyjny $^*\mathfrak{M} = (^*A_\tau)_{\tau \in T}$ będzie rozszerzeniem systemu relacyjnego $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau \in T}$, zawierającego relacje mechaniki Newtona dla swobodnych skończonych układów punktów materialnych. Tym samym zbiór elementów indywiduowych $^*A_0$ zawiera w sobie przestrzeń zdarzeń $^*E$, przestrzeń translacji czasoprzestrzennych $^*V$, przestrzeń materialną $^*\mathscr{M}$, przestrzeń sił $^*F$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $^*R$. Wszystkie relacje wymienione w poprzednim podrozdziale są relacjami standardowymi systemu $^*\mathfrak{M}$ i będą oznaczane tymi samymi symbolami co poprzednio, poprzedzonymi gwiazdką.

Niestandardowa interpretacja czasoprzestrzeni Galileusza wykorzystuje relacje $^*E$, $^*V$, g, $^*T$, $^*H$, $^*R$, gdzie odwzorowania $g\colon {}^*E \times {}^*V \to {}^*E$ oraz $\tau\colon {}^*V \to {}^*R$, $h\colon {}^*V \times {}^*V \to {}^*R$, $\tau \in {}^*T$, $h \in {}^*H$, mają te same własności co poprzednio. Przestrzeń wektorową translacji czysto przestrzennych $^*S$ możemy zdefiniować jako $^*S := \{u | \tau(u) = 0\}$. Ponieważ dla każdej pary form czasowych $\tau_1, \tau_2 \in {}^*T$ istnieje $\alpha \in {}^*R$, $\alpha \neq 0$, takie, że $\tau_1 = \alpha\tau_2$, przeto definicja przestrzeni $^*S$ nie zależy od wyboru formy τ. W zbiorze zdarzeń $^*E$ wyróżnimy podzbiór zdarzeń standardowych E, $E \subset {}^*E$, podobnie w przestrzeni translacji $^*V$ wyróżnimy zbiór translacji standardowych V, $V \subset {}^*V$.

Jeżeli $\boldsymbol{v}$ jest translacją standardową, tj. $\boldsymbol{v} \in V$, to każdą translację $'\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, gdzie λ jest dowolną liczbą infinitezymalną, $\lambda \in \mu(0)$, nazwiemy translacją infinitezymalną. Zbiór wszystkich translacji infinitezymalnych oznaczymy przez $\mu_V(0)$; tworzą one podgrupę translacji zbioru zdarzeń $^*E$. Tym samym każdemu zdarzeniu $x \in {}^*E$ możemy przyporządkować monadę tego zdarzenia $\mu_E(x)$, kładąc $\mu_E(x) := \{y | y = x + {}'\boldsymbol{v},\ {}'\boldsymbol{v} \in \mu_V(0)\}$. Dowolną translację postaci $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + {}'\boldsymbol{v}$, gdzie $\boldsymbol{v}_0 \in V$, $'\boldsymbol{v} \in \mu_V(0)$, nazwiemy skończoną, oznaczając przez $G_V(0)$ zbiór tych translacji. Niech $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x - y \in G_V(0)$. Relacja $\sim$ jest w $^*E$ relacją równoważności i dzieli przestrzeń zdarzeń $^*E$ na rozłączne podzbiory $G_E(x)$, które nazwiemy galaktykami zdarzeń. Galaktykę zdarzeń do której należą wszystkie zdarzenia standardowe nazwiemy galaktyką główną.

Zbiór $\mu_S(0) \equiv \mu_V(0) \cap {}^*S$ nazwiemy zbiorem przestrzennych translacji infinitezymalnych, natomiast zbiór $G_S(0) \equiv G_V(0) \cap {}^*S$ nazwiemy zbiorem przestrzennych translacji skończonych. Zachodzi $\mu_S(0) \subset G_S(0)$, przy czym każdą przestrzenną translację, która nie jest skończona nazwiemy nieskończoną. Niech $x, y \in {}^*E$. Niech $x \simeq y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x-y \in \mu_S(0)$. Relacja $\simeq$ jest relacją równoważności i dzieli zbiór zdarzeń ${}^*E$ na rozłączne podzbiory, które nazwiemy przestrzennymi monadami. Zdarzenia należące do tej samej przestrzennej monady (są to zdarzenia równoczesne) nazwiemy nieskończenie bliskimi. Podobnie relacja $\sim$, gdzie teraz $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x-y \in G_S(0)$, dzieli zbiór ${}^*E$ na rozłączne podzbiory, które nazwiemy przestrzennymi galaktykami. Zdarzenia należące do tej samej przestrzennej galaktyki (są to także zdarzenia równoczesne) nazwiemy skończenie przestrzennie odległymi. Zdarzenia równoczesne należące do różnych przestrzennych galaktyk nazwiemy nieskończenie przestrzennie odległymi.

Niech ${}^*E_x$ będzie przestrzenią wszystkich zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem $x \in {}^*E$, ${}^*E_x := \{y | y = x+\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \in {}^*S\}$. Każdy zbiór $\mu_E({}^*E_x) := \{y | y \in \mu\ (z),\ z \in {}^*E_x\}$, nazwiemy zbiorem zdarzeń prawie równoczesnych; każda para zdarzeń równoczesnych jest więc też parą zdarzeń prawie równoczesnych. Każdy zbiór $G_E({}^*E_x) := \{y | y \in G_E(z),\ z \in {}^*E_x\}$ nazwiemy zbiorem zdarzeń skończenie odległych w czasie. Zdarzenia, które nie są skończenie odległe w czasie nazwiemy nieskończenie odległymi w czasie.

Niech τ, h będą dowolnymi lecz ustalonymi elementami standardowymi z ${}^*T$, ${}^*H$, odpowiednio, tj. niech $\tau \in T$, $h \in H$. Wtedy zdarzenia $x, y \in {}^*E$ są prawie równoczesne gdy $\tau(x-y) \in \mu(0)$, natomiast są one skończenie odległe w czasie gdy $\tau(x-y) \in G(0)$. Podobnie zdarzenia równoczesne $x, y \in {}^*E$ należą do jednej przestrzennej monady gdy $h(x-y, x-y) \in \in \mu(0)$ natomiast należą do tej samej przestrzennej galaktyki gdy $h(x-y, x-y) \in G(0)$. Powyższe warunki są konieczne i wystarczające. Oznaczając przez $\varrho(x, y) = \sqrt{h(x-y, x-y)}$ odległość zdarzeń równoczesnych x, y, mamy $\varrho(x, y) \in \mu(0)$ dla zdarzeń równoczesnych należących do tej samej monady (x, y są wtedy zdarzeniami nieskończenie bliskimi) oraz $\varrho(x, y) \in G(0)$ dla zdarzeń równoczesnych należących do tej samej galaktyki (x, y są wtedy zdarzeniami skończenie przestrzennie odległymi).

Oznaczmy przez ${}^0\tau(\boldsymbol{v})$ i ${}^0h(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ części standardowe liczb $\tau(\boldsymbol{v})$, $h(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ dla dowolnych $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in G_V(0)$. Odwzorowania ${}^0\tau\colon G_V(0) \to R$, ${}^0h\colon G_V(0) \times G_V(0) \to R$, nazwiemy odpowiednio S-miarą czasową i S-miarą przestrzenną.[8] S-miara czasowa przyporządkowuje każdej parze zdarzeń (x, y) skończenie odległych w czasie, $y \in G_E({}^*E_x)$, liczbę standardową ${}^0\tau(y-x)$, którą nazwiemy S-upływem czasu od zdarzenia x do zdarzenia y mierzonym w τ. S-upływ czasu pomiędzy zdarzeniami prawie równoczesnymi jest równy zero. S-miara przestrzenna przyporządkowuje każdym dwóm zdarzeniom skończenie przestrzennie odległym (a więc równoczesnym) liczbę standardową ${}^0\varrho(x, y) = \sqrt{{}^0h(y-x, y-x)}$, którą nazwiemy S-odległością przestrzenną tych zdarzeń mierzoną w h. S-odległość zdarzeń nieskończenie bliskich jest równa zeru. Dla zdarzeń nieskończenie odległych w czasie S-upływ czasu nie jest określony, podobnie jak dla zdarzeń nieskończenie przestrzennie odległych nie jest określona ich S-odległość. Zbiory S-miar czasowych i przestrzennych oznaczymy odpowiednio przez ${}^0T$, ${}^0H$. Dla każdej pary ${}^0\tau_1, {}^0\tau_2 \in {}^0T$ istnieje niezerowa liczba standardowa α taka, że ${}^0\tau_1 = \alpha{}^0\tau_2$. Podobnie dla każdej pary ${}^0h_1, {}^0h_2 \in {}^0H$ istnieje dodatnia liczba standardowa β taka, że ${}^0h_1 = \beta{}^0h_2$.

Zgodnie z własnościami S-miar ${}^0\tau$, ${}^0h$, zdarzenia prawie równoczesne będziemy interpretować jako zdarzenia, których nie można rozróżnić przy pomocy będących do naszej

[8] Litera „S" oznacza, że wartości tych form są liczbami standardowymi.

dyspozycji środków pomiaru czasu; podobnie zdarzenia nieskończenie bliskie i równoczesne interpretujemy jako zdarzenia, których nie można rozróżnić przy pomocy stojących do naszej dyspozycji środków pomiaru odległości. Zdarzenia nieskończenie odległe w czasie (nieskończenie odległe w przestrzeni) będziemy natomiast interpretować jako zdarzenia, upływ czasu (odległość) między którymi, z uwagi na ograniczoność środków pomiarowych, również nie podlega pomiarowi. Tym samym, korzystając z aparatu analizy niestandardowej, możemy mówić o pewnej skali rozpatrywanego zjawiska, rozróżniając w nim wielkości „różnego rzędu". W powyższych rozważaniach formy τ, h (na podstawie których utworzyliśmy S-miary τ^0, h^0) były dowolne lecz standardowe, $\tau \in T \subset {}^*T$, $h \in H \subset {}^*H$. Celem opisu przy pomocy liczb standardowych upływów czasu i odległości „nieskończenie małych" i „nieskończenie wielkich", należy wprowadzić odpowiednie niestandardowe formy czasowe $\tau \in {}^*T \setminus T$ i przestrzenne $h \in {}^*H \setminus H$; przypadki takie będą rozpatrzone w osobnej pracy.

2.4. Niestandardowa interpretacja równań Newtona. Uniwersum materialne ${}^*\mathcal{U}$ jest podzbiorem zbioru $2^{{}^*\mathcal{M}}$ (gdzie ${}^*\mathcal{M}$ jest przestrzenią punktów materialnych) zawierającym skończenie elementowe rozłączne podzbiory zbioru ${}^*\mathcal{M}$ zwane ciałami. Ponadto dla każdego $m \in {}^*N$ istnieje ciało $\mathcal{B} = \{P_1, \ldots, P_m\}$, $\mathcal{B} \in {}^*\mathcal{U}$, zawierające dokładnie m punktów materialnych. Gdy m jest liczbą naturalną nieskończoną, $m \in {}^*N \setminus N$, mamy do czynienia z ciałem niestandardowym (zbiór $\mathcal{B}$ jest wtedy również zbiorem skończonym por. 1.3). Rozkład masy w ciele $\mathcal{B}$ opiszemy wykorzystując dowolną miarę $m \in {}^*M$, $m: {}^*\mathcal{M} \to {}^*R^+$. Oznaczając ten rozkład symbolem $m_{\mathcal{B}}$, mamy $m_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \ni P \to m(P) \in {}^*R^+$, Jeżeli punkt materialny P jest punktem standardowym, $P \in \mathcal{M}$, to jego masa $m(P)$ wyrażona w dowolnej standardowej mierze $m \in M \subset {}^*M$ jest liczbą standardową; stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Niech h i φ będą dowolnymi ustalonymi elementami standardowymi odpowiednio w ${}^*H$, ${}^*\Phi$ tj. $h \in H \subset {}^*H$, $\varphi \in \Phi \subset {}^*\Phi$. Niech ponadto elementy $\mathbf{e}_i \in {}^*S$, $\mathbf{a}_i \in {}^*F$, $i = 1, 2, 3$, tworzą ortonormalne bazy wektorowe odpowiednio w ${}^*S$, ${}^*F$, tj. niech $h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, $\varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$. Ruch i rozkład sił dla ciała $\mathcal{B}$ w pewnym przedziale czasu I, $I \subset {}^*R$, jest wtedy dany odwzorowaniami postaci (2.1). Dla danego zdarzenia $p_0 \in {}^*E$ i wektora $\mathbf{e}_0 \in {}^*V \setminus {}^*S$ (o których założymy, że są standardowe), mamy wtedy

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B} \times I \ni (P, t) \to p_0 + t\mathbf{e}_0 + r^k(P, t)\mathbf{e}_k \in {}^*E, \\
&\mathcal{B} \times I \ni (P, t) \to f^k(P, t)\mathbf{a}_k \in {}^*F,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

przy czym funkcje $r^k(P, \cdot): I \to {}^*R, f^k(P, \cdot): I \to {}^*R$, $k = 1, 2, 3$, są funkcjami wewnętrznymi (mogącymi przyjmować takie wartości niestandardowe) spełniającymi znane warunki regularności[9].

Niech teraz układ standardowych elementów indywiduowych $\mathbf{e}_i \in {}^*S$, $\mathbf{a}_i \in {}^*F$, $\mathbf{e}_0 \in {}^*V \setminus {}^*S$, $P_0 \in \mathcal{M}$, będzie ineracyjnym układem odniesienia dla standardowych form h, φ, τ oraz standardowej funkcji rozkładu masy[10]. Obowiązuje wtedy postać (2.2)

[9] Aby nie wprowadzać dodatkowych oznaczeń, elementy indywiduowe i relacje należące do systemu ${}^*\mathfrak{M}$, występujące w (2.4) i w dalszych wzorach, oznaczyliśmy tymi samymi symbolami co relacje należące do $\mathfrak{M}$ i występujące w (2.1) - (2.3).

[10] Z założenia tego w ostatnim rozdziale pracy zrezygnujemy, wprowadzając do rozważań także niestandardowe elementy z ${}^*H$, ${}^*\Phi$, ${}^*T$, ${}^*M$.

drugiego prawa dynamiki Newtona, przy czym występujące w (2.2) funkcje są teraz wewnętrzne lecz nie koniecznie standardowe. Rozpatrując wyłącznie ciała swobodne (uniwersum materialne $^*\mathcal{U}$ składa się tylko z takich ciał, por. poprzedni podrozdział) przyjmiemy, że wypadkowe siły działające na punkty materialne ciała są określone wyrażeniem postaci (2.3). Tym samym przyjmiemy, że

$$(2.5)\quad m(P)\ddot{r}^k(P,t) = \hat{f}_P^k(t, r(P,t), \dot{r}(P,t)) + \\ + \sum_{Q\in\mathcal{B}\setminus\{P\}} \check{f}_{PQ}\big(\varrho(r(P,t), r(Q,t))\big)\frac{r^k(P,t)-r^k(Q,t)}{\varrho\big(r(P,t), r(Q,t)\big)},\quad P\in\mathcal{B}\equiv\{P_1,\ldots,P_n\},\\ t\in I,$$

gdzie $\hat{f}_P^k(\cdot)$, $\check{f}_{PQ}(\cdot)$ są znanymi, dostatecznie regularnymi, funkcjami wewnętrznymi, przy czym obowiązują nadal uwagi wymienione po wzorze (2.3). Układ $3n$ równań (2.5) (gdyż $k = 1, 2, 3$ oraz $\mathcal{B} = \{P_1, \ldots, P_n\}$), który nazwiemy równaniami ruchu, jest układem równań różniczkowych zwyczajnych dla $3n$ funkcji wewnętrznych $r^k(P, \cdot): I \to {}^*R$, określających ruch ciała $\mathcal{B}$ z uniwersum materialnego $^*\mathcal{U}$, $\mathcal{B} \in {}^*\mathcal{U}$. Wszystkie funkcje występujące w (2.5) mogą przyjmować dowolne wartości z rozszerzonego (niearchimedesowego) zbioru liczb rzeczywistych, tj. mogą przyjmować także wartości infinitezymalne i nieskończone. Liczba n punktów materialnych ciała $\mathcal{B}$ może być ponadto liczbą nieskończoną, $n \in {}^*N\setminus N$.

Równania ruchu (2.5) przedstawiają pewną relację należącą do systemu relacyjnego $^*\mathfrak{M} = (^*A_\tau)_{\tau\in T}$, tj. relację wewnętrzną względem $^*\mathfrak{M}$. Tym samym wszystkie funkcje występujące w (2.5) są wewnętrzne (por. [2], s. 49). Relacja ta nie jest nowym postulatem mechaniki Newtona (dla swobodnych układów punktów materialnych) lecz jest niestandardową interpretacją równań Newtona tj. postacią równań Newtona w systemie rozszerzonym $^*\mathfrak{M}$. Traktując bowiem wszystkie postulaty mechaniki Newtona jako zdania języka formalnego L prawdziwe w systemie relacyjnym zupełnym $\mathfrak{M} = (A_\tau)_{\tau\in T}$ i zakładając, że system relacyjny $^*\mathfrak{M} = (^*A_\tau)_{\tau\in T}$ jest rozszerzeniem niestandardowym systemu $\mathfrak{M}$, otrzymujemy odrazu prawdziwość tych zdań w systemie $^*\mathfrak{M}$. Należy zauważyć, że nie zachodzi tu konieczność przedstawiania *explicite* postulatów mechaniki w postaci pewnych zdań języka formalnego (prawdziwych w $\mathfrak{M}$) lecz ważna jest jedynie możliwość takiego przedstawienia (por. [2], s. 60). Należy także pamiętać, że wszystkie znane twierdzenia analizy dotyczące układów równań różniczkowych zwyczajnych wynikających z (2.2) i (2.3) są nadal prawdziwe dla układów równań różniczkowych określonych relacją wewnętrzną postaci (2.5). Twierdzenia te można bowiem sformułować w języku formalnym L jako zdania prawdziwe w systemie relacyjnym $\mathfrak{M}$, tym samym pozostają one również prawdziwe w systemie rozszerzonym $^*\mathfrak{M}$. Zapewnia to istnienie rozwiązań układu (2.5) (przy spełnieniu znanych założeń regularności) także w przypadku gdy, funkcje występujące w (2.5) są wewnętrzne lecz nie są standardowe oraz gdy n jest liczbą nieskończoną.

W przypadku szczególnym wszystkie funkcje występujące w (2.5) mogą być standardowe oraz liczba punktów ciała może być standardową tj. skończoną liczbą naturalną. Relacja (2.5) jest wtedy relacją standardową (standardowymi równaniami ruchu) tj. odpowiada jej relacja określona wzorami (2.2), (2.3) należąca do systemu $\mathfrak{M}$. Tym samym standardowe równania ruchu opisują te same problemy fizyczne, które są opisywane znanymi równaniami mechaniki swobodnych układów punktów materialnych tj. równaniami Newtona. Aparat analizy niestandardowej nie wnosi wtedy nowych treści do mechaniki. Ciało $\mathscr{B}$, dla którego relacja (2.5) jest standardowa (dla „standardowego" inercyjnego układu odniesienia), nazwiemy ciałem standardowym.

Sytuacja ulega zmianie gdy relacja (2.5) jest wewnętrzna lecz nie standardowa, tj. gdy co najmniej jedna z funkcji występujących w (2.5) jest wewnętrzna lecz nie standardowa. Równania ruchu (2.5) rozpatrywanego ciała opisują wtedy pewien problem fizyczny, który nie może być opisany równaniami Newtona (2.2), (2.3). Ciało $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \in {}^*\mathscr{U}\setminus\mathscr{U}$, jest wtedy ciałem niestandardowym a równania (2.5) nazwiemy niestandardowymi równaniami ruchu. Tym samym niestandardowe ciała stanowią nowy model matematyczny zjawisk fizycznych w ramach mechaniki Newtona swobodnych układów punktów materialnych.

3. Niestandardowe podejście do pojęcia więzów.

3.1. Standardowe reprezentacje funkcji wewnętrznych. Celem nie tylko jakościowego lecz także ilościowego porównania rezultatów otrzymanych z teorii z wynikami eksperymentu należy funkcjom wewnętrznym występującym w równaniach ruchu (2.5) przyporządkować pewne relacje standardowe. Gdy funkcje wewnętrzne, o których mowa, są S-ciągłe to odpowiednie relacje standardowe są funkcjami zwanymi częściami standardowymi funkcji wewnętrznych (por. [2], s. 115 oraz podrozdział 1.4 tego opracowania). Te części standardowe stanowić mogą podstawę do ilościowego porównania teorii z eksperymentem. Ponieważ funkcje ciągłe występujące w (2.5) nie muszą być S-ciągłe (ich części standardowe mogą nie istnieć), przeto należy dysponować bardziej ogólną standardową reprezentacją funkcji wewnętrznych, którą przedstawimy poniżej.

Niech (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) będą danymi przestrzeniami metrycznymi, ${}^*X$, ${}^*Y$ rozszerzeniami odpowiednio zbiorów X, Y, oraz $\psi: {}^*X \to {}^*Y$ — funkcję wewnętrzną ciągłą określoną na zbiorze (wewnętrznym) $D(\psi)$. W zastosowaniach do mechaniki będziemy przyjmować ${}^*X \equiv {}^*R^m$, ${}^*Y \equiv {}^*R^k$, oraz zakładać, że ϱ_X, ϱ_Y, są znanymi metrykami odległościowymi w przestrzeniach Euklidesa. Każdej funkcji ψ przyporządkujemy standardową multifunkcję $S_\varphi: X \to 2^Y$, kładąc

$$S_\psi(x) := \{y \mid y \in Y \wedge \mu(y) \cap \psi[\mu(x) \cap D(\psi)] \neq \emptyset\}, \tag{3.1}$$

gdzie ${}^0D(\psi) := \{x \mid x \in X \wedge [\mu(x) \cap D(\psi)] \neq \emptyset\}$.

Tym samym $S_\psi(x) \equiv {}^0(\psi[\mu(x) \cap D(\psi)])$, $x \in {}^0D(\psi)$. Dziedziną S-efektywną ψ nazwiemy podzbiór $D_e(\psi)$ zbioru ${}^0D(\psi)$, złożony z punktów x dla których $S_\psi(x) \neq \emptyset$:

$$D_e(\psi) := \{x \mid x \in {}^0D(\psi) \wedge S_\varphi(x) \neq \emptyset\}. \tag{3.2}$$

Funkcję wewnętrzną $\psi: {}^*X \to {}^*Y$, ciągłą i taką, że $D_e(\psi) \neq \emptyset$, nazwiemy właściwą; multifunkcję S_ψ będziemy nazywać wtedy S-reprezentacją funkcji ψ. Jeżeli funkcja ψ jest — S-ciągła na $D(\psi)$ (tj. $\psi[\mu(x) \cap D(\psi)] \subset \mu[\psi(x)]$ dla każdego $x \in D(\psi)$ oraz przyjmuje wartości tylko w głównej galaktyce przestrzeni ${}^*Y$ (tj. $\mu[\psi(x)] \cap Y \neq \emptyset$ dla każdego $x \in D(\psi)$) wtedy jest właściwa oraz można wykazać, że $S_\psi(x) = \{{}^0\psi(x)\}$ dla każdego $x \in {}^0D(\psi)$. Tym samym S-reprezentacją funkcji S-ciągłej ψ jest jej część standardowa ${}^0\psi$ (jeżeli istnieje). Ogólniej: $S_\psi(x) = \{{}^0\psi(x)\}$ dla pewnego $x \in {}^0D(\psi)$ gdy $\psi[\mu(x) \cap D(\psi)] \subset \mu(\psi(z))$ dla pewnego $z \in D(\psi)$. Podzbiór dziedziny S-efektywnej $D_e(\psi)$ funkcji właściwej ψ, dla którego $S_\psi(x) = \{{}^0\psi(x)\}$, oznaczymy przez

$$D_1(\psi) := \{x | x \in {}^0D(\psi) \wedge S_\psi(x) = \{y\}, y \in Y\}, \tag{3.3}$$

i nazwiemy dziedziną S-jednoznaczności. Mamy więc $D_1(\psi) \subset D_e(\psi) \subset {}^0D(\psi)$.

Kładąc ${}^*X \equiv {}^*R$, ${}^*Y \equiv {}^*R^3$ oraz $\psi: {}^*R \to {}^*R^3$, dokonajmy teraz S-reprezentacji ruchów $\boldsymbol{r}: {}^*R \to {}^*R^3$, prędkości $\dot{\boldsymbol{r}}: {}^*R \to {}^*R^3$ i przyspieszeń $\ddot{\boldsymbol{r}}: {}^*R \to {}^*R^3$ punktu materialnego. Przyjmiemy, że $I = D(\boldsymbol{r})$ jest standardowym przedziałem czasu, $D(\boldsymbol{r}) = (t_0, t_1) \subset {}^*R$, $t_0, t_1 \in R$, oraz, że $\boldsymbol{r}(\cdot)$ jest funkcją ciągłą w $D(\boldsymbol{r})$ mającą w $D(\boldsymbol{r})$ ciągłe pierwszą i drugą pochodną. Zakładamy także, że funkcje $\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}$ są funkcjami właściwymi. Rozróżnimy następujące przypadki:

1° $D_1(\psi) = {}^0D(\psi)$ dla $\psi \in \{\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}\}$. Istnieją wtedy funkcje standardowe ${}^0\boldsymbol{r}$, ${}^0\dot{\boldsymbol{r}}$, ${}^0\ddot{\boldsymbol{r}}$ określone na ${}^0D(\boldsymbol{r})$ a tym samym dla każdej chwili $t \in {}^0D(\boldsymbol{r})$ S-reprezentacja ruchów, prędkości i przyspieszeń jest jednoznaczna, tj. $S_\psi(t) = \{{}^0\psi(t)\}$, $t \in (t_0, t_1) \subset R$, dla $\psi \in \{\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}\}$.

2° $D_e(\psi) = {}^0D(\psi)$ dla $\psi \in \{\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}\}$. Dla każdej chwili $t \in {}^0D(\boldsymbol{r})$ istnieje S-reprezentacja ruchów, prędkości i przyspieszeń, lecz dla $t \in D_e(\psi) \setminus D_1(\psi)$ jest ona niejednoznaczna. W szczególności, standardowej chwili $t \in D_e(\dot{\boldsymbol{r}}) \setminus D_1(\dot{\boldsymbol{r}})$ przyporządkowujemy wieloelementowy zbiór prędkości $S_{\dot{r}}(t) \subset R^3$ a chwili $t \in D_e(\boldsymbol{r}) \setminus D_1(\boldsymbol{r})$ przyporządkowujemy wieloelementowy zbiór „standardowych" położeń $S_r(t)$ punktu materialnego.

3° ${}^0D(\boldsymbol{r}) \setminus D_e(\psi) \neq \emptyset$ dla pewnego $\psi \in \{\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}\}$. Dla $t \in {}^0D(\boldsymbol{r}) \setminus D_e(\psi)$ nie istnieje możliwość liczbowego porównania rezultatów teorii z eksperymentem. Zbiory $S_\varphi(t)$ wartości standardowych są bowiem puste dla $t \in {}^0D(\boldsymbol{r}) \setminus D_e(\psi)$ co oznacza, że niektóre spośród wartości $r^k(s)$, $\dot{r}^k(s)$, $\ddot{r}^k(s)$ są nieskończone dla każdego $s \in \mu(t)$, $t \in {}^0D(\boldsymbol{r}) \setminus D_e(\psi)$, gdzie $\psi \in \{\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}\}$.

3.2. Niestandardowe podejście do więzów zewnętrznych. Więzami zewnętrznymi dla układu punktów materialnych nazwiemy takie ograniczenia nakładane na położenia i prędkości punktów materialnych, które są wywołane siłami zewnętrznymi. Poniżej wykażemy, że siły zewnętrzne działające na swobodny punkt materialny mogą prowadzić do pewnych ograniczeń dla części standardowych wektorów położenia i prędkości tego punktu; ograniczenia takie mają więc charakter pewnych „standardowych" więzów.

Przyjmując $\mathscr{B} = \{P\}$ rozpatrzymy układ złożony z tylko jednego punktu materialnego o standardowej masie $m = m(P) \in R^+$. Równania ruchu (2.5) redukują się wtedy do postaci $m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \hat{\boldsymbol{f}}(t, \boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t))$, $t \in I$ (tu i dalej oznaczamy: $\boldsymbol{r} \equiv (r^k)$, $\hat{\boldsymbol{f}} \equiv (\hat{f}^k)$, $\boldsymbol{b} \equiv (b^k)$, $k = 1, 2, 3$, etc). Załóżmy, że funkcja $\hat{\boldsymbol{f}}: I \times {}^*R^2 \times {}^*R^3 \to {}^*R^3$ jest sumą funkcji standardowej $\boldsymbol{b}(\cdot)$ i wewnętrznej $\boldsymbol{s}(\cdot)$, a równania ruchu mają postać

$$m(t \qquad \boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)) + \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}(t)), \quad t \in I, \tag{3.4}$$

w której $\boldsymbol{b}: I \times {}^*R^3 \times {}^*R^3 \to {}^*R^3$, $\boldsymbol{s}: {}^*R^3 \to {}^*R^3$, są ciągłymi funkcjami, przy czym ${}^0D(\boldsymbol{b}) = D_e(\boldsymbol{b}) = D_1(\boldsymbol{b}) = {}^0I \times R^3 \times R^3$. Niech ponadto ${}^0D(\boldsymbol{s}) \setminus D_e(\boldsymbol{s}) \neq \emptyset$, $D_e(\boldsymbol{s}) \setminus D_1(\boldsymbol{s}) \neq \emptyset$, gdzie $D_e(\boldsymbol{s})$ jest nie pustym domkniętym i spójnym podzbiorem w ${}^0D(\boldsymbol{s}) = R^3$. Tym samym istnieje określona na ${}^0D(\boldsymbol{b})$ część standardowa ${}^0\boldsymbol{b}$ funkcji $\boldsymbol{b}$ (gdyż $S_b(\boldsymbol{r}) = \{{}^0\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})\}$ dla każdego $\boldsymbol{r} \in {}^0D(\boldsymbol{b})$), natomiast nie istnieje na ${}^0D(\boldsymbol{b})$ część standardowa funkcji $\boldsymbol{s}$.

Warunek

(3.5) $$r \in D_e(s); \quad r = {}^0r(t), \quad t \in {}^0I,$$

jest ograniczeniem nałożonym na części standardowe wektorów położenia rozpatrywanego punktu materialnego. Relację (3.5) nazwiemy relacją S-więzów zewnętrznych a siły $s(r(t))$, $t \in I$, będziemy interpretować jako siły reakcji utrzymujące S-więzy. S-reprezentacja funkcji $s: {}^*R^3 \to {}^*R^3$ prowadzi do warunku

(3.6) $$p \in S_s(r); \quad r \in D_e(s),$$

w którym dowolny wektor p spełniający (3.6) nazwiemy S-reakcją dla (standardowej) konfiguracji r punktu materialnego. Jeżeli dla dowolnych (standardowych) warunków początkowych zgodnych z (3.5) istnieje funkcja $r: {}^0I \to R^3$ spełniająca dla prawie każdego $t \in {}^0I$ relację standardową

(3.7) $$m\ddot{r}(t) = b\big(t, r(t), \dot{r}(t)\big)+p(t), \quad p(t) \in S_s\big(r(t)\big), \quad r(t) \in D_e(s),$$

to powiemy, że funkcja wewnętrzna niestandardowa $s: {}^*R^3 \to {}^*R^3$ generuje S-więzy zewnętrzne. Ponieważ funkcja s charakteryzuje działanie siły zewnętrznej, więzy te nazwiemy zewnętrznymi.[11]

Podamy teraz dwa przykłady funkcji $s: {}^*R^3 \to {}^*R^3$ generujących S-więzy zewnętrzne:

1° Niech $D_1(s)$ będzie regularnym obszarem Ω w R^3 o gładkim brzegu $\partial\Omega$ oraz $D_e(s) = \bar{\Omega}$. Niech ponadto $S_s(r) = \{0\}$ dla każdego $r \in \Omega$ oraz $S_s(r) = \{0+\lambda n(r);\ \lambda \geqslant 0\}$ dla każdego $r \in \partial\Omega$, gdzie $n(r)$ jest wektorem wewnętrznie normalnym do $\partial\Omega$. Funkcja $s(\cdot)$ generuje wtedy S-więzy beztarciowe a każdy „standardowy" tor punktu materialnego (określony relacjami (3.7)) znajdujc się w $\bar{\Omega}$.

2° Niech $D_e(s)$ będzie gładką zamkniętą powierzchnią Π w R^3. Niech ponadto $S_s(r) = \{0+\lambda n(r);\ \lambda \in R\}$ dla każdego $r \in \Pi$, gdzie $n(r)$ jest wektorem normalnym do Π. Funkcja s generuje wtedy S-więzy idealne dwustronne a każdy „standardowy" tor punktu materialnego znajduje się na powierzchni Π. W przypadku tym $D_1(s) = \emptyset$.

3.3. Niestandardowe podejście do więzów wewnętrznych. Więzami wewnętrznymi dla układu punktów materialnych nazwiemy ograniczenia nakładane na wzajemne odległości poszczególnych punktów; zakładamy jednocześnie, że ograniczenia te są utrzymywane działaniem wyłącznie sił wewnętrznych. Tym samym przedmiotem rozważań będzie teraz układ złożony co najmniej z dwóch punktów materialnych. Założymy, że są to punkty o standardowych masach $m(P) \in R^+$, $P \in \mathscr{B}$, poddane działaniu standardowych sił zewnętrznych, tj. sił określonych standardowymi funkcjami $\hat{f}_P: I \times {}^*R^3 \times {}^*R^3 \to {}^*R^3$. Założymy także, że funkcje $\check{f}_{PQ}: {}^*R^+ \to {}^*R$ w równaniach ruchu (2.5) są sumami funkcji ciągłych standardowych $b_{PQ}: {}^*R^+ \to {}^*R$ i funkcji ciągłych wewnętrznych lecz niestandardowych $t_{PQ}: {}^*R^+ \to {}^*R$, gdzie $b_{PQ} = b_{QP}$, $t_{PQ} = t_{QP}$. Równania ruchu mają więc postać

(3.8) $$m(P)\ddot{r}(P, t) = \hat{f}_P\big(t, r(P, t), \dot{r}(P, t)\big)+ \\ + \sum_{Q \in \mathscr{B}\setminus\{P\}} \Big[b_{PQ}\Big(\varrho\big(r(P, t), r(Q, t)\big)\Big)+t_{PQ}\Big(\varrho\big(r(P, t), r(Q, t)\big)\Big)\Big] \frac{r(P, t)-r(Q, t)}{\varrho\big(r(P, t), r(Q, t)\big)}, \\ P \in \mathscr{B}, \quad t \in I.$$

---

[11] Przytoczone tu rozważania łatwo uogólnić na przypadek, w którym $s: I \times {}^*R^3 \times {}^*R^3 \to {}^*R^3$ tj. funkcja s zależy od argumentów t, r, $\dot{r}$. Wtedy $(r, \dot{r}) \in D_e(s(t,\cdot))$ oraz $p \in S_{s(t,\cdot)}(r, \dot{r})$.

Wykażemy, że dla odpowiednio dobranych funkcji t_{PQ} rozpatrywany układ materialny można interpretować jako pewien układ ze „standardowymi" więzami wewnętrznymi. W tym celu przyjmiemy, że funkcje t_{PQ} spełniają warunki ${}^0D(t_{PQ}) = R$, $D_e(t_{PQ}) = [\alpha_{PQ}, \beta_{PQ}]$, $D_1(t_{PQ}) = (\alpha_{PQ}, \beta_{PQ})$, gdzie α_{PQ}, β_{PQ} są danymi dodatnimi liczbami standardowymi, $\beta_{PQ} \geqslant \alpha_{PQ}$. Załóżmy ponadto, że w przedziale czasu I wszystkie punkty $\mathbf{r}(P, t)$, $P \in \mathscr{B}$, $t \in I$, znajdują się w głównej galaktyce przestrzeni ${}^*R^3$. Argument ϱ funkcji t_{PQ} spełnia warunek

$$\varrho \in D_e(t_{PQ}), \quad \varrho = {}^0\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t)), \quad t \in {}^0I. \tag{3.9}$$

Relację (3.9) nazwiemy relacją S-więzów wewnętrznych, interpretując t_{PQ} jako wielkości sił reakcji utrzymujących te więzy. S-reakcjami więzów nazwiemy siły wewnętrzne o wielkościach

$$q_{PQ} \in S_{t_{PQ}}(\varrho) \tag{3.10}$$

przyjmując ponadto, że $S_{t_{PQ}}(\varrho) = \{0\}$ dla $\varrho \in D_1(t_{PQ})$, $S_{t_{PQ}}(\beta_{PQ}) = R^- \cup \{0\}$, $S_{t_{PQ}}(\alpha_{PQ}) = R^+ \cup \{0\}$. Oznacza to, że S-reakcje więzów są równe zeru gdy $\varrho \in (\alpha_{PQ}, \beta_{PQ})$, przeciwdziałają zbliżaniu się punktów gdy $\varrho = \alpha_{PQ}$ oraz przeciwdziałają ich oddalaniu się gdy $\varrho = \beta_{PQ}$. Niestandardowe funkcje wewnętrzne $t_{PQ} = t_{QP}$, $P, Q \in \mathscr{B}$, spełniające powyższe warunki, prowadzą do standardowej relacji

$$\begin{aligned} m(P)\ddot{\mathbf{r}}(P, t) &= \hat{f}_P(t, \mathbf{r}(P, t), \dot{\mathbf{r}}(P, t)) + \\ &+ \sum_{Q \in \mathscr{B} \setminus \{P\}} \left[b_{PQ}(\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t))) + q_{PQ}(t)\right] \frac{\mathbf{r}(P, t) - \mathbf{r}(Q, t)}{\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t))}, \\ q_{PQ}(t) &\in S_{t_{PQ}}(\varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t))), \quad \varrho(\mathbf{r}(P, t), \mathbf{r}(Q, t)) \in D_e(t_{PQ}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Powyższa relacja opisuje pewien standardowy ruch układu punktów materialnych, poddanego więzom wewnętrznym. Gdy dla każdej pary $P, Q \in \mathscr{B}$ mamy $b_{PQ} = 0$ oraz $\alpha_{PQ} = \beta_{PQ}$, otrzymujemy przypadek szczególny rozpatrywanego układu materialnego, który można nazwać ciałem S-sztywnym, Mówiąc poglądowo, jest to układ zachowujący się jak ciało sztywne gdy działające na niego siły zewnętrzne są skończone.

3.4. Uwagi i wnioski. Dwa podejścia przedstawione powyżej można łącznie zastosować do jednego układu punktów materialnych (swobodnego i niestandardowego) otrzymując równania ruchu opisujące pewien układ standardowy lecz nieswobodny (z więzami zewnętrznymi i wewnętrznymi). Z przedstawionego prostego przykładu zastosowania niestandardowej postaci (2.5) równań ruchu wynika, że:

1° Analiza niestandardowa umożliwia traktowanie nieswobodnych układów punktów materialnych jako pewnej „aproksymacji" układów swobodnych; „aproksymacja" ta polega jedynie na odpowiednim doborze niektórych funkcji (wewnętrznych lecz nie standardowych) występujących w równaniach ruchu układu swobodnego i nie wymaga stosowania ani przejść granicznych, ani dodatkowych postulatów.

2° Analiza niestandardowa daje nową interpretację więzów (por. (3.5), (3.6), (3.9), (3.10)), zgodną z ich sensem fizycznym, tj. polegającą na zaniedbywaniu wielkości infinitezymalnych jako nie dających się opisać przy pomocy będących do naszej dyspozycji środków pomiarowych.

3° Przy formułowaniu podstaw mechaniki Newtona w ramach analizy niestandardowej można ograniczyć się tylko do mechaniki swobodnych układów punktów materialnych (których ruch opisują równania (2.5)), bowiem więzy nakładane na „standardowy" ruch układu są rezultatem pewnych założeń co do sił działających na punkty materialne układu.

Druga część tego opracowania będzie zawierać bardziej złożone przykłady zastosowań ruchu (2.5) do formułowania modeli matematycznych rzeczywistych układów materialnych. Między innymi wykażemy, że z niestandardowych relacji (2.5) można otrzymać standardowe relacje mechaniki kontinuum. Umożliwi to interpretację znanych pojęć mechaniki kontinuum (jak np. gęstość masy, gęstość sił brzegowych i objętościowych, tensor naprężenia) wyłącznie przy użyciu pojęć mechaniki Newtona punktów materialnych. Wykażemy także, że stosowanie różnych układów odniesienia (inercyjnych lecz nie tylko standardowych, por. podrozdział 2.2) do opisu jednego i tego samego ciała $\mathscr{B} = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $n \in {}^*N \setminus N$, prowadzi do różnych matematycznych standardowych modeli, tj. jedno ciało $\mathscr{B}$ może być, w zależności od przyjętego układu odniesienia, traktowane jako układ standardowy ciągły, układ dyskretny lub nawet jako jeden punkt materialny.

Literatura cytowana w tekście

1. A. ROBINSON, *Non-standard analysis*, Nedrel. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64, (1961) 432 - 440.
2. A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis*, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1966.
3. M. MACHOVER, J. HIRSCHFELD, *Lectures on the Non-Standard Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, No 94, Springer Verlag, 1969.
4. M. DAVIES, *Applied Non-Standard Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
5. P. J. KELEMEN, A. ROBINSON, *The nonstandard $\lambda:\phi_2^4(x)$ model*, Journ. Math. Phys., 13 (1972), 1870 - 1878. (por. także [6], s. 270 - 278).
6. A. ROBINSON, *Selected Papers*, vol. 2, Nonstandard Analysis and Philosophy, Editors: W. A. J. Luxemburg i S. Körner, North-Holland Publ. Camp., Amsterdam, 1979.
7. W. A. J. LUXEMBURG, *A General Theory of Monads, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory*, Proc. on a Meeting on Non-Standard Analysis, Holt-Rinehart and Winston, 1969.
8. *Applications of Model Theory to Algebra*, Analysis and Probability Theory, Proc. of an International Symp. on Nonstandard Analysis, Holt-Rinehart and Winston, 1969.
9. *Contributions to Non-Standard Analysis*, Symposium at Oberwolfach, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1972.
10. A. MOSTOWSKI, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Wrocław, 1948.
11. A. TRAUTMAN, *Teoria względności*, Ossolineum, 1971.
12. C. TRUESDELL, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, The Johns Hopkins University, Baltimore, 1972.
13. A. ROBINSON, E. ZAKON, *A set-theoretical characterization of enlargements*, w [8].

Резюме

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ В НЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК I.

В настоящей работе исследуется и применяется нестандартный анализ к задачам нютоновской механики. Такой подход вводит в механику не-архимедовых упорядоченных полей и допускает возможность описать бесконечных и инфинитезымальные значения физических величин.

Методы нестандартного анализа нютоновской механики систем материальных точек приводят к более широкому классу математических моделей физических явлений по сравнении с получающимися в классической формулировке дискретной механики. На пример, из „не-стандаорной" формулировки нютоновских принципов движения дискретной механики можна вывести фундаментальны „стандартные" соотношения механики континуума.

В этой части работы рассмотрены общее введение в нестандартный анализ, а также фундаментальные предположения нютоновской механики в рамках нестандартного анализа. В виде примера новая интерпретация стандартного понятия свазей выведена из нютоновских принципов движения некоторых нестандартных систем материальных точек без связей.

Summary

NON-STANDARD ANALYSIS IN NEWTONIAN MECHANICS OF MASS-POINT Systems I

The aim of the present paper is to apply and to investigate the non-standard analysis as the mathematical tool of Newtonian mechanics. Such approach introduces into mechanics non-Archimedean ordered fields and makes it possible to describe explicitly also infinite and infinitesimal values of the physical quantities. Generally speaking, the methods of the non-standard analysis in Newtonian mechanics of mass-point systems lead to the wider class of mathematical models of physical phenomena than that which can be obtained within the classical formulation of the discrete mechanics. For example, from the „non-standard" formulation of the Newton's law of motion in discrete mechanics we can derive the fundamental „standard" relations of the continuum mechanics.

In this part of the paper the general introduction into the non-standard analysis as well as the fundamentals of Newtonian mechanics within non-standard analysis have been outlined. As an example of applications the new interpretation of the standard concept of constrains has been derived from the Newton's law of motion of certain non-standard unconstrained mass-point systems.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI