

NIEIZOTERMICZNY, LAMINARNY PRZEPIY W NIENEWTONOWSKIEJ  
CIECZY W KRÓTKIEJ RURZE

KAZIMIERZ R U P (KRAKÓW)

I. Wstęp

Do licznej grupy substancji wykazujących własności nienewtonowskie należą roztwory i stopy polimerów o dużej masie cząsteczkowej, oraz liczne zawiesiny ciał stałych w cieczach. Nieizotermiczne przepływy wymienionych płynów odgrywają podstawową rolę w takich gałęziach przemysłu jak przemysł tworzyw sztucznych, włókien sztucznych, farb i lakierów, farmaceutyczny i inne.

Zagadnienie nieizotermicznych, laminarnych przepływów cieczy nienewtonowskich było przedmiotem wielu prac. Za pomocą metody rozdzielania zmiennych określono w [1] pole temperatury cieczy spełniającej empiryczne równanie Ostwalda de Waele w przypadku płaskiego przepływu Couette przy termicznych warunkach brzegowych pierwszego rodzaju.

W pracach [2] i [3] analizowano pole temperatury w podobnych cieczach lecz w przypadku przepływu przez rury kołowe z uwzględnieniem efektów dysypacji wiskotycznej. Zakładając w [2] i [3] stałą temperaturę ścianki rury rozwiązano równanie energii cieczy za pomocą metody perturbacji.

Eksperymentalną analizę dotyczącą nieizotermicznych przepływów cieczy pseudo plastycznych realizowanych w rurach kołowych ogrzewanych stałym strumieniem ciepła przedstawiono w pracach [4] i [5]. W niniejszej pracy podjęto próbę analitycznego, przybliżonego rozwiązania równania energii cieczy pseudo plastycznych i dilatantnych w przypadku przepływu przez rurę kołową. Na ściance rury założono konwekcyjną wymianę ciepła, a więc termiczne warunki brzegowe trzeciego rodzaju.

Do rozwiązania tak postawionego problemu wykorzystano w pracy acłwmetodę Kármána-Pohlhausena [6].

Otrzymane wyniki przedstawiono w sposób graficzny, a w jednym szczeólnym przypadku porównano z innymi otrzymanymi za pomocą metod ścisłych [7].

Oznaczenia

$$a = \frac{k}{\rho c_p} \quad \text{współczynnik przewodzenia temperatury}$$

$$Bi = \frac{2\alpha \cdot r_s}{k} \quad \text{liczba Biota}$$

- $c_p$  ciepło właściwe  
 $k$  współczynnik przewodnictwa cieplnego  
 $m$  parametr reologiczny w równaniu (1)  
 $n$  wskaźnik płynięcia

$$Pe = \frac{V_{\max} \cdot r_s}{a} \quad \text{liczba Pecleta}$$

- $r$  współrzędna  
 $r_s$  promień rury  
 $t$  temperatura  
 $t_0$  temperatura początkowa  
 $T_m$  temperatura średnia  
 $V$  prędkość  
 $y$  współrzędna mierzona od ścianki rury  
 $\alpha$  współczynnik przejmowania ciepła  
 $\delta$  bezwymiarowa grubość termicznej warstwy przyściennej  
 $\rho$  gęstość cieczy  
 $\mu$  dynamiczny współczynnik lepkości płynu newtonowskiego  
 $\tau_{zr}$  naprężenie styczne

## 2. Analiza problemu

Rozważać będziemy nieizotermiczny przepływ cieczy nienewtonowskiej o niezmiennych wraz ze zmianą temperatury własnościach fizycznych realizowany w rurze kołowej.

Na ściance rury założono warunek konwekcyjnej wymiany ciepła. Warunek taki odpowiada wymianie ciepła pomiędzy cieczą a ścianką rury zgodnie z prawem Newtona.

Opisane wyżej zagadnienie rozwiązane zostanie w tej pracy przy następujących założeniach:

- 1) przepływ cieczy jest ustalony, laminarny i charakteryzuje się osiową symetrią
- 2) ciecz posiada w przekroju wejściowym stałą temperaturę
- 3) uwzględniamy efekty dysypacji wiskotycznej,
- 4) pomijamy wpływ przewodności cieplnej cieczy wzdłuż osi przepływu ( $Pe \gg 100$ ).

Własności reologiczne rozważanych w pracy cieczy opisywać będziemy za pomocą znanej zależności potęgowej [1, 2, 3]

$$(2.1) \quad \tau_{zr} = -m \left| \frac{dV}{dr} \right|^{n-1} \cdot \frac{dV}{dr}$$

Zależność (2.1) zwana jest również równaniem empirycznym Ostwalda de Waele. Należy zaznaczyć że zależność (2.1) opisuje w sposób dostatecznie dokładny własności reologiczne znacznej grupy cieczy „czysto” lepkich ale w zakresie umiarkowanych szybkości ścinania. Natomiast dla szybkości ścinania zmierzających do zera lub do nieskończoności zależność (2.1) traci interpretację fizyczną. W zależności od współczynnika płynięcia  $n$  zależność (2.1) obejmuje: ciecze pseudoplastyczne ( $n < 1$ ), ciecze newtonowskie ( $n = 1$ ,  $m = \mu$ ), ciecze dilatantne ( $n > 1$ ).

Uwzględniając założenia 1-4 oraz zależność (2.1) równanie energii cieczy można zapisać w postaci

$$(2.2) \quad \rho c_p V \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + m \left| \frac{dV}{dr} \right|^{1/N-1} \left( \frac{dV}{dr} \right)^2,$$

gdzie:

$$V = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_s} \right)^{N+1} \right]$$

$$N = \frac{1}{n},$$

$$V_{\max} = \frac{1}{N+1} r_s^{N+1} \left[ -\frac{1}{2m} \frac{dp}{dz} \right]^N.$$

Drugi składnik prawej strony równania (2.2) reprezentuje wewnętrzne źródło ciepła powstałe w wyniku dysypacji wiskotycznej. Równanie różniczkowe (2.2) rozwiązane zostanie przy następujących warunkach brzegowych:

$$(2.3a) \quad z \leq 0, \quad 0 \leq r \leq r_s, \quad t = t_0(\text{const}),$$

$$(2.3b) \quad z > 0, \quad r = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial r} = 0,$$

$$(2.3c) \quad z > 0, \quad r = r_s, \quad -k \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha(t-t').$$

Schemat rozważanego przepływu przedstawiono na rys. 1. Dla uogólnienia dalszych rozważań wprowadzimy następujące wyrażenia bezwymiarowe:

$$(2.4a) \quad Z = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{r_s},$$

$$(2.4b) \quad y = 1 - \frac{r}{r_s},$$

$$(2.5) \quad T = \frac{t-t'}{t_0-t'}.$$

Podstawiając do (2.2) wyrażenia (2.4a), (2.4b), (2.5) oraz uwzględniając liczbę Brinkmana

$$(2.6) \quad \text{Br} = (N+1)^{1/N+1} \frac{m \cdot r_s^2}{k \cdot (t_0-t')} \left[ \frac{V_{\max}}{r_s} \right]^{1/N+1},$$

otrzymamy

$$(2.7) \quad [1 - (1-y)^{N+1}] \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{1-y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \text{Br}(1-y)^{N+1}.$$

Warunki brzegowe (2.3a), (2.3b) i (2.3c) zapiszemy odpowiednio

$$(2.8a) \quad Z \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad T = 1,$$

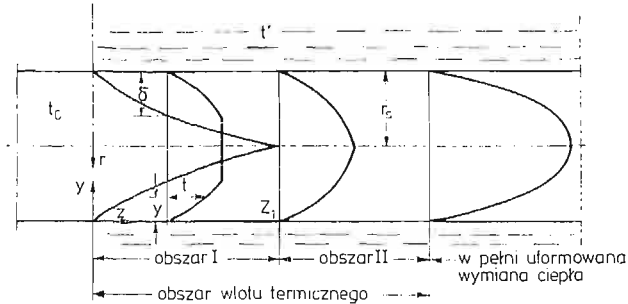
$$(2.8b) \quad Z > 0, \quad y = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

$$(2.8c) \quad Z > 0, \quad y = 0, \quad -\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{2} \text{Bi}T = 0.$$

Równanie różniczkowe (2.7) wraz z warunkami brzegowymi (2.8a), (2.8b) i (2.8c) rozwiązane zostanie za pomocą metody Kármána—Pohlhausena [6].

Zgodnie z ideą przewodnią zastosowanej metody rozwiązanie równania (2.7) przy warunkach (2.8a), (2.8b) i (2.8c) przeprowadza się w dwóch obszarach oddzielnie, rys. 1.

Pierwszy obszar charakteryzuje się nieufornym procesem wymiany ciepła. W obszarze tym grubość termicznej warstwy przyściennej narasta od zera do jedności.



Rys. 1. Schemat przepływu w obszarze wlotu termicznego.

Drugi obszar charakteryzuje się bardziej uformowanym procesem wymiany ciepła. W tym obszarze grubość termicznej warstwy przyściennej traci interpretację fizyczną.

Wprowadzając do rozważań pojęcie grubości termicznej warstwy przyściennej  $\delta$ , oprócz warunków (2.8a), (2.8b) i (2.8c) obowiązują w pierwszym obszarze ponadto:

$$(2.9a) \quad y = \delta(Z), \quad T = 1,$$

$$(2.9b) \quad y = \delta(Z), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Zgodnie z ideą zastosowanej metody funkcję aproksymującą dokładne pole temperatury w pierwszym obszarze przyjmujemy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} T &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2, & 0 \leq y \leq \delta, \\ T &= 1, & \delta \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Współczynniki funkcyjne w (2.10) wyznaczamy w oparciu o warunki (2.8c), (2.9a) i (2.9b).

Wynoszą one:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{Bi} \frac{2Bi}{4 + \delta Bi}, & a_1 &= \frac{2Bi}{4 + \delta Bi}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2\delta} \frac{2Bi}{4 + \delta Bi}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia nieznannej funkcji  $\delta = \delta(Z)$  całkujemy równanie (2.7) w granicach od 0 do  $\delta(Z)$  po zmiennej  $y$  otrzymując:

$$(2.12) \quad \int_0^\delta \left\{ [1 - (1-y)^{N+1}] (1-y) \frac{\partial T}{\partial Z} \right\} dy = (1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - \\ - (1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \text{Br} \int_0^\delta (1-y)^{N+2} dy.$$

Uwzględniając reguły różniczkowania całki po parametrze (reguła Leibniza) oraz uwzględniając warunek (2.9b) równanie (2.12) przyjmuje postać:

$$(2.13) \quad \frac{d}{dZ} \int_0^\delta [1 - (1-y)^{N+1}] (1-y) T(yZ) dy - \\ - [1 - (1-\delta)^{N+1}] (1-\delta) \frac{d\delta}{dZ} = - \frac{\delta T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \text{Br} \int_0^\delta (1-y)^{N+2} dy.$$

Podstawiając (2.10) i (2.11) do wyrażenia (2.13) po wykonaniu całkowania otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.14) \quad 4(N+3)\text{Bi} \frac{1}{A_3} \left[ -A_4 \frac{(1-\delta)^{N+4}}{\delta^2} - \frac{1}{N+3} + \right. \\ \left. + \frac{8\delta - 3\delta^2}{12} + \left( -\frac{2\delta^2 - \delta^3}{24} \right) \text{Bi} - \frac{1}{2} A_1 \text{Bi} + A_2 \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta} A_2 \text{Bi} \right] \frac{d\delta}{dZ} = 1,$$

gdzie,

$$(2.15) \quad A_1 = \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}, \\ A_2 = \frac{1}{N+3} - \frac{2}{N+4} + \frac{1}{N+5}, \\ A_3 = (4 + \delta \text{Bi}) \{ 2(N+3)\text{Bi} - \text{Br}(4 + \delta \text{Bi}) [1 - (1-\delta)^{N+3}] \}, \\ A_4 = A_2 \left[ 1 + (N+4)\delta + \frac{\text{Bi}}{2} \delta + \frac{N+3}{4} \text{Bi} \delta^2 \right].$$

Równanie różniczkowe (2.14) całkujemy przy następującym warunku (2.16)

$$(2.16) \quad Z = 0, \quad \delta = 0$$

otrzymując

$$(2.17) \quad Z = \int_0^\delta \frac{4(N+3)\text{Bi}}{A_3} \left[ -A_4 \frac{(1-\delta)^{N+4}}{\delta^2} - \frac{1}{N+3} + \right. \\ \left. + \frac{8\delta - 3\delta^2}{12} + \left( \frac{2\delta^2 - \delta^3}{24} \right) \text{Bi} - \frac{1}{2} A_1 \text{Bi} + A_2 \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta} A_2 \text{Bi} \right] d\delta.$$

Całkę (2.17) można stosunkowo łatwo wyznaczyć w sposób analityczny w przypadku pominięcia efektów dysypacji wiskotycznej to jest gdy  $\text{Br} = 0$ . I tak posługując się tablicami całek [8] otrzymano po scałkowaniu (2.17) w przypadkach:

a)  $Br = 0, N = 1$  (ciecz newtonowska)

$$(2.18) \quad Z(\delta) = \frac{\delta^5}{150} + \left( \frac{1}{120Bi} - \frac{3}{80} \right) \delta^4 + \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{15Bi} - \frac{2}{45Bi^2} \right) \delta^3 + \frac{1}{Bi} \left( \frac{1}{6} + \frac{2}{5Bi} + \frac{4}{15Bi^2} \right) \delta^2 - \frac{1}{Bi^2} \left( \frac{4}{3} + \frac{16}{5Bi} + \frac{32}{15Bi^2} \right) \delta + \frac{1}{Bi^3} \left( \frac{16}{3} + \frac{64}{5Bi} + \frac{128}{15Bi^2} \right) \ln \left( \frac{4 + \delta Bi}{4} \right),$$

b)  $Br = 0, N = 2$  (ciecz pseudoplastyczna)

$$(2.19) \quad Z(\delta) = -\frac{\delta^6}{252} + \left( \frac{2}{75} - \frac{2}{525Bi} \right) \delta^5 + \left( \frac{2}{105Bi^2} + \frac{1}{30Bi} - \frac{3}{40} \right) \delta^4 + \left( \frac{1}{12} - \frac{2}{15Bi} - \frac{8}{45Bi^2} - \frac{32}{315Bi^3} \right) \delta^3 + \frac{1}{Bi} \left( \frac{64}{105Bi^3} + \frac{16}{15Bi^2} + \frac{4}{5Bi} + \frac{1}{4} \right) \delta^2 - \frac{1}{Bi^2} \left( \frac{512}{105Bi^3} + \frac{128}{15Bi^2} + \frac{32}{5Bi} + 2 \right) \delta + \frac{1}{Bi^3} \left( \frac{2048}{105Bi^3} + \frac{512}{15Bi^2} + \frac{128}{5Bi} + 8 \right) \ln \left( \frac{4 + \delta Bi}{4} \right).$$

Ze względu na dużą pracochłonność przy analitycznym całkowaniu wyrażenie (2.17) scałkowano również numerycznie metodą Simpsona dla kilku wybranych wartości parametrów  $Bi$ ,  $Br$  i  $N$ . Podobnie jak w pierwszym obszarze również w drugim obszarze wymiany ciepła pole temperatury cieczy aproksymujemy wielomianem drugiego stopnia

$$(2.20) \quad T = b_0 + b_1 y + b_2 y^2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Jak wspomniano wyżej w drugim obszarze wymiany ciepła grubość termicznej warstwy przyściennej traci sens.

Współczynniki funkcyjne  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  wyznaczamy w równaniu (2.20) w oparciu o warunki (2.8b) i (2.8c). Ostatecznie wyrażenie (2.20) przyjmie postać

$$(2.21) \quad T = \frac{1}{2} b_1 \left[ \frac{4 + Bi}{Bi} - (1 - y)^2 \right].$$

Aby wyznaczyć nieznaną współczynnik  $b_1$  w równaniu (2.21) podstawiamy ostatnie do równania (2.7). Równanie (2.7) całkujemy następnie po zmiennej  $y$  w granicach od 0 do 1. Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.22) \quad \frac{db_1}{dZ} + \frac{2}{\frac{1}{2} \frac{4 + Bi}{Bi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{N + 3} - \frac{1}{Bi} \frac{4 + Bi}{Bi} - \frac{1}{N + 5}} \cdot b_1 = \frac{2 Br}{N + 3}.$$

Równanie (2.22) można łatwo całkować analitycznie w ogólnej postaci, a więc dla dowolnych wartości parametrów  $Bi$ ,  $Br$  i  $N$ .

Po scałkowaniu (2.22) otrzymuje się

$$(2.23) \quad b_1(Z) = \frac{2 Br}{M(N + 3)} + C \cdot \exp(-MZ)$$

gdzie:

$$M = \frac{2}{\frac{1}{2} \frac{4+Bi}{Bi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{N+3} \frac{4+Bi}{Bi} + \frac{1}{N+5}}$$

Stałą całkowania w równaniu (2.23) wyznacza się z warunku spójności rozwiązań w pierwszym i drugim obszarze.

Warunek spójności (zszycia) ma w rozważanym przypadku postać

$$(2.24) \quad Z = Z_1, \quad b_1 = \frac{2Bi}{4+Bi}.$$

W (2.24)  $Z_1$  oznacza wartość bezwymiarowej współrzędnej  $Z$  w rozwiązaniu dla pierwszego obszaru, dla której  $\delta(Z_1) = 1$ .

Warunek (2.24) wynika z porównania temperatury cieczy na końcu pierwszego obszaru i na początku drugiego.

Uwzględniając (2.24) w wyrażeniu (2.23) stała całkowania wyniesie

$$(2.25) \quad C = \left[ \frac{2Bi}{4+Bi} - \frac{2Br}{M(N+3)} \right] \exp(MZ_1).$$

Podstawiając (2.25) do (2.23) otrzymamy zależność określającą współczynnik funkcyjny  $b_1(Z)$ . W dalszym ciągu odstawiamy wymieniony współczynnik  $b_1(Z)$  do wyrażenia (2.21) otrzymując w rezultacie pole temperatury cieczy w drugim obszarze. Ma ono postać

$$(2.26) \quad T(y, Z) = \left[ \frac{4+Bi}{Bi} - (1-y)^2 \right] \left[ \frac{Bi}{4+Bi} - \frac{Br}{M(N+3)} \right] \cdot \exp[M(Z_1 - Z)] + \frac{Br}{M(N+3)} \left[ \frac{4+Bi}{Bi} - (1-y)^2 \right].$$

Ostatecznie można powiedzieć, że pole temperatury cieczy w pierwszym i drugim obszarze wymiany ciepła opisują wyrażenia (2.10) i (2.26) odpowiednio. Dysponując powyższymi rozwiązaniami wyznaczamy liczbę Nusselta charakteryzującą proces wymiany ciepła.

Odnosząc współczynnik przejmowania ciepła  $\alpha$  do różnicy temperatur pomiędzy temperaturą średnią cieczy i temperaturą powierzchni wewnętrznej rury liczbę Nusselta wyznaczamy z zależności

$$(2.27) \quad Nu = \frac{2\alpha \cdot r_s}{k} = \frac{2}{T_m} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$$

W wyrażeniu (2.27)  $T_m$  jest temperaturą średnią cieczy, którą należy wyznaczyć z zależności

$$(2.28) \quad T_m = \frac{\int_0^1 VT(1-y)dy}{\int_0^1 V(1-y)dy}.$$

Dla pierwszego obszaru wymiany ciepła temperatura średnia cieczy wyznaczona z (2.28) wynosi

$$(2.29) \quad T_m = 1 - \frac{2(N+3)}{N+1} \frac{\delta \text{Bi}}{4 + \delta \text{Bi}} \left[ \frac{(1-\delta)^{N+5}}{\delta^2} A_2 - \frac{A_2}{\delta^2} + \frac{2A_1}{\delta^2} - \frac{1}{N+3} + \frac{4\delta - \delta^2}{12} \right]$$

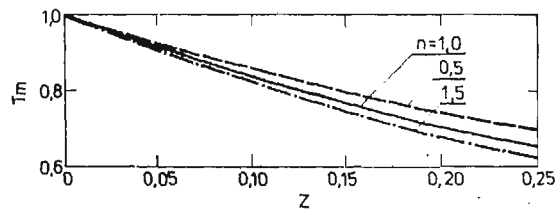
gdzie  $A_1$  i  $A_2$  określone są zależnościami (2.15).

Odpowiednia temperatura średnia w drugim obszarze wymiany ciepła ma postać

$$(2.30) \quad T_m = \left\{ \frac{\text{Br}}{M(N+3)} + \left[ \frac{\text{Bi}}{4 + \text{Bi}} - \frac{\text{Br}}{M(N+3)} \right] \cdot \exp[M(Z_1 - Z)] \right\} \cdot \left[ \frac{4 + \text{Bi}}{\text{Bi}} - \frac{2(N+3)}{N+1} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{N+5} \right) \right]$$

W celu zobrazowania przeprowadzonych rozważań wykonano przykłady liczbowe. Uzyskane wyniki przedstawiono w sposób graficzny.

Wartości parametrów  $\text{Bi}$ ,  $\text{Br}$  i  $N$  założono identyczne w obu obszarach wymiany ciepła. Na podstawie zależności (2.29) i (2.30) sporządzono zależność graficzną zmian temperatury średniej cieczy wzdłuż osi rury. Zależność powyższą przy pominięciu efektów dysypacji wiskotycznej przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Średnia temperatura cieczy wzdłuż osi przepływu dla:  $\text{Bi} = 1$ ,  $\text{Br} = 0$ .

W celu dokonania analizy porównawczej przytoczono w tabelicy 2.1 rozwiązanie ściśle otrzymane w [7] dla następujących wartości parametrów:  $\text{Bi} = 2$ ,  $\text{Br} = 0$ ,  $N = 1$  (ciecz newtonowska, brak faktów dysypacji wiskotycznej).

Wyniki liczbowe zamieszczone w tabelicy 2.1 pozwalają stwierdzić, że rozwiązanie przybliżone otrzymane w pracy aproksymuje wystarczająco dokładnie w pierwszym i drugim obszarze wymiany ciepła odpowiednie rozwiązanie ściśle.

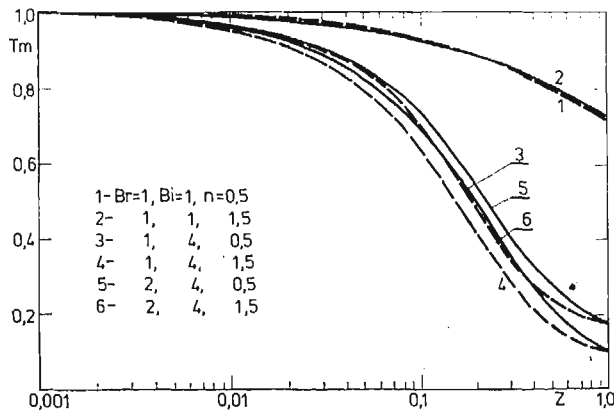
W celu przedstawienia efektów dysypacji wiskotycznej na rozkład temperatury średniej cieczy wzdłuż osi przepływu wykonano rys. 3. Na rysunku tym przedstawiono krzywe dla następujących wartości parametrów  $\text{Bi} = 1, 4$ ;  $\text{Br} = 1, 2$ ;  $N = 2, 2/3$ .

Wpływ parametrów  $\text{Bi}$ ,  $\text{Br}$  i  $N$  na zmiany liczby Nusselta wzdłuż osi przepływu cieczy przedstawiono na rysunku 4.

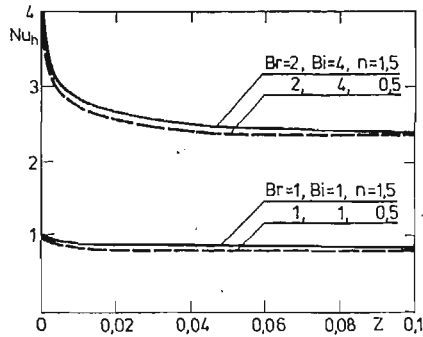


Tablica 1. Porównanie wyników otrzymanych w pracy z wynikami rozwiązania ścisłego

Lp.	Bi = 1, Br = 0, N = 1		
	Z	T [°] (roz. ścisłe)	T
1	0,00008	0,99986	0,99985
2	0,00183	0,99666	0,99653
3	0,00732	0,98690	0,98657
4	0,01721	0,97003	0,96940
5	0,03106	0,94748	0,94634
6	0,03911	0,93479	0,93333
7	0,05500	0,91049	0,90825
8	0,07000	0,88833	0,88520
9	0,10000	0,84589	0,84082



Rys. 3. Oddziaływanie dysypacji wiskotycznej na zmiany średniej temperatury cieczy wzdłuż osi przepływu.



Rys. 4. Przebieg zmian liczby Nusselta wzdłuż kierunku przepływu.

## 3. Uwagi końcowe

Zastosowanie metody całkowej Kármána-Pohlhausena do rozwiązania postawionego w pracy problemu umożliwia uzyskanie wyników charakteryzujących się stosunkowo wysokim stopniem aproksymacji rozwiązania ścisłego w obu rozważanych obszarach.

Zakładając różne wartości parametrów  $Bi$ ,  $Br$  i  $N$  określono ich wpływ na pole temperatury cieczy. Stwierdzono, że w przypadku braku wewnętrznych źródeł ciepła ( $Br = 0$ ) przy tej samej wartości liczby Biota temperatura średnia cieczy pseudoplastycznych ( $n = 0,5$ ) jest wyższa od temperatury średniej cieczy newtonowskich ( $n = 1$ ) i cieczy dilatantnych ( $n = 1,5$ ).

Przeanalizowano również oddziaływanie dysypacji wiskotycznej na pole temperatury cieczy stwierdzając jej istotny wpływ zwłaszcza na zmiany temperatury średniej. Z rysunku 3 wynika, że efekt dysypacji wiskotycznej wyraźnie zmniejsza oddziaływanie zmian współczynnika płynięcia  $n$  na przebieg temperatury średniej cieczy zwłaszcza w obszarze  $Z \approx 1$ .

Na rysunku 4 łatwo zauważyć, że wartość liczby Nusselta zależy szczególnie od zmian liczby Biota.

Warto zaznaczyć, że zależność (2.18) i (2.19) w przypadku założenia  $Bi \rightarrow \infty$  mogą służyć do określenia pola temperatury cieczy przepływającej w rurze kołowej o stałej temperaturze ścianki.

## Literatura cytowana w tekście

1. E. M. MITWALLY, *Heat Transfer in Plane Couette Flow with Additional Pressure Gradient Including Entrance Effects for a Non-Newtonian Fluid*, *AICHE J.*, 6, 24, 1978.
2. Y. P. SHIH, J. D. TSOU, *Extended Leveque Solutions for Heat Transfer to Power Law Fluids in Laminar Flow in a Pipe*, *Chem. Eng. J.*, 15, 1978.
3. S. M. RICHARDSON, *Extended Leveque Solutions for Flows of Power Law Fluids in Pipes and Channels*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 10, 22, 1979.
4. R. MAHALINGAM, L. O. TILTON, J. M. COULSON, *Heat Transfer in Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids*, *Chem. Eng. Sci.*, 30, 1975.
5. C. E. BASSET, J. R. WELTZ, *Non-Newtonian Heat Transfer in the Thermal Entrance Region of Uniformly Heated Horizontal Pipes*, *AICHE J.*, 21, 1975.
6. A. K. MOHANTY, S. B. ASTHANA, *Laminar flow in the entrance region of a smooth pipe*, *J. Fluid Mech.*, 3, 90, 1979.
7. J. SCHENK, Y. M. DUMORE, *Heat transfer in Laminar flow through cylindrical tubes*, *Appl. Sci. Res.*, 1, A4 1953.
8. J. M. RYŻYK, J. S. GRADSZTEIN, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, W-wa, 1964.

## Р е з ю м е

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ, ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НА ТЕРМИЧЕСКОМ НОЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ.

Для исследования влияния теплового граничного условия третьего рода на перенос тепла при вынужденной ламинарной конвекции в неньютоновской жидкости на начальном тепловом участке круглой трубы решается уравнение энергии интегральным методом. Неньютоновское поведение среды охарактеризовано степенной моделью. Рассматриваются однородные и полностью

развитые профили скорости. Свойства жидкости считаются постоянными. Учитывается эффект выделения тепла за счёт вязкой диссипации. Сделан вывод, что число Био, число Бринкмана и коэффициент „ $n$ ” могут оказывать влияние на локальное число Нуссельта. Сравнение полученных результатов с имеющимися решениями для ньютоновских жидкостей показало хорошее соответствие между ними.

#### S u m m a r y

#### LAMINAR FLOW OF A NON-NEWTONIAN FLUID IN THE THERMAL ENTRANCE REGION OF A SMOOTH PIPE

To investigate the influence of the temperature boundary condition of the third kind on the laminar heat transfer of a pipe, the energy equation is solved by applying the momentum integral method. The power-law model characterises the non-Newtonian behavior. Uniform and fully developed velocity profiles are considered. Constant fluid properties are assumed. The effect of heat generation by viscous dissipation is included. It is concluded that there can be a significant influence of Biot number, Brinkman number and flow index non mean temperature and local Nusselt number. The results are compared with the available solutions for Newtonian fluid an excellent agreement has been found.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1980 roku.*

---