

ZASADY WARIACYJNE MECHANIKI DLA ZMIENNYCH OBSZARÓW
I ICH WYKORZYSTANIE W OPTYMALIZACJI KONSTRUKCJI

KRZYSZTOF DEMS (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Zasady prac przygotowanych oraz uzupełniających prac przygotowanych są podstawą wariacyjnego sformułowania zagadnień statycznej równowagi ciała pod działaniem zewnętrznych i wewnętrznych sił. Najczęściej kształt ciała jest z góry określony i wariacji podlegać mogą pola naprężeń, odkształceń i przemieszczeń. Istnieje jednak szereg zagadnień w których istotnym jest uwzględnienie zmiany kształtu brzegu ograniczającego ciało, lub jakiegokolwiek powierzchni wewnątrz rozpatrywanego ciała. Zagadnieniami takimi mogą być problemy optymalizacji kształtu ciała, zagadnienia propagacji pęknięć, transformacji faz przy krzepnięciu itp.

W przedstawionej pracy zajmiemy się wyznaczaniem wspomnianych zasad wariacyjnych w przypadku gdy oprócz wariacji pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń należy również rozpatrywać wariację obszaru zajmowanego przez ciało. Następnie wykorzystamy te zasady przy wyznaczaniu warunków optymalności kształtu brzegu ciała. Naszą analizę ograniczymy do materiałów sprężystości nieliniowych z potencjałami naprężeń i odkształceń $W(\sigma_{ij})$ oraz $U(\varepsilon_{ij})$ takimi, że

$$(1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Dalej przyjmiemy, że $W(\sigma_{ij})$ i $U(\varepsilon_{ij})$ są jednorodnymi funkcjami rzędów $(n+1)$ i $(k+1)$, takimi, że

$$(2) \quad \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} = (n+1)W(\sigma_{ij}) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} = (k+1)U(\varepsilon_{ij}),$$

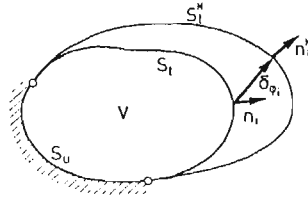
gdzie $kn = 1$. Dla jednoosiowego stanu naprężenia zależność naprężenie-odkształcenie jest opisana zatem przez związek $\varepsilon = c\sigma^n$, gdzie c oraz n są parametrami materiałowymi. Dla $n = 1$, związki (1) odpowiadają materiałowi sprężystości liniowemu, podlegającemu prawu Hooke'a.

2. Zasada prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola przemieszczeń i kształtu brzegu

Niech dane ciało sprężyste B , zajmujące obszar V i ograniczone brzegiem S znajduje się w stanie równowagi statycznej pod działaniem danych sił powierzchniowych, rys. 1. Powierzchnia graniczna składa się z dwóch części S_i i S_u . Na części brzegu S_i dane są siły powierzchniowe $T_i^0 = \sigma_{ij}n_j$, zaś na brzegu S_u zadane są przemieszczenia $u_i = u_i^0$.

Rozpatrzmy nieskończenie małą wariację konfiguracji ciała B określoną przez ciągłe i różniczkowalne pole wektorowe $\delta\varphi_i = \delta\varphi_i(x)$ takie, że dowolny punkt P ciała przechodzi w punkt P^* zgodnie z zależnością

$$(3) \quad P \rightarrow P^*: x_i^* = x_i + \delta\varphi_i.$$

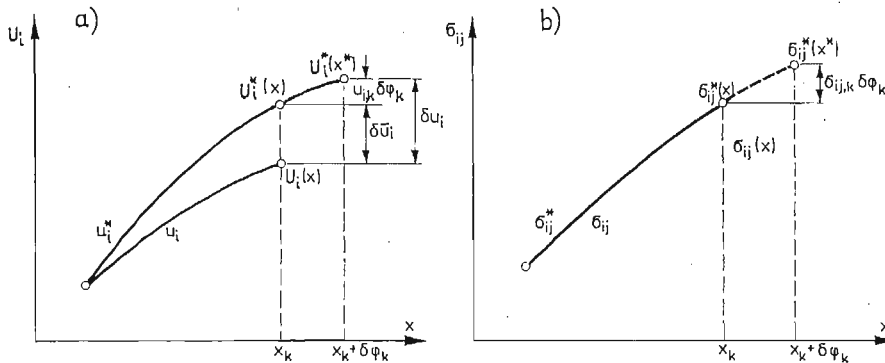


Rys. 1. Ciało B podparte na S_u i obciążone na brzegu S_i poddanym wariacji

W wyniku transformacji (3) obszar pierwotny V przechodzi w obszar V^* zaś brzeg S_i przechodzi w brzeg S_i^* . O funkcji $\delta\varphi_i$ założymy ponadto, że znika ona na brzegu S_u , tak, że kształt brzegu podpartego nie ulega zmianie podczas wariacji kształtu ciała.

Oznaczmy naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia ciała B przed wariacją kształtu przez σ_{ij} , ε_{ij} i u_i . Pola te spełniają odpowiednio równania równowagi, warunki nierozdzielności oraz warunki brzegowe na S_i i S_u . Rozpatrzmy teraz wariację pól statycznych i kinematycznych. Dla pola przemieszczeń możemy napisać, rys. 2a, [1]

$$(4) \quad u_i^*(x^*) = u_i(x) + \delta u_i(x),$$



Rys. 2a) wariacja i przedłużenie pola przemieszczeń b) przedłużenie pola naprężeń poza brzeg S_i

gdzie wariacja δu_i jest określona przez

$$(5) \quad \delta u_i = u_i^*(x) - u_i(x) + u_{i,k}(x) \delta\varphi_k = \delta \bar{u}_i + u_{i,k} \delta\varphi_k$$

i spełnia warunek

$$(6) \quad \delta u_i = 0 \text{ na } S_u.$$

Zauważmy, że δu_i przedstawia całkowitą wariację u_i , podczas gdy $\delta \bar{u}_i$ jest wariacją przemieszczeń dla ustalonej konfiguracji pierwotnej ciała B . Wariacja odkształceń wyrażona jest analogicznie do (5) i wynosi

$$(7) \quad \delta \varepsilon_{ij} = \delta \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij,k} \delta\varphi_k,$$

oraz

$$(8) \quad \varepsilon_{ij}^*(x^*) = \varepsilon_{ij}(x) + \delta \varepsilon_{ij}(x).$$

Rozpatrzmy teraz statycznie dopuszczalne przedłużenie pola naprężeń określone przez, rys. 2b

$$(9) \quad \sigma_{ij}^*(x^*) = \sigma_{ij}(x) + \sigma_{ij,k}(x) \delta \varphi_k.$$

Zatem pole naprężeń jest określone również poza brzegiem S_i i spełnia ponadto równania równowagi, skoro [1]

$$(10) \quad \sigma_{ij,j}^*(x^*) = \sigma_{ij,j}(x) + \sigma_{ij,kj}(x) \delta \varphi_k = 0.$$

Siły powierzchniowe na brzegu S_i^* wywołane naprężeniami (9) wynosić będą

$$(11) \quad T_i^*(x^*) = \sigma_{ij}^*(x^*) n_j^*,$$

gdzie n_j^* jest jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej do brzegu S_i^* . Dla konfiguracji V^* możemy zatem napisać

$$(12) \quad \int_{V^*} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_{S_u} t_i^* u_i^0 dS_u + \int_{S_i^*} T_i^* u_i^* dS_i^*.$$

Sprowadźmy teraz w równaniu (12) całkowanie po obszarze V^* i powierzchni S_i^* do całkowania po obszarze V i powierzchni S_i . Uwzględniając w jakobianie przekształcenia (3) jedynie wielkości rzędu pierwszego ze względu na $\delta \varphi_k$ otrzymamy [1]

$$(13) \quad dV^* = (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV,$$

podczas gdy element powierzchniowy $n_j^* dS_i^*$ wyrazić możemy przez [2]

$$(14) \quad n_j^* dS_i^* = (n_j + n_j \delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,j}) dS_i,$$

gdzie n_j jest jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej do pierwotnego brzegu S_i .

Uwzględniając zatem związki (4 - 11) oraz (13) i (14), równanie (12) przedstawić możemy w postaci

$$(15) \quad \int_V (\sigma_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k) (\varepsilon_{ij} + \delta \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij,k} \delta \varphi_k) (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV = \\ = \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_i} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k) (u_i + \delta \bar{u}_i + u_{i,k} \delta \varphi_k) (n_j + n_j \delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,j}) dS_i.$$

Pomijając człony wyższego rzędu niż pierwszy ze względu na $\delta \varphi_k$, $\delta \bar{\varepsilon}_{ij}$ i $\delta \bar{u}_i$ oraz wykorzystując równość

$$(16) \quad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_i} T_i^0 u_i dS_i,$$

równanie (15) możemy przedstawić w postaci

$$(17) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{S_i} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_i + \int_{S_i} [(\sigma_{ik} \delta \varphi_j - \sigma_{ij} \delta \varphi_k) u_i]_{,j} n_k dS_i,$$

która przedstawia poszukiwaną zasadę prac przygotowanych. Stosując dalej do ostatniego członu po prawej stronie równania (17) twierdzenie Stokesa, możemy go przekształcić do całki krzywoliniowej po krzywej Γ ograniczającej powierzchnię S_i . Otrzymamy zatem

$$(18) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{S_i} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_i - \oint_{\Gamma} e_{jkl} \sigma_{ij} u_i t_k^{\Gamma} \delta \varphi_l^{\Gamma} d\Gamma,$$

gdzie t_k^T jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej Γ , $\delta\varphi_i^T$ przedstawia wariację punktów powierzchni S_i na krzywej Γ zaś ϵ_{jkl} jest symbolem permutacyjnym.

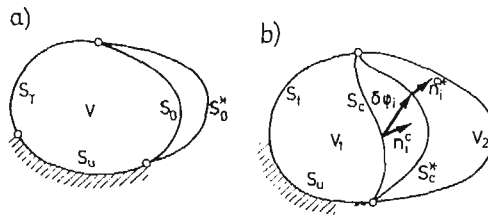
Jeżeli teraz uwzględnimy, że wariacja kształtu powierzchni S_i na ograniczającej ją krzywej Γ wynosi zero, $\delta\varphi_i^T = 0$, ostatni człon po prawej stronie (18) znika i zasada prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola przemieszczeń i kształtu powierzchni obciążonej przyjmuje postać

$$(19) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_i} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_i.$$

Rozpatrzmy teraz postać zasady (19) jeżeli brzeg S_i składa się z części obciążonej S_T na której działają niezerowe siły powierzchniowe $T_i^0 \neq 0$ i której kształt jest z góry dany, $\delta\varphi_k = 0$ na S_T , oraz nieobciążonej części S_o , której kształt podlega wariacji, $T_i^0 = 0$, $\delta\varphi_k \neq 0$ na S_o , rys. 3a. W takim przypadku równanie (19) przyjmie postać

$$(20) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_T} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_T.$$

Niech teraz dane będzie dwufazowe ciało sprężyste B ograniczone ustalonym brzegiem $S = S_u \cup S_i$ i zajmujące obszary V_1 i V_2 rozdzielone brzegiem wewnętrznym S_c , rys. 3b. Przyjmujemy, że konfiguracja ciała doznawać może nieskończenie małych wariacji określonych transformacją (3), gdzie teraz funkcje $\delta\varphi_i$ znikają na całym brzegu zewnętrznym S . W wyniku tak określonej transformacji kształt brzegu wewnętrznego S_c może podlegać wariacji, podczas gdy zewnętrzny brzeg S nie ulega zmianie.



Rys. 3a) Ciało podparte na S_u i obciążone na S_T ze swobodnym brzegiem S_o poddanym wariacji, b) Wariacja kształtu wewnętrznego brzegu S_c

Niech naprężenia, odkształcenia oraz przemieszczenia oznaczone będą odpowiednio przez $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\epsilon_{ij}^{(1)}$, $\epsilon_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(1)}$ oraz $u_i^{(2)}$ i niech spełniają odpowiednio równania równowagi, warunki nierozdzielności oraz warunki brzegowe na S_u i S_i . Ponadto na brzegu wewnętrznym S_c przemieszczenia $u_i = u_i^c$ i siły powierzchniowe $T_i^c = \sigma_{ij} n_j^c$ muszą być ciągłe podczas gdy ich gradienty mogą doznawać nieciągłości. Możemy zatem napisać [3]

$$(21) \quad \begin{aligned} [u_i^c] &= 0, & [T_i^c] &= [\sigma_{ij}] n_j^c = 0, \\ [u_{i,k}^c] &= [u_{i,n}] n_k^c, & [T_{i,k}^c] &= [T_{i,n}^c] n_k^c \end{aligned} \quad \text{na } S_c,$$

gdzie symbol $[]$ oznacza skok odpowiednich wielkości na powierzchni S_c obliczany jako ich różnica w obszarach V_1 i V_2 , np. $[f_i] = f_i^{(1)}(x) - f_i^{(2)}(x)$ dla $x \in S_c$. Jednostkowy wektor normalnej na S_c n_j^c jest skierowany na zewnątrz obszaru V_1 .

Rozpatrzymy teraz wariację pól przemieszczeń $u_i^{(1)}$ i $u_i^{(2)}$ określoną przez (5) i spełniającą warunki

$$(22) \quad \delta u_i = 0 \text{ na } S_n, \quad \delta u_i = \delta \bar{u}_i \text{ na } S_t, \quad [\delta u_i] = 0 \text{ na } S_c.$$

Uwzględniając ostatni z warunków (22) oraz równanie (5), wariacje pól przemieszczeń na S_c spełniać muszą warunek

$$(23) \quad [\delta \bar{u}_i] + [u_{i,k}] \delta \varphi_k = 0, \quad \text{na } S_c,$$

Pisząc teraz dla obu części ciała zasadę prac przygotowanych (19) i uwzględniając ciągłość sił wewnętrznych na powierzchni S_c otrzymamy

$$(24) \quad \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_t} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_t + \int_{S_c} T_i^c [\delta \bar{u}_i] dS_c,$$

gdzie T_i^0 oznaczają dane siły powierzchniowe na brzegu obciążonym S_t , zaś T_i^c są powierzchniowymi siłami wewnętrznymi na powierzchni S_c . Wykorzystując w (24) warunek (23) oraz równość

$$(25) \quad [u_{i,k}] \delta \varphi_k = [u_{i,n}] \delta \varphi_n,$$

gdzie $\delta \varphi_n$ oznacza składową normalną wariacji brzegu S_c , zasada prac przygotowanych dla równoczesnej wariacji przemieszczeń i kształtu brzegu wewnętrznego S_c przyjmuje postać

$$(26) \quad \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_t} T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_t - \int_{S_c} T_i^c [u_{i,n}] \delta \varphi_n dS_c.$$

3. Zasada uzupełniających prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola naprężeń i kształtu brzegu

Wykorzystując notację poprzedniego punktu założymy teraz, że transformacja $V \rightarrow V^*$ połączona jest z równoczesną wariacją naprężeń oraz, że pole naprężeń σ_{ij}^* jest statycznie dopuszczalne i spełnia odpowiednie warunki brzegowe. Mamy zatem

$$(27) \quad \sigma_{ij}^*(x^*) = \sigma_{ij}(x) + \delta \sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij} + \delta \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k,$$

gdzie

$$(28) \quad \delta \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^*(x) - \sigma_{ij}(x)$$

i statyczna dopuszczalność pola naprężeń wymaga, aby

$$(29) \quad \sigma_{ij,j}^* = \sigma_{ij,j} + \delta \bar{\sigma}_{ij,j} + \sigma_{ij,kj} \delta \varphi_k = 0.$$

Stąd

$$(30) \quad \delta \bar{\sigma}_{ij,j} = 0 \text{ w } V,$$

zaś siły powierzchniowe na brzegu S_t^* są określone przez

$$(31) \quad T_i^*(x^*) = \sigma_{ij}^*(x^*) n_j^*.$$

Oznaczając teraz całkowitą wariację sił powierzchniowych przez

$$(32) \quad \delta T_i^0 = T_i^*(x^*) - T_i^0(x) = \delta \sigma_{ij} n_j + \sigma_{ij} \delta n_j$$

i wykorzystując równość [2]

$$(33) \quad \delta n_j = n_j^* - n_j = n_j n_k n_l \delta \varphi_{k,l} - n_k \delta \varphi_{k,j},$$

oraz uwzględniając (27) otrzymamy z (32)

$$(34) \quad \delta \bar{\sigma}_{ij} n_j = \delta T_i^0 - T_i^0 n_k n_l \delta \varphi_{k,l} - \sigma_{ij,k} n_j \delta \varphi_k + \sigma_{ij} n_k \delta \varphi_{k,j}, \quad \text{na } S_t.$$

Przedłużając analitycznie pola przemieszczeń i odkształceń z V do V^* możemy napisać

$$(35) \quad \begin{aligned} u_i^*(x^*) &= u_i(x) + u_{i,k}(x) \delta \varphi_k, \\ \varepsilon_{ij}^*(x^*) &= \varepsilon_{ij}(x) + \varepsilon_{ij,k}(x) \delta \varphi_k. \end{aligned}$$

Zatem w konfiguracji V^* napiszemy

$$(36) \quad \int_{V^*} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_{S_u} t_i^* u_i^0 dS_u + \int_{S_t^*} T_i^* u_i^0 dS_t^*.$$

Postępując podobnie jak w poprzednim punkcie zastąpimy całkowanie w obszarach V^* i S_t^* przez całkowanie po obszarach V i S_t . Wykorzystując (13), (14) i (27 - 35) otrzymamy, pomijając czony wyższego rzędu ze względu na $\delta \varphi_k$ i $\delta \bar{\sigma}_{ij}$

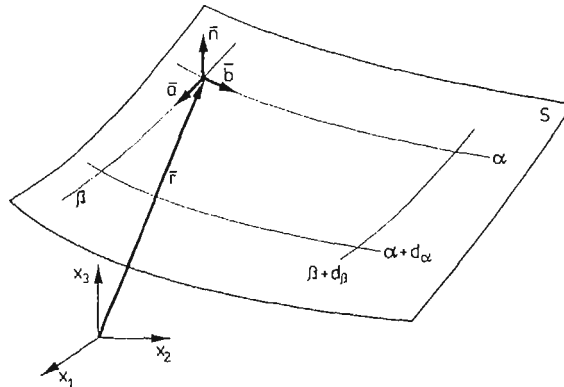
$$(37) \quad \int_V (\sigma_{ij} + \delta \bar{\sigma}_{ij}) \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} t_i^* u_i^0 dS_u + \int_{S_t} [T_i^0 u_i + \delta T_i^0 u_i + T_{i,l}^0 u_l (\delta \varphi_{k,k} - n_k n_l \delta \varphi_{k,l}) + (\sigma_{ik} \delta \varphi_j - \sigma_{ij} \delta \varphi_k) u_{i,j} n_k] dS_t.$$

Odejmując teraz (16) od (37) otrzymamy poszukiwaną zasadę uzupełniających prac przygotowanych w postaci

$$(38) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_t} [\delta T_i^0 u_i + T_i^0 u_l (\delta \varphi_{k,k} - n_k n_l \delta \varphi_{k,l}) + (\sigma_{ik} \delta \varphi_j - \sigma_{ij} \delta \varphi_k) u_{i,j} n_k] dS_t.$$

Niech teraz powierzchnia S , będzie sparametryzowana ortogonalnym krzywoliniowym układem współrzędnych α, β , rys. 4, pokrywających się z liniami głównych krzywizn na S_t i niech a_k, b_k oznaczają jednostkowe wektory styczne do linii α i β , zaś $\delta \varphi_\alpha, \delta \varphi_\beta, \delta \varphi_n$ oznaczają składowe wariacji punktów powierzchni S_t w kierunkach α, β, n , przy czym zachodzi

$$(39) \quad \delta \varphi_\alpha = a_k \delta \varphi_k, \quad \delta \varphi_\beta = b_k \delta \varphi_k, \quad \delta \varphi_n = n_k \delta \varphi_k.$$



Rys. 4. Parametryzacja powierzchni S krzywoliniowym ortogonalnym układem współrzędnych (α, β)

Uwzględniając, że dla dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej i różniczkowalnej na S_t zachodzi

$$(40) \quad f_{,k} = \frac{1}{A} f_{,\alpha} a_k + \frac{1}{B} f_{,\beta} b_k + f_{,n} n_k,$$

gdzie A^2 i B^2 są współczynnikami pierwszej formy kwadratowej powierzchni S_t , równanie (38) przekształćmy do postaci

$$(41) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + \int_{S_t} \{ (T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \\ - \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ} \}_{n_k} - T_{i,k}^0 u_i \} \delta \varphi_k dS_t + \int_{S_t} [(T_i^0 u_i n_k \delta \varphi_k)_{,\alpha} + (T_i^0 u_i n_k \delta \varphi_k)_{,\beta}] \frac{1}{AB} dS_t,$$

gdzie H oznacza średnią krzywiznę powierzchni S_t . W równaniu (41) wykorzystano ponadto równość

$$(42) \quad 2Hn_k = \frac{1}{AB} [(Ba_k)_{,\alpha} + (Ab_k)_{,\beta}].$$

Jeżeli na krzywej ograniczającej powierzchnię S_t znikają wariacje $\delta \varphi_k$, to ostatnia całka po prawej stronie (41) staje się równa zero i poszukiwana zasada uzupełniających prac przygotowanych przy równoczesnej wariacji pola naprężeń i kształtu brzegu obciążonego przyjmuje postać

$$(43) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + \int_{S_t} \{ [(T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \\ - \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ}] n_k - T_{i,k}^0 u_i \} \delta \varphi_k dS_t.$$

Zauważmy, że zasada (43) (jak również (19)) jest słuszna zarówno w przypadku gdy siły powierzchniowe na S_t są siłami zachowawczymi jak również w przypadku sił niezachowawczych.

Niech teraz powierzchnia S_t składa się z obciążonej części S_T o zadanym kształcie, $T_i^0 \neq 0$ $\delta \varphi_k = 0$ na S_T , i nieobciążonej części S_0 której kształt może podlegać zmianom, $T_i^0 = 0$ $\delta \varphi_k \neq 0$ na S_0 . W takim przypadku z równania (43) otrzymamy

$$(44) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u - \int_{S_0} \sigma_{IJ} \varepsilon_{IJ} \delta \varphi_n dS_0.$$

Wprowadzając na S_0 lokalny prostokątny układ współrzędnych (y_k) z osią y_3 normalną do S_0 i osiami y_1 i y_2 leżącymi w płaszczyźnie stycznej do S_0 , z równania (44) otrzymamy zasadę uzupełniających prac przygotowanych w postaci

$$(45) \quad \int_V \delta \bar{\sigma}_{IJ} \varepsilon_{IJ} dV = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u - \int_{S_0} \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} \delta \varphi_n dS_0, \quad k, l = 1, 2,$$

gdzie ostatni człon po prawej stronie przedstawia iloczyn „wewnętrznych” naprężeń i odpowiednich odkształceń.

Równie łatwo otrzymać możemy zasadę uzupełniających prac przygotowanych w przypadku wariacji kształtu wewnętrznej powierzchni S_c ciała dwufazowego rozdzielającego materiały o różnych własnościach sprężystych, rys. 3b. Korzystając z notacji wprowadzonej

w poprzednim punkcie oraz uwzględniając ciągłość przemieszczeń oraz sił powierzchniowych i ich wariacji na S_c , z równania (43) napisanego dla obu części ciała otrzymamy

$$(46) \quad \int_{V_1} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \int_{S_c} \{ [(T_i^e u_i^e)_n] n_k^e - [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] n_k^e - [T_{i,k}^e] u_i^e \} \delta \varphi_k dS_c.$$

Uwzględniając teraz warunki (21) oraz równość

$$(47) \quad [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] = [\sigma_{kl}] \varepsilon_{kl} + \sigma_{in} [\varepsilon_{in}] \quad \text{na } S_c$$

gdzie σ_{kl} i ε_{kl} ($k, l = 1, 2$) oznaczają „wewnętrzne” naprężenia i odkształcenia w kierunku osi k, l leżących w płaszczyźnie stycznej do S_c i $\sigma_{in} = T_i^e$ ($i = 1, 2, 3; n = 3$) są „zewnątrznymi” naprężeniami działającymi na nieciągłych odkształceniach $[\varepsilon_{in}] = [u_{i,n}^e]$, z równania (46) otrzymamy poszukiwaną zasadę uzupełniających prac przygotowanych w postaci

$$(48) \quad \int_{V_1} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} \delta \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 = \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u - \int_{S_c} [\sigma_{kl}] \varepsilon_{kl} \delta \varphi_n dS_c \quad k, l = 1, 2.$$

gdzie ostatni człon po prawej stronie przedstawia iloczyn skoku „wewnętrznych” naprężeń i odpowiednich odkształceń, które są ciągłe.

4. Warunki optymalności kształtu brzegu ciała

Rozpatrzmy teraz problem optymalnego projektowania kształtu brzegu ciała. Dyskusję naszą ograniczymy do projektowania kształtu konstrukcji przy którym osiąga ona minimalną podatność (maksymalną sztywność) w klasie ciał o danym z góry całkowitym koszcie materiału. Tego rodzaju projektowanie proponowane było po raz pierwszy przez WASIUTYŃSKIEGO [4]. Generalne sformułowanie problemu trójwymiarowego rozpatrywane było przez MROZA [5, 6], który podał globalne warunki optymalności w przypadku projektowania kształtu brzegu swobodnego ciała, a rozszerzenie na inne ograniczenia rozpatrywane było przez PRAGERA [7]. DEMS i MRÓZ [8, 9] rozpatrywali zagadnienia wieloparametrowej optymalizacji kształtu brzegu swobodnego i wewnętrznego konstrukcji wykonanych z materiałów fizycznie nieliniowych. W pracy [8] rozpatrzono ponadto algorytm numerycznego rozwiązania problemu metodą elementów skończonych. Problem optymalnego kształtu skręcącego pręta przyrzątecznego rozwiązywany był przez DEMSA [10]. W przedstawionej pracy rozszerzymy rozważania zawarte w pracach [8, 9] na zagadnienie optymalnego projektowania kształtu brzegu obciążonego konstrukcji wykonanej z materiału fizycznie nieliniowego, przy czym rozpatrzmy obciążenie siłami zachowawczymi, jak również siłami niezachowawczymi, zależnymi od konfiguracji brzegu. Dalej wykażemy równoważność warunków optymalizacji przy projektowaniu na minimum podatności i maksimum sztywności konstrukcji.

Rozpatrzmy ciało B pokazane na rys. 1 i wyznaczmy warunki optymalności kształtu brzegu obciążonego przy projektowaniu na minimum podatności. Całkowity koszt materiału konstrukcji określimy jako

$$(49) \quad C = cV$$

gdzie c jest jednostkowym kosztem materiału, zaś V oznacza objętość ciała. Przyjmijmy całkowitą energię uzupełniającą jako miarę globalnej podatności konstrukcji

$$(50) \quad \pi_\sigma = \int_V W(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u.$$

Zauważmy, że dla jednorodnej funkcji gęstości energii uzupełniającej, z uwagi na (2), zachodzi

$$(51) \quad \pi_\sigma = \frac{1}{n+1} \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t, \quad \text{dla} \quad S_u = 0,$$

$$(52) \quad \pi_\sigma = -\frac{n}{n+1} \int_{S_u} t_i u_i^0 dS_u \quad \text{dla} \quad S_t = 0$$

i całkowita energia uzupełniająca jest proporcjonalna do pracy sił powierzchniowych na S_u lub S_t . Problem optymalizacji

$$(53) \quad \min. \pi_\sigma \quad \text{dla} \quad C \leq C_0$$

gdzie C_0 jest danym z góry całkowitym kosztem materiału konstrukcji, może być zastąpiony przez poszukiwanie warunków stacjonarności funkcjonału

$$(54) \quad \pi'_\sigma(\sigma_{ij}, \varphi_k, \lambda) = \pi_\sigma + \lambda(C - C_0)$$

gdzie λ jest dodatnim mnożnikiem Lagrange'a. Pierwsza wariacja funkcjonału (54) z uwagi na σ_{ij} , φ_k i λ wynosi [1]

$$(55) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_V \delta\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} dV + \int_{S_t} W n_k \delta\varphi_k dS_t - \int_{S_u} \delta t_i u_i^0 dS_u + \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t + \delta\lambda(C - C_0).$$

Wykorzystując zasadę uzupełniających prac przygotowanych (43) otrzymamy warunek stacjonarności

$$(56) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_{S_u} \{ [W + (T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] n_k - T_{i,k}^0 u_i \} \delta\varphi_k dS_t + \\ + \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t + \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Rozpatrzmy teraz wariację sił powierzchniowych δT_i^0 . W przypadku zachowawczego pola sił napiszemy

$$(57) \quad T_i^0 = T_i^0[u_i(x)]$$

i wariację sił powierzchniowych spowodowaną zmianą kształtu brzegu S_t określimy przez

$$(58) \quad \delta T_i^0 = T_{i,k}^0 \delta\varphi_k.$$

Uwzględniając teraz (58) w warunku stacjonarności (56) oraz wykorzystując (39) otrzymamy

$$(59) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_{S_t} [W + (T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda c] \delta\varphi_n dS_t + \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Z uwagi na niezależność wariacji $\delta\varphi_n$, $\delta\lambda$ z równania (59) otrzymujemy lokalne warunki optymalności kształtu brzegu obciążonego siłami zachowawczymi w postaci

$$(60) \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W + 2T_i^0 u_i H - (T_i^0 u_i)_{,n} = \lambda c \quad \text{na } S_t, \quad C = C_0.$$

Jako przykład niezachowawczego pola sił, rozpatrzmy siły powierzchniowe zależne od punktu i konfiguracji powierzchni S_t , $T_i^0 = T_i^0(x_k, S_t)$, dane w postaci

$$(61) \quad T_i^0 = p(x_k)n_i,$$

gdzie n_i oznacza wektor jednostkowy normalnej zewnętrznej do S_t , zaś $p(x_k)$ jest funkcją punktu. Tak więc równanie (61) przedstawia sobą obciążenie brzegu zmiennym ciśnieniem p skierowanym stale wzdłuż normalnej do powierzchni S_t . Tego rodzaju obciążenie występuje przy projektowaniu np. zbiorników ciśnieniowych, zapór wodnych itp.

Wykorzystując (33), wariację sił (61) spowodowaną zmianą kształtu brzegu przedstawimy w postaci

$$(62) \quad \delta T_i^0 = \delta p(x_k)n_i + p(x_k)\delta n_i = p_{,k}n_i\delta\varphi_k + p(n_i n_k \delta\varphi_{k,n} - n_k \delta\varphi_{k,i}),$$

zaś pracę wariacji sił δT_i^0 na przemieszczeniach u_i wyrazimy przez

$$(63) \quad \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t = \int_{S_t} \{ [2pn_i u_i H - (pn_i u_i)_{,n} + (pu_i)_{,i}n_k + (pn_i)_{,k}u_i] \delta\varphi_k dS_t.$$

Uwzględniając teraz (61) i (63) w (56) oraz wykorzystując (39) otrzymamy warunek stacjonarności

$$(64) \quad \delta\pi'_\sigma = \int_{S_t} [W - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + (pu_i)_{,i} + \lambda c] \delta\varphi_n dS_t + \delta\lambda(C - C_0) = 0,$$

skąd z uwagi na niezależność wariacji $\delta\varphi_n$, $\delta\lambda$ otrzymamy lokalne warunki optymalności kształtu brzegu obciążonego niezachowawczymi siłami normalnymi do brzegu

$$(65) \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W - (pu_i)_{,i} = \lambda c \quad \text{na } S_t, \quad C = C_0.$$

Poszukiwane warunki optymalności, korzystając z pojęcia energii potencjalnej, otrzymamy stosując podobny tok postępowania. Przyjmijmy energię potencjalną

$$(66) \quad \pi_u = \int_V U(\varepsilon_{ij})dV - \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t,$$

jako miarę globalnej sztywności konstrukcji. Problem optymalizacji sformułujemy teraz następująco

$$(67) \quad \max. \pi_u \quad \text{dla } C \leq C_0.$$

Warunki optymalności wyznaczmy rozpatrując funkcjonal

$$(68) \quad \pi'_u(u_i, T_i^0, \varphi_k, \lambda) = \pi_u - \lambda(C - C_0),$$

którego pierwsza wariacja wynosi

$$(69) \quad \delta\pi'_u = \int \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{S_t} U n_k \delta\varphi_k dS_t - \delta \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t - \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t - \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Wariację pracy sił powierzchniowych wyrazimy jako

$$(70) \quad \delta \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t = \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + T_i^0 \delta u_i dS_t + T_i^0 u_i \delta(dS_t).$$

Wykorzystując teraz (5) oraz równość [2]

$$(71) \quad \delta(dS_t) = (\delta\varphi_{k,k} - n_k \delta\varphi_{k,n}) dS_t,$$

równanie (70) przedstawimy w postaci

$$(72) \quad \delta \int_{S_t} T_i^0 u_i dS_t = \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t + T_i^0 \delta \bar{u}_i dS_t + [(T_i^0 u_i)_{,n} - 2T_i^0 u_i H] n_k \delta\varphi_k dS_t - \\ - T_{i,k}^0 u_i \delta\varphi_k dS_t + \frac{1}{AB} [(T_i^0 u_i B a_k \delta\varphi_k)_{,\alpha} + (T_i^0 u_i A b_k \delta\varphi_k)_{,\beta}] dS_t,$$

gdzie ostatni człon po prawej stronie staje się równy zeru, jeżeli na krzywej Γ ograniczającej powierzchnię S_t wariacja $\delta\varphi_k = 0$.

Wykorzystując teraz w równaniu (69) zasadę prac przygotowanych (19) oraz równanie (72) otrzymamy warunek stacjonarności funkcjonału (68) w postaci

$$(73) \quad \delta\pi'_u = \int_{S_t} \{ [U - (T_i^0 u_i)_{,n} + 2T_i^0 u_i H] n_k + T_{i,k}^0 u_i \} \delta\varphi_k dS_t - \int_{S_t} \delta T_i^0 u_i dS_t - \\ - \lambda c \int_{S_t} n_k \delta\varphi_k dS_t - \delta\lambda(C - C_0) = 0.$$

Jeżeli powierzchnia S_t jest obciążona zachowawczym układem sił (57), których wariacja wyrażona jest przez (58), z równania (73) otrzymamy lokalne warunki optymalności

$$(74) \quad U - (T_i^0 u_i)_{,n} + 2T_i^0 u_i H = \lambda c \text{ na } S_t, \quad C = C_0.$$

W przypadku niezachowawczego pola sił (61), którego wariacja określona jest przez równania (62 - 63), lokalne warunki optymalności kształtu brzegu S_t , otrzymane z równania (73) przyjmują postać

$$(75) \quad U - (p u_i)_{,i} = \lambda c \text{ na } S_t, \quad C = C_0.$$

Zauważmy równocześnie, że równoważność globalnych warunków (56) i (73) lub lokalnych (60) i (74) oraz (65) i (75) wynika bezpośrednio z równości

$$(76) \quad U + W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Jeżeli teraz optymalizacji będzie podlegać kształt brzegu swobodnego S_0 ciała ($T_i^0 = \delta T_i^0 = 0$ na S_0 , równania (56, 73)), to z równania (56) otrzymamy lokalny warunek optymalności w postaci

$$(77) \quad \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W = \lambda c \text{ na } S_0, \quad C = C_0,$$

lub, z równania (73), [8]

$$(78) \quad U = \lambda c \text{ na } S_0, \quad C = C_0.$$

Równie łatwo otrzymać możemy warunki optymalności kształtu brzegu wewnętrznego ciała, rys. 3, rozdzielającego materiały o różnych własnościach sprężystych w klasie ciał o danym całkowitym koszcie materiału określonym teraz przez

$$(79) \quad C = c_1 V_1 + c_2 V_2 \leq C_0,$$

gdzie c_1 i c_2 są jednostkowymi kosztami obu materiałów.

Minimalizacja całkowitej energii uzupełniającej π_σ , przy wykorzystaniu zasady uzupełniających prac przygotowanych (48) prowadzi do lokalnych warunków optymalności kształtu powierzchni wewnętrznej, danych w postaci [9]

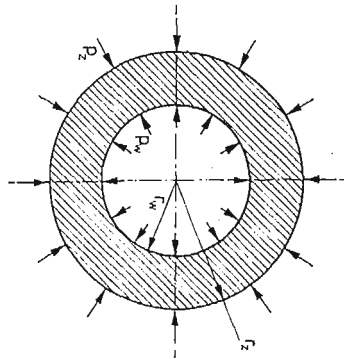
$$(80) \quad [\sigma_{kl}] \varepsilon_{kl} - [W] = \lambda(c_1 - c_2) \text{ na } S_c, \quad C = C_0,$$

zaś maksymalizacja energii potencjalnej π_u , przy wykorzystaniu zasady (26), prowadzi do warunków optymalności postaci [9]

$$(81) \quad [U] - T_i^0 [u_{i,n}] = \lambda(c_1 - c_2) \text{ na } S_c, \quad C = C_0.$$

5. Przykład optymalizacji kształtu brzegu obciążonego

Jako prostą ilustrację wykorzystania otrzymanych w poprzednim punkcie warunków optymalności rozpatrzmy problem optymalnego projektowania grubościennej rury kołowej obciążonej stałym ciśnieniem wewnętrznym p_w i zewnętrznym p_z , rys. 5. Rura o we-



Rys. 5. Rura kołowa poddana stałemu ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu

wnętrznym promieniu r_w i zewnętrznym r_z wykonana jest z materiału liniowo sprężystego. Problem optymalizacji ograniczony jest do wyznaczenia wartości promieni r_w i r_z , dla których podatność rury osiąga minimum, przy zachowaniu stałego pola powierzchni przekroju poprzecznego rury. Zakładając całkowity koszt rury jako proporcjonalny do pola powierzchni jej przekroju otrzymamy

$$(82) \quad C = c\pi(r_z^2 - r_w^2).$$

Całkowita energia uzupełniająca rury, odniesiona do jednostki jej długości, wynosić będzie

$$(83) \quad \pi_\sigma = \frac{1}{2E} \int_{r_w}^{r_z} (\sigma_r^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2) r dr,$$

gdzie σ_r i σ_t oznaczają naprężenia promieniowe i obwodowe, zaś E i ν są stałymi sprężystości. Równanie równowagi

$$(84) \quad \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0,$$

uzupełnione jest warunkami brzegowymi

$$(85) \quad \begin{aligned} T_r^0 &= -\sigma_r = +p_w, & T_t^0 &= 0 & \text{dla } r &= r_w, \\ T_r^0 &= \sigma_r = -p_z, & T_t^0 &= 0 & \text{dla } r &= r_z. \end{aligned}$$

Powyższe równania uzupełnimy warunkiem stacjonarności (65), wyrażonym przez naprężenia w postaci

$$(86) \quad \begin{aligned} (\sigma_t + p_w)^2 - 2p_w^2(1-\nu) &= 2\lambda cE, & \text{dla } r &= r_w, \\ (\sigma_t + p_z)^2 - 2p_z^2(1-\nu) &= 2\lambda cE, & \text{dla } r &= r_z. \end{aligned}$$

Równanie (84) spełnimy tożsamościowo, przyjmując pole naprężeń w postaci [11]

$$(87) \quad \sigma_r = \frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_t = -\frac{A}{r^2} + B,$$

zaś warunki brzegowe (85) są spełnione, gdy

$$(88) \quad A = \frac{r_w^2 r_z^2}{r_z^2 - r_w^2} (p_z - p_w), \quad B = \frac{p_w r_w^2 - p_z r_z^2}{r_z^2 - r_w^2}.$$

Warunki optymalności (86), przy uwzględnieniu związków (87) i przedstawimy w postaci

$$(89) \quad \begin{aligned} 2r_z^4(p_w - p_z)^2 - p_w^2(r_z^2 - r_w^2)^2(1-\nu) &= \lambda cE(r_z^2 - r_w^2)^2, \\ 2r_w^4(p_w - p_z)^2 - p_w^2(r_z^2 - r_w^2)^2(1-\nu) &= \lambda cE(r_z^2 - r_w^2)^2. \end{aligned}$$

Ograniczenie nałożone na całkowity koszt materiału rury, z uwagi na (82) wyrazimy w postaci

$$(90) \quad r_z^2 - r_w^2 = q$$

gdzie $q > 1$ jest danym kosztem względnym projektowania.

Rozwiązując układ równań (89 - 90) wyznaczmy poszukiwane wartości optymalnych promieni r_w i r_z

$$(91) \quad r_w = \frac{1}{2} \sqrt{q \frac{(3-\nu)p_z - (1+\nu)p_w}{p_w - p_z}}, \quad r_z = \frac{1}{2} \sqrt{q \frac{(3-\nu)p_w - (1+\nu)p_z}{p_w - p_z}},$$

przy czym musi zachodzić

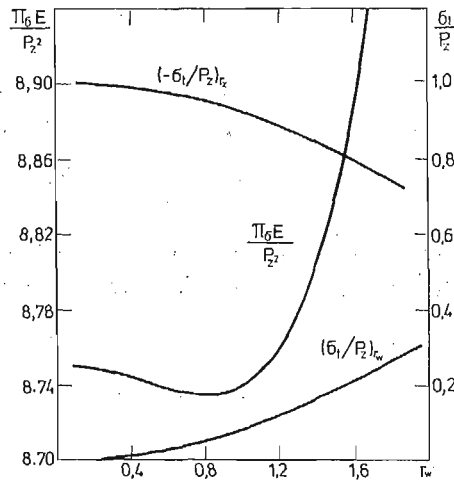
$$(92) \quad 1 < \frac{p_w}{p_z} < \frac{3-\nu}{1+\nu}.$$

Jeżeli nierówność (92) nie jest spełniona, równania warunków optymalności (89) nie mają rozwiązań rzeczywistych.

Podatność rury (83), wykorzystując (87) i (88) przedstawimy w postaci

$$(93) \quad \pi_\sigma = \frac{1}{2qE} [(1+\nu)r_w^2 r_z^2 (p_z - p_w)^2 + (1-\nu)(p_w r_w^2 - p_z r_z^2)^2]$$

Rysunek 6 przedstawia zmianę podatności rury o ustalonym koszcie względnym projektowania w przypadku $\nu = 0.3$ jako funkcję promienia wewnętrznego r_w , dla ustalonego stosunku ciśnień p_w/p_z . Dodatkowo pokazana jest zmiana wartości naprężeń



Rys. 6. Zmiana podatności rury i naprężeń obwodowych w funkcji promienia wewnętrznego ($\nu = 0.3$, $q = 25$, $p_w/p_z = 2$).

obwodowych σ , na wewnętrznym i zewnętrznym brzegu rury. Łatwo zauważyć, że wartości r_w i r_z spełniające warunki optymalności (91) odpowiadają globalnemu minimum podatności rury.

6. Wnioski

Wyznaczone zasady prac przygotowanych i uzupełniających prac przygotowanych tworzą podstawy do rozpatrywania szerokiej klasy problemów optymalnego projektowania konstrukcji. W przedstawionej pracy rozpatrzono problem projektowania sztywnościowego konstrukcji. Jednakże rozszerzenie na inne kryteria optymalizacyjne, jak np. podatność dynamiczna, stateczność, projektowanie naprężeniowe [7] czy też projektowanie na minimum dowolnego funkcjonału zależnego od pól naprężeń i odkształceń, może być uzyskane równie łatwo, skoro znane są odpowiednie zasady wariacyjne.

Otrzymane warunki optymalności tworzą układ nieliniowych równań pozwalających wyznaczyć parametry generujące kształt optymalnego brzegu. Rozwiązanie takiego układu jest ogólnie możliwe przy zastosowaniu procesów iteracyjnych analizy-syntezy, co było dyskutowane w [8], gdzie do rozwiązania problemu optymalizacji kształtu brzegu wykorzystano metodę elementów skończonych.

Należy również wspomnieć, że wyznaczone zasady wariacyjne, oprócz problemów optymalnego projektowania, pozwalają na rozpatrywanie w podobny sposób problemów o innej „naturze” fizycznej, jak np. propagacja pęknięć, transformacja faz itp., gdzie kształt nieznaney powierzchni stanowi część rozwiązania.

Literatura cytowana w tekście

1. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa, 1972.
2. R. HILL, *Aspects of Invariance in Solid Mechanics*, Advances in Applied Mechanics, **18**, 1978, 1 - 75.
3. R. HILL, *Discontinuity relations in mechanics of solids*, Progress in Solid Mechanics, vol. II, North Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1961.
4. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present stage of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Revs., **16**, 341 - 350, 1963.
5. Z. MRÓZ, *Limit analysis of plastic structures subject to boundary variations*, Arch. Mech. Stos., **15**, 63, 76, 1963.
6. Z. MRÓZ, *Optimal design of structures of composite materials*, Int. J. Sol. Struct., **6**, 859 - 870, 1970.
7. W. PRAGER, *Optimality criteria in structural design*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **61**, 794 - 796, 1968.
8. K. DEMS, Z. MRÓZ, *Multiparameter structural shape optimization by the finite element method*, Int. J. Num. Meth. Eng., **13**, 247 - 263, 1979.
9. K. DEMS, Z. MRÓZ, *Optimal shape design of multi-composite structures*, J. Struct. Mech. **8**, 3, 309 - 329, 1980
10. K. DEMS, *Multiparameter shape optimization of elastic bars in torsion*, Int. J. Num. Meth. Eng. **15**, 1517 - 1539, 1980
11. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa, 1969.

Р е з ю м е

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРАВИЛА МЕХАНИКИ ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ
И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ОПТИМАЛИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ

В работе выведены вариационные правила механики для случая, когда форма границы, окружающей тело, может изменяться. Рассмотрены сохраняющиеся и не сохраняющиеся поля сил в зависимости от конфигурации границы. Проанализирована возможность оптимизации формы границы, окружающей упругое тело, с точки зрения минимизации ее уступчивости и определены необходимые условия оптимальности для случая изменяющихся нагруженных и свободных границ, а также для случая изменяющейся внутренней границы, разделяющей материалы с различными упругими свойствами.

S u m m a r y

THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF MECHANICS FOR VARIABLE DOMAINS AND THEIR UTILIZATION FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION

The paper provides the virtual displacement and stress principles in the case when the simultaneous variation of external or internal boundaries bounding an elastic body is considered. Both the conservative and nonconservative, dependent on boundary configuration load systems are considered. Next, we consider the problem of mean compliance design of a structure with unspecified in advance shape. The optimality conditions are generated for the case of optimal shape design of loaded and free external boundaries as well as for design of interfaces separating materials of different stiffness.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1980 roku.