

ANALIZA KONSTRUKCJI PRĘTOWO-TARCZOWYCH METODĄ
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

EUGENIUSZ RUSIŃSKI (WROCLAW)

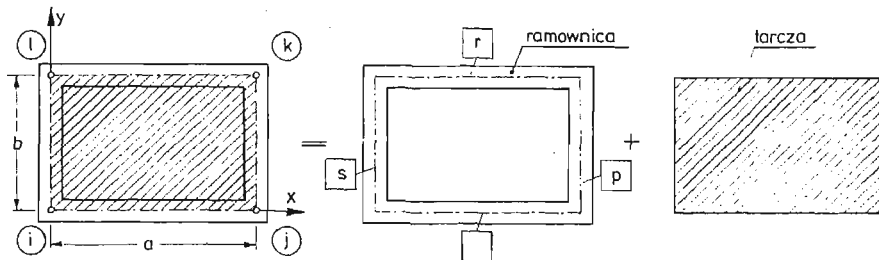
1. Wstęp

W metodzie elementów skończonych, jak wiadomo, istotną sprawą jest wyznaczenie macierzy sztywności, za pomocą której wyraża się siły uogólnione w węzłach w funkcji przemieszczeń węzłowych. W konstrukcjach prętowo-tarczowych występują elementy prętowe i tarczowe. Znane są w postaci jawnej macierze sztywności zarówno pręta, jak i tarczy, które zostały omówione m.in. w [1], [2], ..., [9]. Dla przeprowadzenia analizy konstrukcji prętowo-tarczowej i skrócenia czasu liczenia na EMC, celowe jest określenie w postaci jawnej macierzy sztywności elementu prętowo-tarczowego. Pozwoli to bezpośrednio podzielić konstrukcję tylko na elementy prętowo-tarczowe.

2. Określenie macierzy sztywności elementu prostokątnego prętowo-tarczowego

Istnieją dwie drogi określenia macierzy sztywności na drodze energetycznej lub też, jak to czyni się w niniejszej pracy, metodą superpozycji, polegającej na złożeniu macierzy sztywności ramownicy składającej się z 4 prętów i macierzy sztywności samej tarczy (rys. 1). Macierz sztywności elementu prętowo-tarczowego wyraża się równaniem

$$(2.1.) \quad [k_{r-i}] = [k_r] + [k_t],$$



Rys. 1. Prostokątny element prętowo-tarczowy.

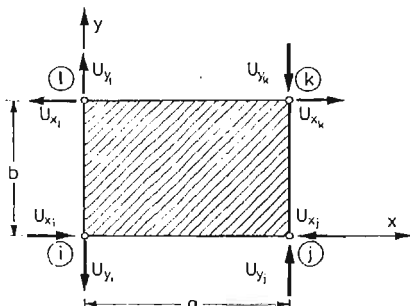
gdzie: $[k_r]$ — macierz sztywności ramownicy prętowej,

$[k_t]$ — macierz sztywności elementu tarczy.

Prostokątny element tarczy połączony jest z dowolnymi elementami prętowymi n , p , r , s wzdłuż krawędzi tarczy w sposób ciągły (rys. 1). Przy formułowaniu funkcji kształtu

tarczy, w celu zapewnienia ciągłości połączenia prętów z tarczą, przyjmuje się jednakowe przemieszczenia dla tarczy i prętów w miejscu połączenia.

2.1. Macierz sztywności prostokątnego elementu tarczy. Przedstawiony na rys. 2 typowy element prostokątny o węzłach i, j, k, l numerowanych odwrotnie do ruchu wskazówek



Rys. 2. Prostokątny element tarczy.

zegara, ma początek układu współrzędnych w węźle i . Macierz sztywności takiego elementu ma postać:

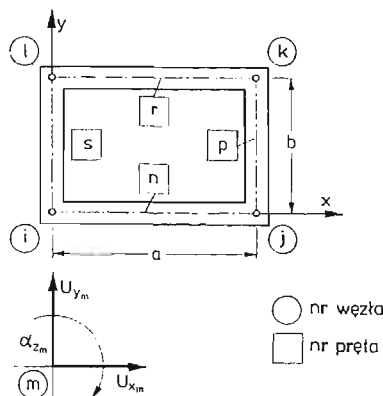
$$(2.1.1.) \quad [k_t] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \times$$

	z_1	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{1}{2}z_1$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_3	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_4	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_5	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{1}{2}z_4$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	z_6
	z_1	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_3	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{1}{2}z_1$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_2	$\frac{3}{2}(1-\nu)$
\times	z_4	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{1}{2}z_4$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_5	$-\frac{1}{2}z_4$
	z_1	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_4	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_3	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_5	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_1	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$
	z_5	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	z_4	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_3	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$
	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_3	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_6	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_2	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$
	z_6	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	z_6	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$

Wyprowadzenie macierzy sztywności prostokątnego elementu tarczy dla układu współrzędnych w środku ciężkości zostało przedstawione w pracach [2 i 4].

2.2. Macierz sztywności ramownicy jednoobwodowej. Rozważana ramownica jest zbudowana z czterech prętów (n, p, r i s) połączonych ze sobą sztywno (rys. 3). Macierz sztywności $[k_r]$ takiej ramownicy jest zbudowana z macierzy sztywności $[k]$ poszczególnych elementów prętowych transponowanych do układu współrzędnych ramownicy. Wyprowadzenia

macierzy sztywności pręta obustronnie utwierdzonego przedstawiono między innymi w pracach [1], [4], [5], [6], [8]. Macierze sztywności przykładowego pręta „n” ma postać:



Rys. 3. Ramownica prostokątna jednoobwodowa.

$$(2.2.1.) \quad [k^n] = \begin{bmatrix} \frac{EF_n}{a} & 0 & 0 & -\frac{EF_n}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{zn}}{a^3} & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} & 0 & -\frac{12EJ_{zn}}{a^3} & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} \\ 0 & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} & \frac{4EJ_{zn}}{a} & 0 & \frac{2EJ_{zn}}{a} & \frac{2EJ_{zn}}{a} \\ 0 & 0 & \frac{4EJ_{zn}}{a} & \frac{EF_n}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_{zn}}{a^3} & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_{zn}}{a^2} & \frac{4EJ_{zn}}{a} \end{bmatrix}$$

Transformację poszczególnych macierzy sztywności prętów (2.2.1.) przedstawić można zależnością

$$(2.2.2.) \quad \dots \quad [k^m] = [C]^T [k^m]' [C]$$

gdzie:

$[C]$ — macierz transformacji z układu globalnego ramownicy do układu lokalnego pręta o wymiarze (3×3) ,

$[C]^T$ — macierz transponowana macierzy transformacji. Macierz transformacji ma postać

$$(2.2.3) \quad [C] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku kąt β przyjmuje dwie wartości (rys. 3), zależnie od położenia pręta w ramownicy, 0° lub 90° . Uwzględniając (2.2.1) i (2.2.2) oraz dokonując przekształceń macierz sztywności ramownicy (rys. 3) przedstawić można w postaci

$$(2.2.4) \quad [k_r] = E \begin{bmatrix} [k_{i-i}^{n+s}] & [k_{i-j}^n] & 0 & [k_{i-l}^s] \\ [k_{j-i}^n] & [k_{j-j}^{n+p}] & [k_{j-k}^p] & 0 \\ 0 & [k_{k-j}^p] & [k_{k-k}^{p+k}] & [k_{k-l}^r] \\ [k_{i-i}^s] & 0 & [k_{i-k}^r] & [k_{i-l}^{r+l}] \end{bmatrix} \begin{matrix} ,,i'' \\ ,,j'' \\ ,,k'' \\ ,,l'' \end{matrix}$$

gdzie: elementy $[k_{i-j}]$ są podmacierzami kwadratowymi o wymiarach (3×3) . Podmacierze te wyznaczono w postaci jawnej i przykładowo wynoszą:

$$(2.2.5) \quad [k_{i-i}^{n+s}] = \begin{bmatrix} \frac{F_n}{a} + \frac{12J_{z_s}}{b^3} & 0 & \frac{6J_{z_s}}{b^2} \\ 0 & \frac{12J_{z_n}}{a^3} + \frac{F_s}{b} & \frac{6J_{z_s}}{a^2} \\ \frac{6J_{z_s}}{b^2} & \frac{6J_{z_n}}{a^2} & 4\left(\frac{J_{z_n}}{a} + \frac{J_{z_s}}{b}\right) \end{bmatrix},$$

$$[k_{i-j}^n] = \begin{bmatrix} -\frac{F_n}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J_{z_n}}{a^3} & \frac{6J_{z_n}}{a^2} \\ 0 & -\frac{6J_{z_n}}{a^2} & \frac{2J_{z_n}}{a} \end{bmatrix},$$

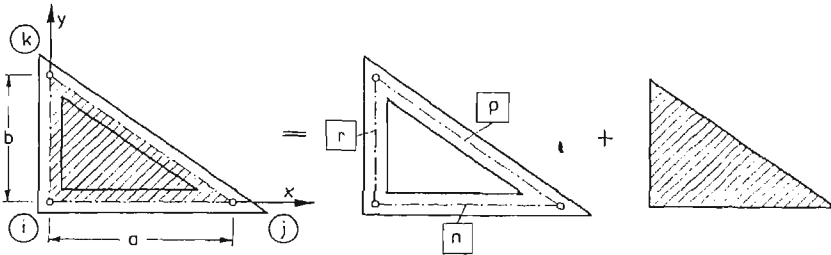
$$[k_{i-l}^s] = \begin{bmatrix} -\frac{12J_{z_s}}{b^3} & 0 & \frac{6J_{z_s}}{b^2} \\ 0 & -\frac{F_s}{b} & 0 \\ -\frac{6J_{z_s}}{b^2} & 0 & \frac{2J_{z_s}}{b} \end{bmatrix},$$

gdzie a i b , J_z , F oznaczają odpowiednio: długości prętów, moment bezwładności na zgięcie i pole przekroju pręta.

2.3. Macierz sztywności elementu prostokątnego prętowo-tarczowego. Po określeniu macierzy sztywności prostokątnego elementu tarczy (2.1.14) oraz macierzy sztywności ramownicy (2.2.4) przeprowadzono dodawanie dwóch macierzy według (1). Dodawanie to nie jest wykonywane wprost, gdyż macierz opisana równaniem (2.1.14) jest o wymiarze (8×8) i w tej macierzy występują tylko przemieszczenia u_x , u_y w każdym węźle. Natomiast w węzłach ramownicy oprócz przemieszczeń liniowych u_x , u_y występuje obrót α_z względem osi z . Dlatego też do węzłów tarczy wprowadza się dodatkowo zerowy pozorny obrót $\alpha'_z = 0$ względem osi z , w wyniku czego uzyskuje się macierz sztywności tarczy o wymiarze (12×12) . Po przekształceniach i dodaniu obu macierzy otrzymano w jawnej postaci macierz sztywności elementu prostokątnego prętowo-tarczowego (tabl. 1).

3. Macierz sztywności elementu trójkątnego prętowo-tarczowego

Postępując podobnie jak wyżej wyznacza się macierz sztywności elementu trójkątnego, składającego się z tarczy połączonej na swoich krawędziach w ogólnym przypadku z trzema dowolnymi prętami (rys. 4).



Rys. 4. Trójkątny element prętowo-tarczowy.

Kolejność numeracji węzłów jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara: $i-j-k$. Grubość tarczy jest stała i wynosi t . Układ współrzędnych lokalnych jest zaczepiony w węzle. Rozważa się płaski stan naprężeń. Stan przemieszczeń wewnątrz elementu jest podobny jak w elemencie prostokątnym (rozdz. 2). Wyznaczoną w ten sposób macierz sztywności elementu trójkątnego prętowotarczowego zamieszczono w tablicy 2.

4. Program PRTA

Przedstawiono obliczenia konstrukcji z podziałem na elementy prętowo-tarczowe, wg metody elementów skończonych, został zaprogramowany na maszynie cyfrową, pod nazwą PRTA. Program ten napisano w języku FORTRAN 1900 i uruchomiono go na maszynie cyfrowej serii ODRA 1300. Obliczenia można prowadzić dla dowolnych konstrukcji płaskich obciążonych w płaszczyźnie, składających się z elementów:

- prętowo-tarczowych (prostokątnych i trójkątnych),
- prętowych (ramy płaskie),
- tarczowych (prostokątnych i trójkątnych).

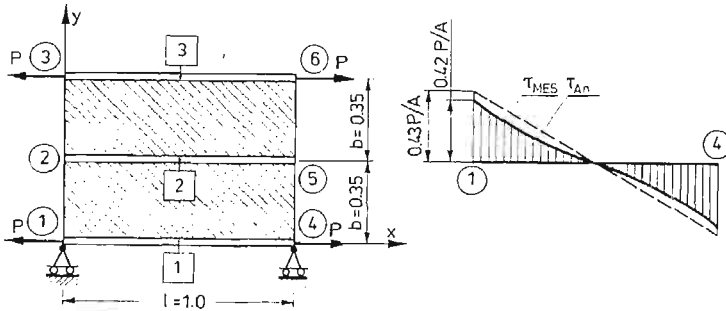
Pręty o stałym przekroju, w połączeniu z tarczą stanowią jej uźebrowanie lub wzmocnienie brzegów. Obciążenie zewnętrzne musi być przykładane w węzłach elementu.

W danych do programu należy podać wielkości geometryczne prętów, tarcz i obciążeń zewnętrznych. Jako wyniki otrzymuje się przemieszczenia poszczególnych węzłów konstrukcji, siły wewnętrzne w prętach i tarczach. Ponadto otrzymuje się naprężenia pochodzące od momentu gnącego σ_g , ściskające lub rozciągające σ_c i sumaryczne σ_{sum} — w prętach, odkształcenia bezwzględne ε_x , ε_y , γ_{xy} oraz naprężenia σ_x , σ_y i τ_{xy} — w tarczach.

Ograniczenia programu stanowi ogólna liczba elementów $m \leq 300$, co wynika z pojemności pamięci operacyjnej maszyny serii ODRA 1300. Jednak jest ona zupełnie wystarczająca dla celów praktycznych.

5. Przykład liczbowy

W celu sprawdzenia poprawności działań programu wykonano szereg obliczeń testujących. Uzyskane wyniki obliczenia prostych konstrukcji prętowo-tarczowych porównywano z wynikami otrzymanymi metodami analitycznymi [10, 11, 12]. Porównanie to wykazało, że już przy podziale na niewielką liczbę elementów uzyskuje się dobrą zgodność z wynikami otrzymanymi z rozwiązań analitycznych. Przeprowadzono przykładowo obliczenia konstrukcji prętowo-tarczowej obciążonej czterema siłami skupionymi (rys. 5). Konstrukcję



Rys. 5. Przykład konstrukcji prętowo-tarczowej: a) układ obciążeń, b) rozkład naprężeń stycznych. MES — metoda elementów skończonych, A_n — rozwiązanie ścisłe.

podzielono na dwa prostokątne elementy prętowo-tarczowe (Tablica 1) zawierająca po 4 węzły każdy, w elementach tych występują tylko 2 pręty na przeciwległych bokach. Wartości naprężeń w prętach omawianej konstrukcji (rys. 5) według rozwiązania [10] wynoszą:

$$\sigma_4 = -\sigma_1 = \sigma_6 = -\sigma_3 = \frac{P}{A}, \quad \sigma_2 = \sigma_5 = 0,$$

a maksymalna bezwzględna wartość naprężeń stycznych

$$\tau_{\max} = 0,42 \frac{P}{A}$$

Natomiast wartości naprężeń, uzyskane przy wykorzystaniu omawianej macierzy sztywności w MES wynoszą:

$$\sigma_4 = -\sigma_1 = \sigma_6 = -\sigma_3 = 0,80 \frac{P}{A}, \quad \sigma_2 = -\sigma_5 = -0,04 \frac{P}{A}$$

a maksymalne naprężenie styczne

$$\tau_{\max} = 0,43 \frac{P}{A}$$

Największy błąd uzyskanych wyników występuje w prętach nr 1, 3 i wynosi 20%, ale obliczenia wg [10] dają w tym przypadku zawyżone wartości. Mianowicie zakłada się, że w węzłach przyłożenia sił (rys. 5), obciążenie to jest przenoszone tylko przez pręty, a w rzeczywistości część obciążenia przenosi tarcza co uwzględniono w przedstawionej pracy, która jest sztywno połączona z prętami. Natomiast w pręcie nr 2 wynosi 4%, a dla

naprężeń stycznych 1%. Należy przypuszczać, że przy zwiększaniu liczby elementów, na którą podzielono konstrukcję, otrzymane wyniki będą jeszcze bliższe rozwiązaniu dokładnemu.

Reasumując stwierdza się, że przeprowadzenie analizy wytrzymałościowej konstrukcji o elementach prętowo-tarczowych, z uwzględnieniem macierzy sztywności (tab. 1 i 2), pozwala w znaczny sposób skrócić efektywny czas liczenia oraz mniejszą pamięć EMC.

Literatura cytowana w tekście

1. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw — Hill 1968.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw — Hill 1967.
3. J. H. ARGYRIS, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Aircraft Eng. **26**,1954, **27**,1955.
4. CH. MASSONNET, G. DEPREZ, R. MAQUOL, R. MÜLLER, G. FONDER, *Calcul des structures sur ordinateur*, Tome I, Analyse matricielle des structures. Paris 1972.
5. G. RAKOWSKI, *Metoda elementów skończonych w mechanice budowli*, Inżynieria i Budownictwo, nr 2,1971.
6. E. RUSIŃSKI, J. TEISSEYRE, *Die Berechnungs methoden mit Torsionsmoment belasteten räumlichen Stabtragwerke*, Politechnika Wroclawska, IKiEM, Komunikat nr 238,1977.
7. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty*. Biuletyn WAT, nr 4, 200, 1969 r.
8. J. SZMELTER, M. DACKO, S. PYRAK, *Analiza statyczna przestrzennych układów prętowych metodą elementów skończonych*, Poradnik Konstruktora nr 7,1972.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady Warszawa 1972.
10. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji* PWN, Warszawa 1965.
11. S. TIMOSHENKO, S. WOINOSKY — KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
12. Z. KAŹCZKOWSKI, *Płyty, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.

Резюме

АНАЛИЗ СТЕРЖНЕ-СКЛАДЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлен метод расчета любых стержне-складчатых конструкций методом конечных элементов. Приведены в явном виде матрицы жесткости прямоугольного и треугольного стержне-складчатого элемента с тремя степенями свободы. В стержне-складчатом элементе учтена любая форма сечения каждого стержня. Определены также матрицы жесткости прямоугольной складки и рамной конструкции, состоящей из 4 стержней. Программа PRТА написана на языке ФОРТРАН 1900 и тестирована на цифровой вычислительной машине ОДРА 1300. Работа проиллюстрирована проверочным примером.

Summary

AN ANALYSIS OF THE ROD-SHIELD CONSTRUCTIONS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

The way of calculating any rod-shield construction by the finite element method is shown in the paper. The rigidity matrix of the rod-shield construction elements of a rectangular and triangular shape with three degrees of freedom is given. In a rod-shield element any shape of the rod cross-section may be applied.

The rigidity matrix of a rectangular shield and of a four bars frame is also given in the paper. The PRTA programme was written in the FORTRAN 1900 language and was tested on the ODRA 1300 computer. The paper is illustrated with an example.

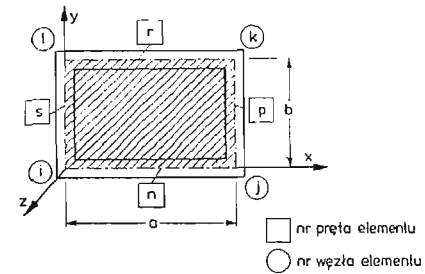
POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1979 roku.

$$[k_{r-i}] = Ex$$

Tablica 1. Macierz sztywności prostokątnego elementu prętowo-tarczowego

$\frac{F_n}{a} + \frac{12I_{z_s}}{b^3} + z'_1$	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	$\frac{6I_{z_s}}{b^2}$	$-\frac{F_n}{a} + z'_2$	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	0	$-\frac{z'_1}{2}$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	0	$-\frac{12I_{z_s}}{b^3} + z'_3$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$\frac{6I_{z_s}}{b^2}$
	$\frac{12I_{z_n}}{a^3} + \frac{F_s}{b} + z'_4$	$\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{12I_{z_n}}{a^3} + z'_5$	$\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{z'_4}{2}$	0	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{F_s}{b} + z'_5$	0
	S	$4\left(\frac{6I_{z_n}}{a^2} + \frac{I_{z_n}}{b}\right)$	0	$-\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{2I_{z_n}}{a}$	0	0	0	$-\frac{6I_{z_s}}{b^2}$	0	$\frac{2I_{z_s}}{b}$
$z'_1 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{4b}{a} + \frac{2a}{b} (1-\nu) \right]$		Y	$\frac{F_n}{a} + \frac{12I_{z_p}}{b^3} + z'_1$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	$-\frac{12I_{z_p}}{b^3} + z'_3$	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	$-\frac{z'_1}{2}$	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	0
$z'_2 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[-\frac{4b}{a} + \frac{a}{b} (1-\nu) \right]$			M	$\frac{12I_{z_n}}{a^3} + \frac{F_p}{b} + z'_4$	$-\frac{6I_{z_n}}{a^2}$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{F_p}{b} + z'_6$	0	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{z'_4}{2}$	0
$z'_3 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{2b}{a} - \frac{2a}{b} (1-\nu) \right]$				E	$4\left(\frac{I_{z_n}}{a} + \frac{I_{z_p}}{b}\right)$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	0	$\frac{2I_{z_p}}{b}$	0	0	0
$z'_4 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{4a}{b} + \frac{2b}{a} (1-\nu) \right]$					T	$\frac{12I_{z_p}}{b^3} + \frac{F_r}{a} + z'_1$	$\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{6I_{z_p}}{b^2}$	$-\frac{F_r}{a} + z'_2$	$-\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	0
$z'_5 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} (1-\nu) \right]$						R	$\frac{F_p}{b} + \frac{12I_{z_r}}{a^3} + z'_4$	$\frac{6I_{z_r}}{a^2}$	$\frac{t(1-3\nu)}{8(1-\nu^2)}$	$-\frac{12I_{z_r}}{a^3} + z'_5$	$\frac{6I_{z_r}}{a^2}$
$z'_6 = \frac{t}{12(1-\nu^2)} \left[-\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} (1-\nu) \right]$							I	$4\left(\frac{I_{z_p}}{b} + \frac{I_{z_r}}{a}\right)$	0	$-\frac{6I_{z_r}}{a^2}$	$\frac{2I_{z_r}}{a}$
								A	$\frac{F_r}{a} + \frac{12I_{z_s}}{b^3} + z'_1$	$-\frac{t}{8(1-\nu)}$	$-\frac{6I_{z_s}}{b^2}$
									$\frac{12I_{z_r}}{a^3} + \frac{F_s}{b} + z'_4$		$-\frac{6I_{z_r}}{a^2}$
											$4\left(\frac{I_{z_r}}{a} + \frac{I_{z_s}}{b}\right)$



$$[k_{r-i}] = E \times$$

Tablica 2. Macierz sztywności trójkątnego elementu prętowo-tarczowego

	$\frac{F_n}{a} + \frac{12I_z}{b^3} + e_1$	$\frac{\nu+1}{2ab} A_2$	$\frac{6I_{zr}}{b^2}$	$-\frac{F_n}{a} - \frac{1}{a^2} A_2$	$-\frac{1-\nu}{2ab} A_2$	0	$-\frac{12I_{zr}}{b^3} - \frac{1-\nu}{2b^2} A_2$	$-\frac{\nu}{ab} A_2$	$\frac{6I_{zr}}{b^2}$
$d^2 = a^2 + b^2$	S	$\frac{12I_{zn}}{a^3} + \frac{F_r}{b} + e_2$	$\frac{6I_{zn}}{a^2}$	$-\frac{\nu}{ab} A_2$	$-\frac{12I_{zn}}{a^3} - \frac{1-\nu}{2a^2} A_2$	$\frac{6I_{zn}}{a^2}$	$-\frac{1-\nu}{2ab} A_2$	$-\frac{F_r}{b} - \frac{1}{b^2} A_2$	0
$A_2 = \frac{abt}{2(1-\nu^2)}$		Y	$4\left(\frac{I_{zn}}{a} + \frac{I_{zr}}{b}\right)$	0	$-\frac{6I_{zn}}{a^2}$	$\frac{2I_{zn}}{a}$	$-\frac{6I_{zr}}{b^2}$	0	$\frac{2I_{zr}}{b}$
$e_1 = A_2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1-\nu}{2b^2}\right)$			M	$e_3 + \frac{A_2}{a^2}$	e_4	$+\frac{6I_{zp}}{d^2} y$	$-\frac{F_p}{d} x^2 - \frac{12I_{zn}}{d^3} y^2$	$-e_4 + \frac{\nu A_2}{ab}$	$+\frac{6I_{zp}}{d^2} y$
$e_2 = A_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1-\nu}{2a^2}\right)$				E	$e_5 + \frac{1-\nu}{2a^2} A_2$	$6\left(\frac{I_{zp}}{d^2} x - \frac{I_{zn}}{a^2}\right)$	$-e_4 + \frac{1-\nu}{2ab} A_2$	$-\frac{F_p}{d} y^2 - \frac{12I_{zp}}{d^3} x^2$	$\frac{6I_{zp}}{d^2} x$
$e_3 = \frac{F_n}{a} + \frac{F_p}{d} x^2 + \frac{12I_{zp}}{d^3} y^2$					T	$4\left(\frac{I_{zn}}{a} + \frac{I_{zp}}{d}\right)$	$-\frac{6I_{zp}}{d^2} y$	$-\frac{6I_{zp}}{d^2} x$	$\frac{2I_{zp}}{d}$
$e_4 = -xy\left(\frac{F_p}{d} - \frac{12I_{zp}}{d^3}\right)$						R	$e_6 + \frac{1-\nu}{2b^2} A_2$	e_4	$6\left(-\frac{I_{zp}}{d^2} y - \frac{I_{zr}}{b^2}\right)$
$e_5 = \frac{F_p}{d} y^2 + 12\left(\frac{I_{zn}}{a^3} + \frac{I_{zp}}{d^3} x^2\right)$							I	e_7	$-\frac{6I_{zp}}{d^2} x$
$e_6 = \frac{F_p}{d} x^2 + 12\left(\frac{I_{zr}}{b^3} + \frac{I_{zp}}{d^3} y^2\right)$								A	$4\left(\frac{I_{zr}}{b} + \frac{I_{zp}}{d}\right)$
$e_7 = \frac{F_r}{b} + \frac{F_p}{d} y^2 + \frac{12I_{zp}}{d^3} x^2$									
$x = -\frac{a}{d}, \quad y = \frac{b}{d}$									

