

WYBOCZENIE CIENKIEJ POWŁOKI PRZY OBCIĄŻENIACH OBROTOWO SYMETRYCZNYCH POZA GRANICĄ SPRĘŻYSTOŚCI

JERZY ZIELNICA, MARIA KWIEK (POZNAŃ)

1. Wstęp, założenia i oznaczenia

W pracy wyprowadzono zależności oraz przedstawiono metodę obliczeń obciążeń krytycznych dla cienkiej sprężysto-plastycznej powłoki w kształcie stożka ściętego pod wpływem podstawowych obciążeń typu obrotowo-symetrycznego, tj.:

- poprzeczne ciśnienie równomierne,
- wszechstronne równomierne obciążenie hydrostatyczne,
- siła wzdłużna ściskająca skierowana wzdłuż tworzącej.

Wykorzystując podejście SHANLEYA, dopuszczające wzrastanie obciążenia i rozwijanie się stref procesów biernych w wyniku powstawania pozakrytycznych ugięć, dla każdego z wyszczególnionych przypadków podano zależności dla obliczania obciążeń krytycznych według dwóch podstawowych teorii plastyczności, tj. teorii deformacyjnej i teorii plastycznego płynięcia. Uwzględniono ściśliwość materiału powłoki i przyjęto charakterystykę umocnienia typu liniowego. Do rozwiązania równań wyjściowych wykorzystano metodę ortogonalizacyjną.

Przy uwzględnieniu niejednorodnego rozkładu naprężeń w powłoce w stanie przedkrytycznym i wprowadzeniu badania warunku uplastycznienia typu H-M-H uzyskano zależności pozwalające na obliczanie obciążeń krytycznych dla powłoki całkowicie lub częściowo uplastycznionej, a nawet dla powłoki znajdującej się przed wybozczeniem w stanie sprężystym. W wyniku analizy stwierdzono, że związki wyjściowe uzyskane na bazie teorii plastycznego płynięcia są prostsze i wygodniejsze dla praktycznego wykorzystania. Przy wykorzystaniu teorii deformacyjnej obliczanie obciążeń krytycznych wymaga stosowania metod iteracyjnych i całkowania numerycznego.

W pracach [4, 5] przedstawiono analizę stateczności poza granicą sprężystości powłoki stożkowej obciążonej wszechstronnym równomiernym ciśnieniem hydrostatycznym przy założeniu charakterystyki umocnienia materiału typu potęgowego. Wyprowadzone w tych pracach związki wyjściowe posiadały rozbudowaną strukturę; stosowanie ich do obliczania obciążeń krytycznych było ograniczone do przypadków gdy cała powłoka przed utratą stateczności przeszła w stan plastyczny. Tego dość silnego ograniczenia, zawężającego zakres możliwych rozwiązań, niniejsza praca nie zawiera. W pracy niniejszej przyjęto liniową charakterystykę umocnienia materiału [6], a poprzez całkowanie przez części po ortogonalizacji uniknięto konieczności różniczkowania współczynników macierzy sztywności, które z uwagi na niejednorodny stan naprężeń w stanie dokrytycznym zależą

od współrzędnych geometrycznych, przez co zależności wyjściowe przyjęły zwartą postać. Zakłada się ponadto, że materiał powłoki jest izotropowy i ściśliwy. Obowiązują hipotezy Kirchhoffa-Love'a (w powłoce panuje płaski stan naprężenia, obowiązuje hipoteza niewydłużalnego odcinka normalnego) i zajmujemy się dowolną formą utraty stateczności. Analizę opieramy na koncepcji wzrastającego obciążenia, która, pomimo złożoności, umożliwia uzyskanie związków fizycznych w postaci rozprężniętej i daje rezultaty bardziej zbliżone do danych eksperymentalnych. Przegląd ważniejszych prac, tematycznie związanych z niniejszą, można znaleźć w pracy przeglądowej [2], oraz w pracach [1, 4, 5].

Poniżej zestawiono ważniejsze oznaczenia stosowane w pracy:

- E_c — moduł sieczny,
- $E_k = E_1$ — moduł styczny lub moduł wzmocnienia liniowego,
- E, G — moduły sprężystości podłużnej i poprzecznej,
- ν — liczba Poissona,
- q — równomierne ciśnienie działające na powierzchnię boczną powłoki,
- σ — wszechstronne równomierne ciśnienie hydrostatyczne,
- N_a — siła wzdłużna rozłożona równomiernie, przyłożona do górnej podstawy powłoki,
- q^*, σ^*, N_a^* — argumenty miejsca zerowego,
- σ_i, ε_i — intensywność naprężeń i odkształceń,
- $m, 2n$ — parametry — liczba półfal wzdłuż tworzącej i po obwodzie przy wyboczeniu,
- σ_{pl} — granica plastyczności,
- N_{10}, N_{20}, T_{10} — siły stanu błonowego,
- w, Φ — funkcja ugięcia i funkcja sił,
- $\varepsilon_\alpha, \kappa_\alpha, \varepsilon_{12}, \gamma_{12}$ — odkształcenia i zmiany krzywizn powierzchni podstawowej powłoki,
- $\bar{\sigma}_s = \sigma_s/\sigma_1, \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/\sigma_1, \bar{\tau}_{s\theta} = \tau_{s\theta}/\sigma_1$ — względne naprężenia odpowiednio w kierunku podłużnym, obwodowym i styczne,
- \tilde{A}_i, \tilde{B}_i — całki numeryczne w równaniu stateczności,
- $(\cdot)_{,s}; (\cdot)_{,\theta}$ — różniczkowanie względem odpowiedniej współrzędnej,
- s_1, s_2 — odległość od wierzchołka do górnej i dolnej podstawy wzdłuż tworzącej,
- h — grubość powłoki,
- β — kąt pochylenia tworzącej przy podstawie.

2. Sformułowanie problemu i podstawowe związki wyjściowe

Rozważamy cienkościenną powłokę w kształcie stożka ściętego, swobodnie podpartą na brzegach, obciążoną w sposób dowolny, obrotowosymetryczny. Zakładamy, że przed utratą stateczności w powłoce istnieje bezmomentowy niejednorodny stan naprężeń o siłach wewnętrznych: $N_{10}, N_{20}, T_{10}, T_{20}$, a wymiary powłoki i materiał są takie, że

przy aktywnym i proporcjonalnym narastaniu składowych tensora naprężeń, wyboczenie może nastąpić po osiągnięciu granicy sprężystości. Jeżeli przyjmiemy, że w chwili wyboczenia powłoka ulega uplastycznieniu, a strefy lokalnych odciążenia powstają dopiero w wyniku ugięć powłoki, wówczas dochodzimy do stosowanej tutaj koncepcji wzrastającego obciążenia. Przy takim podejściu rozwijaniu się stref procesów biernych towarzyszy wzrost obciążenia ponad wartość krytyczną, a kąt pochylenia krzywej $\sigma_i = \sigma_i(w)$ w punkcie bifurkacji jest na ogół różny od zera. Koncepcja ta została zaproponowana przez SHANLEYA do analizy wyboczenia prętów i zastosowana przez STOWELLA, ILIUSZYNA i GRIGOLUKA dla płyt i powłok.

Równania stateczności powłoki stożkowej zostały wyprowadzone w pracy [4]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \Phi_{,ss} \sin \beta + \delta M_{s,ss} s \cos \beta + 2 \delta M_{s,s} \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \delta M_{\theta,\theta\theta} - \delta M_{\theta,s} \cos \beta + \\ & + \frac{2}{s} \delta M_{s\theta,\theta} + 2 \delta M_{s\theta,s\theta} + \left(\frac{1}{s \cos \beta} w_{,\theta\theta} + \cos \beta w_{,s} \right) N_{20} + s \cos \beta w_{,ss} N_{10} + \\ & + 2 \left(w_{,s\theta} - \frac{1}{s} w_{,\theta} \right) T_{10} = 0, \\ & w_{,ss} \sin \beta - \delta \gamma_{s\theta,s\theta} - \frac{1}{s} \delta \gamma_{s\theta,\theta} + \delta \varepsilon_{\theta,ss} s \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \delta \varepsilon_{s,\theta\theta} + 2 \delta \varepsilon_{\theta,s} \cos \beta - \\ & \delta \varepsilon_{s,s} \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Równanie (2.1)₁ wynika z warunków równowagi elementu po utracie stateczności, natomiast (2.1)₂ jest równaniem nierozdzielności odkształceń. $\delta M_s, \dots, \delta N_s, \dots$ oznaczają wariacje sił i momentów wywołane w powłoce przez utratę stateczności, $\delta \varepsilon_s, \delta \varepsilon_{\theta}, \delta \gamma_{s\theta}$ — wariacje odkształceń w powłoce.

Według hipotezy Kirchhoffa-Love'a wariacje wydłużeń dowolnego odcinka powłoki zależą od wydłużenia elementu powierzchni podstawowej i zmiany krzywizn

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_s &= \delta \varepsilon_1 - x_3 \delta \kappa_1, \\ \delta \varepsilon_{\theta} &= \delta \varepsilon_2 - x_3 \delta \kappa_2, \\ \delta \gamma_{s\theta} &= \delta \gamma_{12} - x_3 \delta \kappa_{12}, \end{aligned}$$

gdzie x_3 jest współrzędną normalną do powierzchni podstawowej, przy czym $-\frac{h}{2} \leq x_3 \leq +\frac{h}{2}$.

Wariacje krzywizn w powłoce są określone następująco

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \delta \kappa_1 &= w_{,ss} & \delta \kappa_2 &= \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} w_{,\theta\theta} - \frac{\sin \beta}{s^2 \cos^2 \beta} v_{,\theta}, \\ \delta \kappa_{12} &= \frac{1}{s \cos \beta} w_{,s\theta} - \frac{1}{s^2 \cos \beta} w_{,\theta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{2s} v_{,s} - \frac{v}{s^2} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Siły i momenty w powłoce jakie powstaną w wyniku utraty stateczności uzyskamy całkując po grubości powłoki wariacje naprężeń

$$(2.5) \quad \delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3,$$

gdzie $\delta\sigma_{\alpha\beta}$ oznacza wariacje naprężeń, które należy określić ze związków fizycznych. Zgodnie z teorią małych odkształceń sprężysto-plastycznych NADAI-A-HENCKYEGO [6] mamy

$$(2.5) \quad \sigma_{IJ} = 2m(\varepsilon_I) \varepsilon_{IJ} + [3K - 2m(\varepsilon_I)] \varepsilon_m \delta_{IJ}$$

gdzie należy dokonać wariacji składowych tensora naprężenia. Według stowarzyszonego prawa płynięcia PRANDTLA-REUSSA, po dokonaniu wariacji tensora odkształcenia mamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \delta\varepsilon_s &= \frac{1}{E} (\delta\sigma_s - \nu\delta\sigma_\Theta) + \frac{1}{E} \omega_k \left(\sigma_s - \frac{1}{2}\sigma_\Theta \right) \frac{\delta\sigma_I}{\sigma_I}, \quad (\overline{s, \Theta}) \\ \delta\gamma_{s\Theta} &= \frac{1}{G} \delta\tau_{s\Theta} + \frac{3}{E} \omega_k \tau_{s\Theta} \frac{\delta\sigma_I}{\sigma_I}, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_I^2 = \sigma_s^2 + \sigma_\Theta^2 - \sigma_s\sigma_\Theta + 3\tau_{s\Theta}^2$, $\omega_k = E/E_k - 1$.

Związki (2.6) należy odwrócić ze względu na wariacje naprężeń. Po rozwinięciu, a następnie podstawieniu (2.5) i (2.6) do (2.4) i scałkowaniu dostaniemy wzory, które dla skrócenia zapisu podajemy w zapisie macierzowym

$$(2.7) \quad \delta\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \delta\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$(2.8) \quad \delta\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \delta\boldsymbol{\kappa},$$

gdzie \mathbf{E} i \mathbf{D} są macierzami sztywności

$$(2.9) \quad \{E_{IJ}\} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & -E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & -E_{23} \\ -E_{31} & -E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}, \quad \{D_{IJ}\} = \begin{vmatrix} -D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & -D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & -D_{33} \end{vmatrix},$$

natomiast $\delta\mathbf{N}$ i $\delta\mathbf{M}$ są wektorami kolumnowymi sił i momentów.

$$(2.10) \quad \delta\mathbf{N} = \{\delta N_s, \delta N_\Theta, \delta N_{s\Theta}\}, \quad \delta\mathbf{M} = \{\delta M_s, \delta M_\Theta, \delta M_{s\Theta}\},$$

a $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\delta\boldsymbol{\kappa}$ są wektorami kolumnowymi odkształceń i zmian krzywizn

$$(2.11) \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \delta\varepsilon_{12}\}, \quad \delta\boldsymbol{\kappa} = \{\delta\kappa_1, \delta\kappa_2, \delta\kappa_{12}\}.$$

Zgodnie z koncepcją SHANLEYA współczynniki E_{IJ} i D_{IJ} zależą od przyjętej teorii plastyczności, mechanicznych własności materiału w stanie sprężystym i plastycznym i od stanu naprężeń w powłoce przed utratą stateczności. Wartości ich można znaleźć w pracach [4, 5] dla obydwu podstawowych teorii plastyczności, dlatego też w pracy niniejszej ogólnej ich postaci nie przytoczymy, podamy jedynie ich wartości po określeniu charakterystyki materiału i zdefiniowaniu naprężeń stanu przedkrytycznego dla poszczególnych rodzajów obciążeń zewnętrznych. Do równania równowagi i równania nierozdzielności (2.1) wstawiamy wariacje momentów (2.8), oraz wariacje odkształceń po odwróceniu równania (2.7), tj.

$$(2.12) \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\mathbf{E}} \times \delta\mathbf{N}$$

gdzie $\overline{\mathbf{E}}$ jest odwróconą macierzą sztywności.

Do równań (2.1) wstawiamy również wyrażenia określające krzywizny (2.3) oraz wariacje sił wyrażone za pomocą funkcji sił

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \delta N_s &= \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \Phi_{,\theta\theta} + \frac{1}{s} \Phi_{,s}, & \delta N_\theta &= \Phi_{,ss}, \\ \delta N_{s\theta} &= -\frac{1}{s \cos \beta} \Phi_{,s\theta} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \Phi_{,\theta}. \end{aligned}$$

Pomimo obrotowej symetrii obciążenia, w powłoce panuje niejednorodny rozkład uapreżeń w stanie przedkrytycznym, stąd E_{ij} i D_{ij} są funkcjami argumentu s , a dla przyjętych rodzajów obciążeń znikają siły i naprężenia tnące, co powoduje że $E_{\alpha 3} = E_{3\alpha} = D_{\alpha 3} = D_{3\alpha} = 0$. Po uporządkowaniu równania (2.1) przyjmą postać

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\Phi_{,ss} \sin \beta - D_{11} s \cos \beta w_{,ssss} - 2 \cos \beta (s D_{11})_{,s} w_{,sss} + \cos \beta \left[- \left(s D_{11,ss} + D_{12,s} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 D_{11,s} - \frac{1}{s} D_{22} \right) + N_{10} \right] w_{,ss} + \cos \beta \left(- D_{12,ss} + \frac{1}{s} D_{22,s} - \frac{1}{s^2} D_{22} + \right. \\ &\quad \left. + N_{20} \right) w_{,s} + \frac{2}{s \cos \beta} (D_{33} - D_{21}) w_{,ss\theta\theta} + \frac{2}{s \cos \beta} \left[\frac{1}{s} (D_{12} - D_{33}) + D_{33,s} - \right. \\ &\quad \left. - D_{12,s} \right] w_{,s\theta\theta} + \frac{1}{s \cos \beta} \left[- D_{12,ss} + \frac{1}{s} (2 D_{12,s} + D_{22,s} - 2 D_{33,s}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{s^2} (D_{12} + D_{22} - D_{33}) - N_{20} \right] w_{,\theta\theta} - \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} D_{22} w_{,\theta\theta\theta\theta} = 0, \\ &w_{,ss} \sin \beta + \bar{E}_{22} s \cos \beta \Phi_{,ssss} + \frac{1}{s \cos \beta} (\bar{E}_{33} + 2 \bar{E}_{12}) \Phi_{,ss\theta\theta} + \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} \bar{E}_{11} \Phi_{,\theta\theta\theta\theta} + \\ &\quad + \frac{1}{s \cos \beta} \left(\bar{E}_{33,s} + 2 \bar{E}_{21,s} - \frac{2}{s} \bar{E}_{12} - \frac{1}{s} \bar{E}_{33} \right) \Phi_{,s\theta\theta} + 2 \cos \beta (s \bar{E}_{22,s} + \bar{E}_{22}) + \\ &\quad + \frac{1}{s \cos \beta} \left[\bar{E}_{21,ss} - \frac{1}{s} (\bar{E}_{33,s} + 2 \bar{E}_{21,s} + \bar{E}_{11,s}) + \frac{1}{s^2} (\bar{E}_{33} + 2 \bar{E}_{21} + 2 \bar{E}_{11}) \right] \Phi_{,\theta\theta} + \\ &\quad + \cos \beta \left(s \bar{E}_{22,ss} + 2 \bar{E}_{22,s} + \bar{E}_{21,s} - \frac{1}{s} \bar{E}_{11} \right) \Phi_{,ss} + \cos \beta \left(\bar{E}_{12,ss} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s} \bar{E}_{11,s} + \frac{1}{s^2} \bar{E}_{11} \right) \Phi_{,s} = 0. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie równań

Aby wyznaczyć obciążenie krytyczne należy rozwiązać układ równań różniczkowych cząstkowych (2.14). Układ ten sprowadzimy do równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej s przez przyjęcie funkcji ugięcia w i funkcji sił Φ w postaci podwójnych szeregów nieskończonych

$$(3.1) \quad w(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(s) \cos n \theta, \quad \Phi(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn}(s) \cos n \theta.$$

Przyjmując w pierwszym przybliżeniu po jednym wyrazie tych funkcji i podstawiając do (2.14) uzyskamy układ

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \sin \beta \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \alpha_1 \frac{d^4 w}{ds^4} + \alpha_2 \frac{d^3 w}{ds^3} + (\bar{\alpha}_3 - n^2 \alpha_5) \frac{d^2 w}{ds^2} + (\bar{\alpha}_4 - n^2 \alpha_7) \frac{dw}{ds} - \\ & \qquad \qquad \qquad - n^2 w (\bar{\alpha}_9 - n^2 \alpha_{10}) = 0, \\ & \sin \beta \frac{d^2 w}{ds^2} + \beta_5 \frac{d^3 \Phi}{ds^3} + (\beta_7 - n^2 \beta_2) \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \beta_1 \frac{d^4 \Phi}{ds^4} + (\beta_8 - n^2 \beta_4) \frac{d\Phi}{ds} + \\ & \qquad \qquad \qquad + n^2 \Phi (n^2 \beta_3 - \beta_6) = 0. \end{aligned}$$

Współczynniki α_i i β_i równań (3.2) są funkcjami zmiennej s . Układ równań (4.2) scałkujemy w sposób przybliżony metodą ortogonalizacyjną GALERKINA, przyjmując funkcje $w(s)$ i $\Phi(s)$ w postaci

$$(3.3) \quad w(s) = w_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s - s_1), \quad \Phi(s) = \Phi_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s - s_1),$$

spełniającej kinematyczne warunki brzegowe.

Zgodnie z metodą ortogonalizacyjną żądamy spełnienia warunków

$$(3.4) \quad \int_{s_1}^{s_2} F_1(s) w(s) ds = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} F_2(s) \Phi(s) ds = 0,$$

gdzie $F_1(s)$ i $F_2(s)$ oznaczają lewe strony równań (3.2).

Podstawiając (3.3) i (3.2) do (3.4) oraz wykonując całkowanie przez części wyrazów zawierających zmienne współczynniki α_i i β_i uzyskamy układ dwóch równań algebraicznych względem niewiadomych w_0 i Φ_0

$$(3.5) \quad \begin{aligned} w_0 A_{11} + \Phi_0 A_{12} &= 0, \\ w_0 A_{21} + \Phi_0 A_{22} &= 0, \end{aligned}$$

Z warunku znikania wyznacznika tego układu, tj.

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = 0$$

i po odpowiednich przekształceniach, wyznaczymy obciążenia krytyczne.

Jak już wspomniano, do analizy przyjmuje się charakterystykę umocnienia materiału typu liniowego, dla której

$$(3.7) \quad \sigma_t = \varepsilon_t E_k - \sigma_{pl} \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right).$$

Moduł styczny w zakresie plastycznym $E_k = E_1 = \text{const}$ w tym przypadku, natomiast moduł sieczny $E_c = \sigma_t / \varepsilon_t$ jest zmienny i określony charakterystyką (3.7). W momencie utraty stateczności część powłoki może znajdować się w stanie sprężystym, a część w plastycznym, stąd też konieczne jest badanie warunku uplastycznienia i przyjmowanie $E_k = E_c = E$ dla zakresu sprężystego. Moduły sieczny i styczny, wchodzące do związków fizycznych, zdefiniujemy wobec tego następująco

$$(3.8) \quad E_c = \begin{cases} E_c, & \sigma_t > \sigma_{pl} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{pl} \end{cases} \quad E_k = \begin{cases} E_1, & \sigma_t > \sigma_{pl} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{pl} \end{cases}.$$

Obecnie przejdziemy do podania wyników dla poszczególnych przypadków obciążeń.

4. Powłoka obciążona równomiernym ciśnieniem poprzecznym

Sily i naprężenia błonowego, przedkrytycznego stanu naprężeń w powłoce są określone następująco

$$(4.1) \quad N_{10} = \sigma_s h = -\frac{qs}{2\operatorname{tg}\beta} \left(1 - \frac{s_1^2}{s^2}\right), \quad N_{20} = \sigma_\varphi h = -\frac{qs}{\operatorname{tg}\beta},$$

$$\sigma_l = \frac{qs}{2h\operatorname{tg}\beta} \sqrt{3 + \left(\frac{s_1}{s}\right)^4},$$

natomiast moduł sieczny przyjmuje wartość

$$(4.2) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{qs\sqrt{\Omega_s}}}, & \sigma_l > \sigma_{pl} \\ E & \sigma \leq \sigma_{pl} \end{cases}$$

gdzie

$$k_1 = 2 \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{pl} h \operatorname{tg}\beta, \quad \Omega_s = 3 + \left(\frac{s_1}{s} \right)^4.$$

Zgodnie z (3.6) uzyskamy następujący związek określający wartość obciążenia krytycznego

$$(4.3) \quad q_{k.rn} = \left[\frac{3\pi^2 \left(\frac{\pi \sin\beta}{lh} \right)^2}{\tilde{B}_1 \cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta} \tilde{B}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta} \tilde{B}_3 - b_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos\beta} - \left(\tilde{A}_1 \cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta} \tilde{A}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta} \tilde{A}_3 + d_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos\beta \right) \right. \right] \times$$

$$\times \frac{Eh^3 \operatorname{tg}\beta}{3l \cos\beta} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[s_1^2 - \frac{1}{3l} (s_2^3 - s_1^3) \right] + \frac{2}{\cos^2\beta} n^2 \right\}^{-1}.$$

W równaniu powyższym

$$(4.4) \quad \tilde{A}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{N} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[-s d_{11} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin^2\varphi - d_{12} \frac{\pi}{l} \sin 2\varphi - \frac{1}{s} \cos^2\varphi \right] ds,$$

$$\tilde{A}_2 = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{s} \frac{\pi}{l} \left[-2d_{12} \frac{\pi}{l} \sin^2\varphi + \frac{1}{s} d_{22} \sin 2\varphi \right] + \right.$$

$$\left. + 2d_{33} \frac{1}{s} \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos^2\varphi - \frac{\pi}{l} \frac{1}{s} \sin 2\varphi + \frac{1}{s^2} \sin^2\varphi \right] \right\} ds,$$

$$\tilde{A}_3 = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{N} \frac{1}{s^3} d_{22} \sin^2\varphi ds,$$

$$\tilde{B}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{N}{M} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[s b_{22} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin^2\varphi - b_{12} \frac{\pi}{l} \sin 2\varphi + \frac{1}{s} b_{11} \cos^2\varphi \right] ds,$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_2 &= \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{N}{M} \frac{1}{s} \frac{\pi}{l} \left(2b_{12} \frac{\pi}{l} \sin^2 \varphi - \frac{1}{s} b_{11} \sin 2\varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_{33} \frac{1}{s} \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{s} \frac{\pi}{l} \sin 2\varphi + \frac{1}{s^2} \sin^2 \varphi \right] \right\} ds, \\ \tilde{B}_3 &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{N}{M} \frac{1}{s^3} b_{11} \sin^2 \varphi ds, \quad \varphi = \frac{\pi}{l} (s - s_1).\end{aligned}$$

Współczynniki występujące w zależnościach (4.10) są związane z elementami macierzy sztywności następująco

$$(4.5) \quad \begin{aligned}d_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{D_{12}(s_2)}{N(s_2)} - \frac{D_{12}(s_1)}{N(s_1)}, \\ b_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{N(s_2)}{M(s_2)} D_{12}(s_2) - \frac{N(s_1)}{M(s_1)} D_{12}(s_1), \\ d_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta}, \quad b_{11} = D_{22}, \quad b_{22} = D_{11}, \quad b_{12} = -D_{12}, \\ M &= D_{11} D_{22} - D_{12}^2.\end{aligned}$$

Elementy macierzy sztywności $D_{\alpha\beta}$ i funkcje N i M zależą od przyjętej teorii plastyczności i dla danego typu obciążenia i przyjętej charakterystyki materiału w zakresie sprężystym i plastycznym są określone następująco:

a) teoria deformacyjna (TD)

$$(4.6) \quad \begin{aligned}D_{11}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 1, & \sigma_l \leq \sigma_{p1} \\ 1 + \frac{k_1 s}{q \sqrt{3s^4 + s_1^4}} \left[1 - \frac{\left(3 + \frac{s_1^2}{s^2} \right)^2}{4 \left(3 + \frac{s_1^4}{s^4} \right)} \right], & \sigma_l > \sigma_{p1} \end{cases}, \\ D_{22}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 1, \\ 1 + \frac{3k_1 s^5}{q \sqrt{(3s^4 + s_1^4)^3}}, \end{cases} \\ D_{12}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} (2 - \nu_1), \\ \frac{3k_1 s^3 (s^2 - s_1^2)}{2q \sqrt{(3s^4 + s_1^4)^3}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_k}{2E} \nu_1 \right), \end{cases} \\ d_{33}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{2}{3 - \nu_1}, \\ \frac{2}{3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \frac{k_1 s}{q \sqrt{s_1^4 + s^4}} \right) - \nu_1}, \end{cases} \quad b_{33}^{\text{TD}} = \begin{cases} 3 - \nu_1, \\ 3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \frac{k_1 s}{q \sqrt{s_1^4 + s^4}} \right) - \nu_1, \end{cases} \\ N^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} [(3 + 2\nu_1) - \nu_1^2], \\ \frac{1}{4} \left\{ \frac{k_1 s}{q \sqrt{3s^4 + s_1^4}} \left[\left(3 \frac{E}{E_k} + \nu_1 \right) - \frac{2\nu_1 s_1^2 (3s^2 + s_1^2)}{3s^4 + s_1^4} \right] + 3 \frac{E}{E_k} + \nu_1 - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} \right\}, \end{cases}\end{aligned}$$

gdzie $\nu_1 = 1 - 2\nu$.

b) teoria plastycznego płynięcia (TPP)

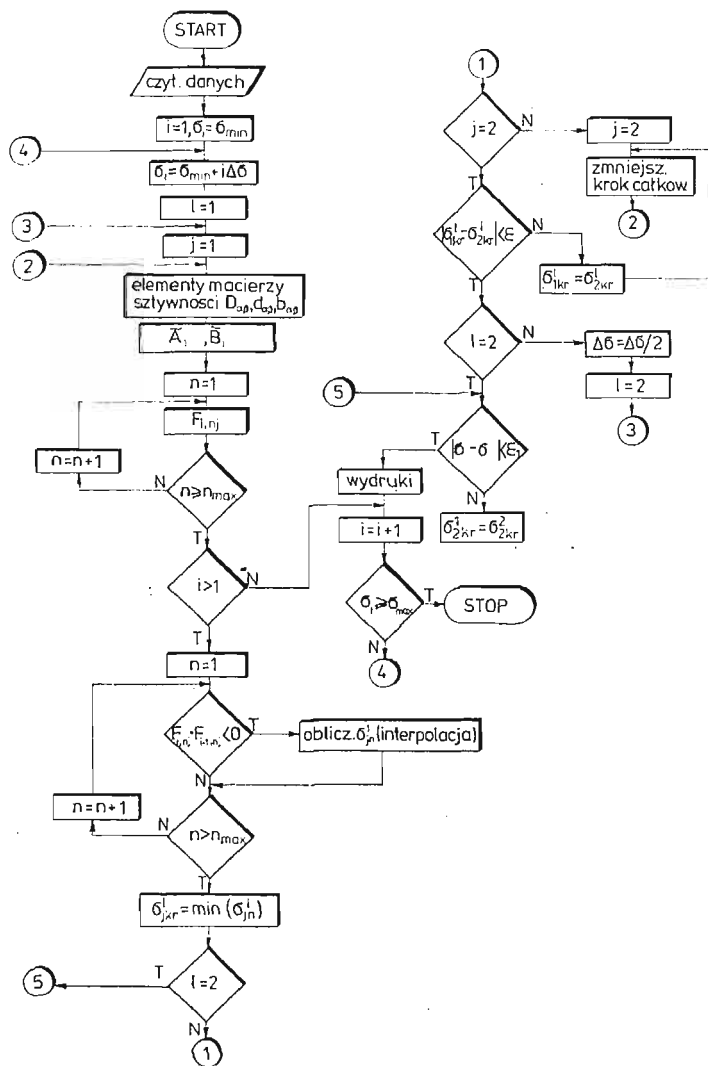
$$\begin{aligned}
 D_{11}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2\Omega_s, & \sigma_i \leq \sigma_{pl} \\ 6 + \frac{9}{2} \omega_k + 3 \left(\frac{s_1}{s} \right)^2 \omega_k + \left(2 + \frac{1}{2} \omega_k \right) \left(\frac{s_1}{s} \right)^4, & \sigma_i > \sigma_{pl} \end{cases} \\
 D_{22}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2\Omega_s, \\ 2 \left[3 + (1 + \omega_k) \left(\frac{s_1}{s} \right)^4 \right], \end{cases} \\
 (4.7) \quad D_{12}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2\nu\Omega_s, \\ 6\nu + 3\omega_k \left(\frac{s_1}{s} \right)^2 + (2\nu + \omega_k) \left(\frac{s_1}{s} \right)^4, \end{cases} \\
 d_{33}^{\text{TPP}} &= \frac{1}{1+\nu}, \quad b_{33}^{\text{TPP}} = 2(1+\nu), \\
 N^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 2(1-\nu^2)\Omega_s, \\ 6(1-\nu^2) + \frac{9}{2} \omega_k + 3(1-2\nu)\omega_k \frac{s_1^2}{s^2} + \left[2(1-\nu^2) + \frac{1}{2} \omega_k(5-4\nu) \right] \left(\frac{s_1}{s} \right)^4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Jak widać, współczynniki wg teorii deformacyjnej zależą od zmiennej s jak i od obciążenia zewnętrznego q , natomiast zgodnie z teorią plastycznego płynięcia zależą tylko od s . W związku z tym stosując teorię plastycznego płynięcia obciążenie krytyczne można otrzymać bezpośrednio ze wzoru (4.3); pozostaje jedynie obliczenie całek numerycznych \tilde{A}_i i \tilde{B}_i (4.4), których wyznaczenie w sposób ścisły jest zawile. Według teorii deformacyjnej obciążenia krytycznego bezpośrednio ze wzoru (4.3) nie można obliczyć, ponieważ przekształcenie tej zależności ze względu na q nie jest możliwe. W związku z tym podamy pewien algorytm iteracyjny. Powłoka na którą działa boczne ciśnienie równomierne traci stateczność w ten sposób, że wzdłuż tworzącej tworzy się jedna półfala; dlatego w równaniu (4.3) przyjęto $m = 1$, natomiast po obwodzie powstaje n fal, przy czym wartość n przy obciążeniu krytycznym zależy od parametrów geometrycznych powłoki. Obciążenie krytyczne q_{krn} stanowi minimalna spośród wartości $q^* = q^*(n)$ dla różnych liczb n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Obliczenia będziemy prowadzili następująco. Związek (4.3) zapiszemy w postaci

$$(4.8) \quad F_i(q, n) = L_i(q, n) - q = 0,$$

gdzie $L_i(q, n)$ oznacza prawą stronę równania (4.3). Mamy w ten sposób funkcję jednej zmiennej q i parametru n . Obliczenia, polegające na poszukiwaniu miejsc zerowych (q^*) funkcji $F_i(q, n)$ zrealizowano przy pomocy komputera po opracowaniu odpowiedniej procedury. Na rys. 1 przedstawiono uproszczony algorytm obliczeń. Po wczytaniu danych, w tym parametrów iteracji ε i ε_1 , następuje start obliczeń od $q_i = q_{min}$ (przy czym $q_{min} < < q_{krn}$) przyjętego na przykład w oparciu o wyniki dla teorii plastycznego płynięcia. Po obliczeniu elementów macierzy sztywności dla szeregu wartości argumentu $s \in (s_1, s_2)$ przy zadanym kroku całkowania i przechowaniu ich w pamięci, następuje obliczenie całek \tilde{A}_i i \tilde{B}_i i również przechowanie ich w pamięci. Pozwala to na zwiększenie efektywności obliczeń, gdyż we wyrażeniach na \tilde{A}_i i \tilde{B}_i nie występuje parametr n . Po obliczeniu $F_i(q, n)$ następują kolejne obliczenia dla $(q+k\Delta q)$, aż do osiągnięcia zmiany znaku funkcji

$F_{i+k}(q+k\Delta q, n)$. W tym momencie metodą interpolacji liniowej zostaje ustalona i zapamiętana wartość przybliżona argumentu q^* odpowiadająca miejscu zerowemu przy różnych wartościach n . Dalej następują ponowne przejścia przy zmniejszonym każdorazowo kroku Δq i badanie czy osiągnięta została odpowiednia dokładność (parametr ε). Jak widać z rys. 1, procedura przewiduje również każdorazowo badanie wpływu na wynik dokład-



Rys. 1

ności całkowania. Dokonuje się tego przez zrealizowanie ponownych przejść ze zmniejszonym za każdym razem krokiem całkowania, aż do spełnienia związku $(\sigma_{2kr}^2 - \sigma_{1kr}^1) < \varepsilon_1$, gdzie ε_1 jest parametrem całkowania, a σ_{2kr}^2 i σ_{1kr}^1 oznaczają wartości argumentu miejsca zerowego z poprzedniego i bieżącego przejścia. Po spełnieniu tych warunków następuje

wyprowadzenie wyników i automatyczne przejście do realizacji dla kolejnej grupy danych, przechowywanych w zbiorze dyskowym. Obliczenia kończą się po wyczerpaniu wszystkich wariantów. Rezultaty obliczeń zostaną przedstawione w ostatnim rozdziale pracy.

5. Powłoka obciążona wszechstronnym równomiernym ciśnieniem hydrostatycznym

Dla tego przypadku obciążenia siły i naprężenia błonowego przedkrytycznego stanu naprężeń wyrażają się następująco

$$(5.1) \quad \begin{aligned} N_{10} = \sigma_s h = -\frac{\sigma s}{2 \operatorname{tg} \beta}, \quad N_{20} = \sigma_\theta h = -\frac{\sigma s}{\operatorname{tg} \beta}, \quad T_{10} = T_{20} = 0, \\ \sigma_t = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma s}{h \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Moduł sieczny przyjmuje wartość

$$E_c = \begin{cases} -\frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{\sqrt{3}\sigma s}}, & \sigma_t > \sigma_{p1} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{p1}, \quad k_1 = 2 \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{p1} h \operatorname{tg} \beta. \end{cases}$$

Według kryterium stateczności (3.6) dla tego przypadku obciążenia powłoki otrzymujemy następującą zależność na obciążenie krytyczne

$$(5.2) \quad \sigma_{krs} = \left[\frac{3\pi^2 \left(\frac{\pi \sin \beta}{lh} \right)^2}{\tilde{B}_1 \cos \beta + \frac{n^2}{\cos \beta} \tilde{B}_2 + \frac{n^4}{\cos^3 \beta} \tilde{B}_3 - b_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \right|^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos \beta} - \left(\tilde{A}_1 \cos \beta + \frac{n^2}{\cos \beta} \tilde{A}_2 + \frac{n^4}{\cos^3 \beta} \tilde{A}_3 + d_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \right|^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos \beta \right) \right] \times \frac{Eh^3 \sin \beta}{3l} \left\{ \cos^2 \beta \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (s_2^3 - s_1^3) \right] + 2n^2 \right\}^{-1}.$$

Całki numeryczne występujące w równaniu stateczności (5.2) są określone zależnościami (4.4). Obowiązują tutaj również zależności (4.5). Współczynniki określające elementy macierzy sztywności dla obciążenia wszechstronnego i liniowej charakterystyki umocnienia są następujące:

a) teoria deformacyjna

$$(5.3) \quad D_{11}^{TD} = \begin{cases} 1, & \sigma_t < \sigma_{p1} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{k_1}{\sigma s}, & \sigma_t \geq \sigma_{p1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{22}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 1, \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{k_1}{\sigma s}, \end{cases} & \mathbf{D}_{12}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} (2 - \nu_1), \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{k_1}{\sigma s}, \end{cases} \\
 \text{(5.3)} \quad \text{[cd.]} \quad d_{33}^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{2}{3 - \nu_1}, \\ \frac{2}{3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \frac{k_1}{\sigma s \sqrt{3}}\right) - \nu_1}, \end{cases} & b_{33}^{\text{TD}} &= \begin{cases} 3 - \nu_1, \\ 3 \frac{E}{E_k} \left(1 + \left(\frac{k_1}{\sigma s \sqrt{3}}\right) - \nu_1\right) \end{cases} \\
 N^{\text{TD}} &= \begin{cases} \frac{1}{4} [(3 + 2\nu_1) - \nu_1^2], \\ \frac{1}{4} \left[3 \frac{E}{E_k} + 2\nu_1 - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} + \sqrt{3} \left(\frac{E}{E_k} + \frac{2}{3} \nu_1 \right) \frac{k_1}{\sigma s} \right], \quad \nu_1 = 1 - 2\nu. \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) teoria plastycznego płynięcia (TPP)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{11}^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 6, & \sigma_i < \sigma_{p1} \\ 6 + \frac{9}{2} \omega_k, & \sigma_i \geq \sigma_{p1} \end{cases} \\
 \text{(5.4)} \quad \mathbf{D}_{22}^{\text{TPP}} &= 6, \quad \mathbf{D}_{12}^{\text{TPP}} = 6\nu, \quad d_{33}^{\text{TPP}} = \frac{1}{1 + \nu}, \quad b_{33}^{\text{TPP}} = 2(1 + \nu), \\
 N^{\text{TPP}} &= \begin{cases} 6(1 - \nu^2), \\ 6(1 - \nu^2) + \frac{9}{2} \omega_k, \quad \omega_k = \frac{E}{E_k} - 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, według teorii deformacyjnej współczynniki zależą od zmiennej s i obciążenia σ , natomiast zgodnie z teorią plastycznego płynięcia współczynniki te są stałe, co bardzo upraszcza zagadnienie. Dla teorii płynięcia obciążenie krytyczne obliczamy bezpośrednio ze wzoru (5.2), gdzie całki numeryczne \tilde{A}_i i \tilde{B}_i (biorąc pod uwagę, że D_{ij}^{TPP} i $N^{\text{TPP}} = \text{const}$) można wyznaczyć explicite. Są one następujące

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{N} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 d_{11} (s_2^2 - s_1^2) + d_{22} \left[\ln \frac{s_2}{s_1} \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1}{l} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_k \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \text{(5.5)} \quad \tilde{A}_2 &= \frac{1}{N} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ -d_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} + (d_{12} + 2d_{22}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\} + d_{33} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} - \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \tilde{A}_3 &= -\frac{1}{N} d_{22} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad \tilde{B}_1 &= \frac{1}{2} \frac{N}{M} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} b_{22} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (s_2^2 - s_1^2) + b_{11} \left[\ln \frac{s_2}{s_1} + \left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \times \right. \right. \\
 [\text{cd.}] \quad & \left. \left. \times \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_2 &= \frac{N}{M} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ b_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} - (b_{12} + 2b_{11}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} b_{33} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} + \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_3 &= \frac{N}{M} b_{11} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos 2\pi \frac{s_1}{l} + S_k \sin 2\pi \frac{s_1}{l} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 C_k &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^{2k}}{(2k)! 2k} (s_2^{2k} - s_1^{2k}), \\
 S_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2\pi}{l} \right)^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+1)} (s_2^{2k+1} - s_1^{2k+1}).
 \end{aligned}$$

Jak widać, w oparciu o teorię deformacyjną obciążenie krytyczne może być wyznaczone jedynie w oparciu o poprzednio omówioną procedurę iteracyjną. Dla teorii plastycznego płynięcia nie ma problemu w przypadku gdy powłoka traci stateczność w stanie całkowicie sprężystym lub całkowicie plastycznym, gdyż tylko wtedy elementy macierzy sztywności (5.4) są określone jednoznacznie. Gdy powłoka traci stateczność w stanie sprężysto-plastycznym, pojawiają się problemy, które można pokonać np. przez dokonanie podziału przedziału $\langle s_1, s_2 \rangle$ na części i sprawdzenie dla każdego kroku warunku uplastycznienia. Umożliwi to wybranie właściwych wartości współczynników (5.4). Oczywiście jeżeli dokonujemy podziału na większą ilość części wynik będzie dokładniejszy.

6. Powłoka obciążona wzdłużną siłą ściskającą

Siły i naprężenia w bezmomentowym przedkrytycznym stanie naprężenia są następujące

$$(6.1) \quad N_{10} = \sigma_s h = -N_a \frac{s_1}{s}, \quad N_{20} = 0, \quad T_{10} = T_{20} = 0, \quad \sigma_t = N_a \frac{s_1}{h} \frac{1}{s}.$$

Moduł sieczny przyjmuje wartość

$$(6.2) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + k_1 \frac{s}{N_a}}, & \sigma_t > \sigma_{p1} \\ E, & \sigma_t \leq \sigma_{p1}, \end{cases}$$

gdzie

$$k_1 = \frac{h}{s_1} \sigma_{p1} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right).$$

Krytyczną siłę ściskającą obliczymy z zależności

$$(6.3) \quad N_{akr} = \frac{Eh^3}{6s_1(s_2 - s_1)} \left[\frac{3m^2\pi^2\sin^2\beta}{h^2\cos\beta} \cdot \frac{1}{\tilde{B}_1\cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta}\tilde{B}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta}\tilde{B}_3 - b_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} m_1^2 \cos\beta} + \frac{1}{m_1^2 \cos\beta} \left(\tilde{A}_1 \cos\beta + \frac{n^2}{\cos\beta} \tilde{A}_2 + \frac{n^4}{\cos^3\beta} \tilde{A}_3 \right) - d_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} \right].$$

Całki \tilde{A}_i i \tilde{B}_i obliczamy według zależności (4.4) i (4.5), natomiast elementy macierzy sztywności dla omawianego przypadku obciążenia są następujące:

a) teoria deformacyjna

$$(6.4) \quad D_{11}^{TD} = \begin{cases} 1, & \sigma_t \leq \sigma_{p1} \\ 1 + \frac{3}{4} k_1 \frac{s}{N_a}, & \sigma_t > \sigma_{p1}, \end{cases} \quad D_{22}^{TD} = 1,$$

$$D_{12}^{TD} = \begin{cases} \frac{1}{4} (2 - \nu_1), \\ \frac{1}{4} \left(2 - \nu_1 \frac{E}{E_k} \right), \end{cases}$$

$$d_{33}^{TD} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \nu}, \\ \frac{2}{3 \frac{E}{E_k} \left(1 + k_1 \frac{s}{N_a} \right) - \nu_1}, \end{cases} \quad b_{33}^{TD} = \begin{cases} 2(1 + \nu), \\ 3 \frac{E}{E_k} \left(1 + k_1 \frac{s}{N_a} \right) - \nu_1, \end{cases}$$

$$N^{TD} = \begin{cases} 1 - \nu^2, \\ \frac{1}{4} \left[3 \frac{E}{E_k} k_1 \left(\frac{s}{N_a} \right) + 3 \frac{E}{E_k} + 2\nu_1 - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} \right], \quad \nu_1 = 1 - 2\nu. \end{cases}$$

b) teoria plastycznego płynięcia

$$(6.5) \quad D_{11}^{TPP} = \begin{cases} 2, & \sigma_t \leq \sigma_{p1} \\ 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right), & \sigma_t > \sigma_{p1} \end{cases}$$

$$D_{22}^{TPP} = \begin{cases} 2, \\ 2 \frac{E}{E_k}, \end{cases} \quad D_{12}^{TPP} = \begin{cases} 2\nu, \\ 2\nu - 1 + \frac{E}{E_k}, \end{cases}$$

$$d_{33}^{TPP} = \frac{1}{1 + \nu}, \quad b_{33}^{TPP} = 2(1 + \nu),$$

$$N^{TPP} = \begin{cases} 2(1 - \nu^2), \\ 2(1 - \nu^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right) (5 - 4\nu). \end{cases}$$

Jak widać z powyższych zależności, jeżeli do obliczeń zastosujemy teorię deformacyjną, wtedy obciążenie krytyczne można znaleźć wyłącznie w sposób iteracyjny, natomiast przy wykorzystaniu teorii płynięcia, gdzie elementy macierzy sztywności są stałe i nie zależą od obciążenia, problem się upraszcza. Ponieważ w tym przypadku funkcje podcałkowe w wyrażeniach (4.4) nie są zawile, po scałkowaniu uzyskamy

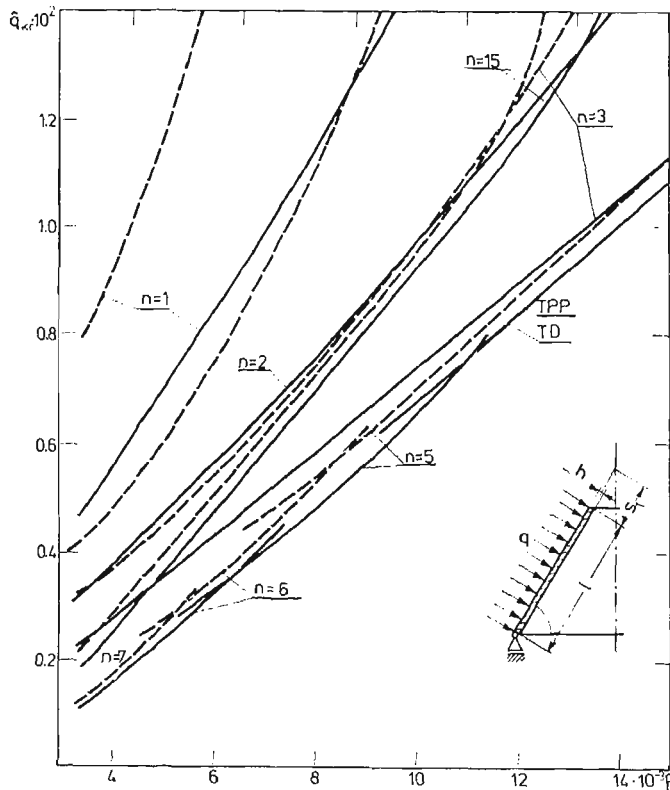
$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{N} m_1^2 \left\{ \frac{1}{2} d_{11} m_1^2 (s_1^2 - s_2^2) - d_{22} \ln \frac{s_2}{s_1} - d_{22} \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{A}_2 &= \frac{1}{N} m_1^2 \left\{ -d_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} + (d_{12} + 2d_{22}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\} + d_{33} m_1^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} - \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{A}_3 &= -\frac{1}{N} d_{22} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right], \\
 \tilde{B}_1 &= \frac{1}{2} \frac{N}{M} m_1^2 \left\{ \frac{1}{2} b_{22} m_1^2 (s_2^2 - s_1^2) + b_{11} \ln \frac{s_2}{s_1} + b_{11} \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_2 &= \frac{N}{M} m_1^2 \left\{ b_{12} \ln \frac{s_2}{s_1} - (b_{12} + 2b_{11}) \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} b_{33} m_1^2 \left\{ \ln \frac{s_2}{s_1} - \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right] \right\}, \\
 \tilde{B}_3 &= \frac{N}{M} b_{11} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[\left(C_k - \ln \frac{s_1}{s_2} \right) \cos \frac{2m\pi}{l} s_1 + S_k \sin \frac{2m\pi}{l} s_1 \right], \\
 C_k &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^{2k}}{(2k)! 2k} (s_2^{2k} - s_1^{2k}), \\
 S_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+1)} (s_2^{2k+1} - s_1^{2k+1}).
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Dla rozważanego przypadku obciążenia powłoki w celu obliczenia obciążeń krytycznych należy dokonać minimalizacji względem dwóch parametrów, tj. m i n . Może wystąpić tutaj również przypadek wyboczenia osiowo symetrycznego ($n = 0$) i wówczas zależność na obciążenie krytyczne sprowadza się do związku

$$N_{akr} = \frac{Eh^3}{6s_1(s_2 - s_1)} \left[\frac{3m^2\pi^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{h^2 (\tilde{B}_1 - b_{12}^0) \left| \frac{s_2}{s_1} m_1^2 \right|} + \frac{\tilde{A}_1}{m_1^2} - d_{12}^0 \left| \frac{s_2}{s_1} \right| \right].
 \tag{6.7}$$

7. Obliczenia numeryczne i wnioski

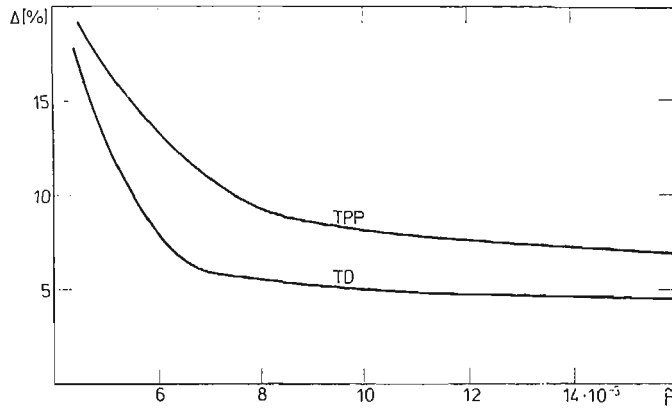
W oparciu o przedstawiony algorytm (rys. 1) opracowano program w języku FORTRAN-IV, a obliczenia zrealizowano na komputerze ODRA-1305. Istotną rolę w uruchomieniu programu i wykonaniu obliczeń numerycznych stanowiła możliwość korzystania ze zdalnej końcówki konwersacyjnej pod sterowaniem systemu operacyjnego GEORGE-3. Jako podstawowe do obliczeń przyjęto następujące dane: $E = 2,09 \cdot 10^5$ MPa, $E_k = 9 \cdot 10^3$ MPa, $\sigma_{p1} = 72$ MPa, $\nu = 0,33$, $s_1 = 32$ cm, $s_2 = 81$ cm, $\beta = 20^\circ$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,001$. Dane różniące się od wymienionych zaznaczono na wykresach.



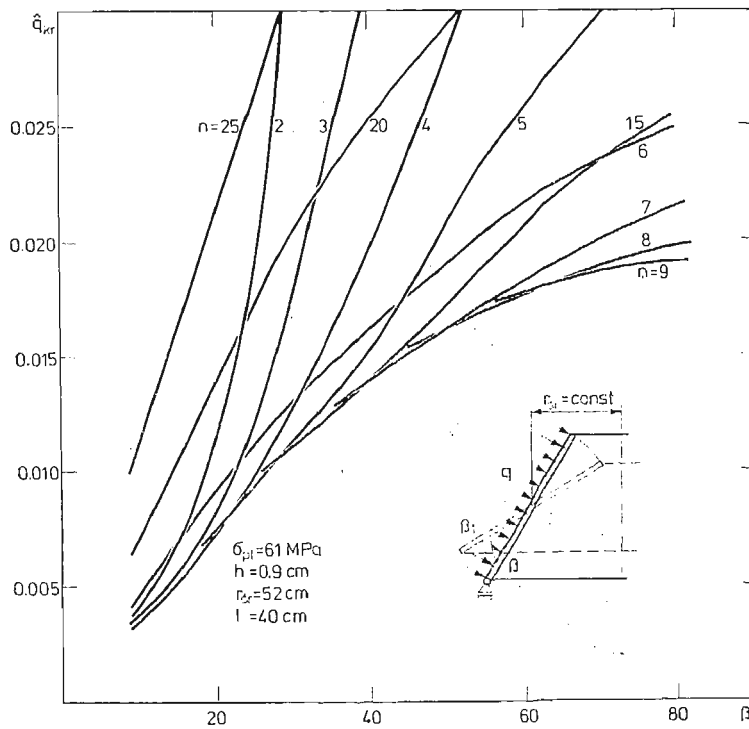
Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku obciążenia powłoki równomiernym ciśnieniem bocznym q . Wykres przedstawia zależność obciążenia krytycznego $\hat{q}_{kr} = q_{kr}/\sigma_{p1}$ od grubości powłoki $\hat{h} = h/\varrho_a$; gdzie $\varrho_a = s_1 \operatorname{ctg} \beta$ jest promieniem krzywizny powierzchni środkowej przy mniejszej podstawie. Wyniki podano zarówno dla teorii deformacyjnej (TD-linia ciągła), jak i dla teorii plastycznego płynięcia (TPP-linia przerywana). Jak widać, w miarę wzrostu grubości powłoki obciążenia krytyczne również rosną i to w sposób zbliżony do liniowego. Zmienia się jednak postać utraty stateczności; im grubość większa, tym tworzy się mniej fal po obwodzie odkształconej w wyniku utraty stateczności powłoki. Obydwie teorie dały tutaj zbliżone wyniki, z tym że stosując teorię

plastycznego płynięcia uzyskuje się nieco wyższe obciążenia krytyczne. Nadmienić należy również, że w całym badanym zakresie powłoka traciła stateczność w stanie sprężysto-plastycznym. Dla przyjętej grupy danych uwzględniono ściśliwość materiału powłoki. Ponieważ w szeregu pracach dotyczących stateczności płyt poza granicą sprężystości nie uwzględnia się ściśliwości materiału, dla tego przypadku przeprowadzono ponownie



Rys. 3



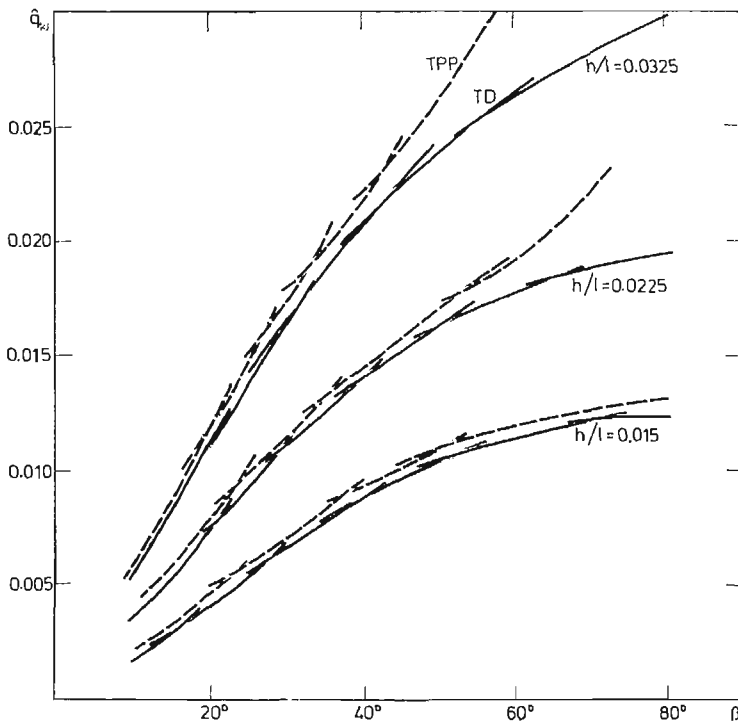
Rys. 4

obliczenia przy założeniu nieściśliwości. Kolejny wykres pokazuje rozbieżności jakie wynikają w obciążeniach krytycznych przy uwzględnieniu i bez uwzględnienia ściśliwości materiału. Przedstawione na rys. 2 krzywe obrazują zależność

$$(7.1) \quad \Delta = \frac{(\hat{q}_{kr})_{\nu=0.5} - (\hat{q}_{kr})_{\nu=0.33}}{(\hat{q}_{kr})_{\nu=0.5}} \cdot 100\%,$$

przy zmieniającej się grubości powłoki, dla obydwu teorii plastyczności. Stwierdzono, że rozbieżności są większe dla mniejszych grubości powłoki, czyli dla przypadków gdy proces uplastycznienia w chwili utraty stateczności jest jeszcze niewiele zaawansowany. W miarę rozwoju procesu uplastycznienia rozbieżności maleją; jednak teoria plastycznego płynięcia wykazuje wyższe wartości tych rozbieżności niż teoria deformacyjna. Wynika stąd wniosek, że nie uwzględnienie ściśliwości materiału, (co pozwala uzyskać prostsze związki) może być z technicznego punktu widzenia słuszne dla powłok tracących stateczność przy zaawansowanym procesie uplastycznienia.

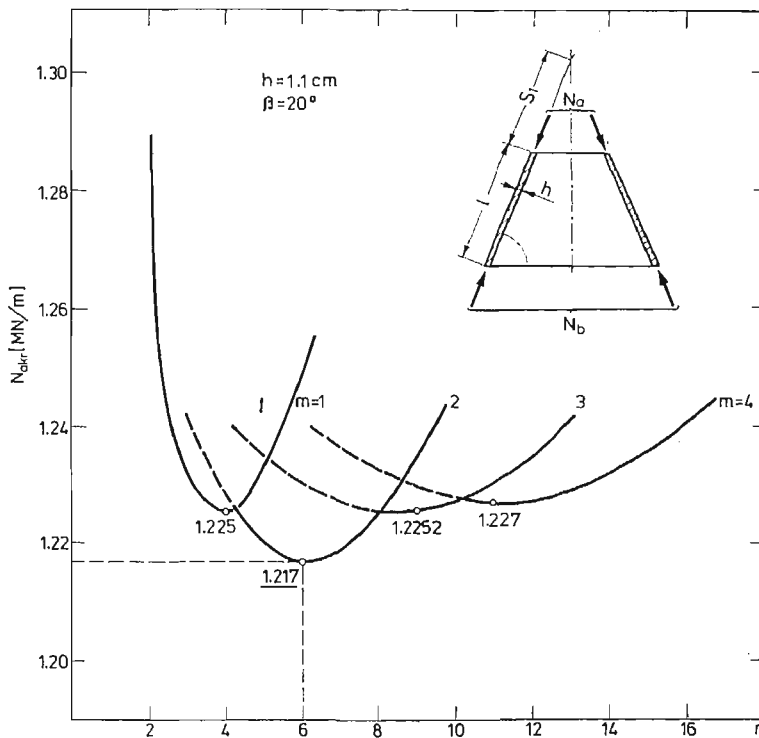
Na kolejnym rysunku pokazano jak zmieniają się obciążenia krytyczne ze zmianą kąta pochylenia tworzącej przy podstawic, przy zachowaniu stałego średniego promienia powłoki. Obliczenia wykonano dla teorii deformacyjnej z uwzględnieniem ściśliwości materiału. W obliczeniach wykorzystano opracowany algorytm iteracyjny i związek (4.3). Zauważyć można tutaj, że przy wzroście kąta β obciążenia krytyczne nieliniowo rosną, przy wzrastającej jednocześnie ilości fal wyboczenia. Wzrost ten staje się mniej gwałtowny



Rys. 5

dla kąta $\beta > 60^\circ$, gdy stożek zbliża się kształtem do walca. Wyniki przedstawione na tym wykresie odpowiadają stosunkowi grubości do długości powłoki $h/l = 0,015$. Przeprowadzono również obliczenia przy zmieniającym się kącie β dla większych stosunków h/l , tj. dla powłok o większej grubości, a wyniki przedstawiono na rys. 5. Istotnym celem tego wykresu jest pokazanie rozbieżności pomiędzy dwoma podstawowymi teoriami plastyczności. Jak widać różnice są niewielkie dla $h/l = 0,015$, natomiast dla większych grubości rozbieżności rosną, przy czym teoria plastycznego płynięcia daje zawsze wyższe wartości. W oparciu o obliczenia stwierdza się, że rozbieżności były stosunkowo niewielkie dla powłok tracących stateczność w stanie sprężysto-plastycznym. Gdy cała powłoka przeszła przed wybozczeniem w stan plastyczny, rozbieżności gwałtownie wzrastały.

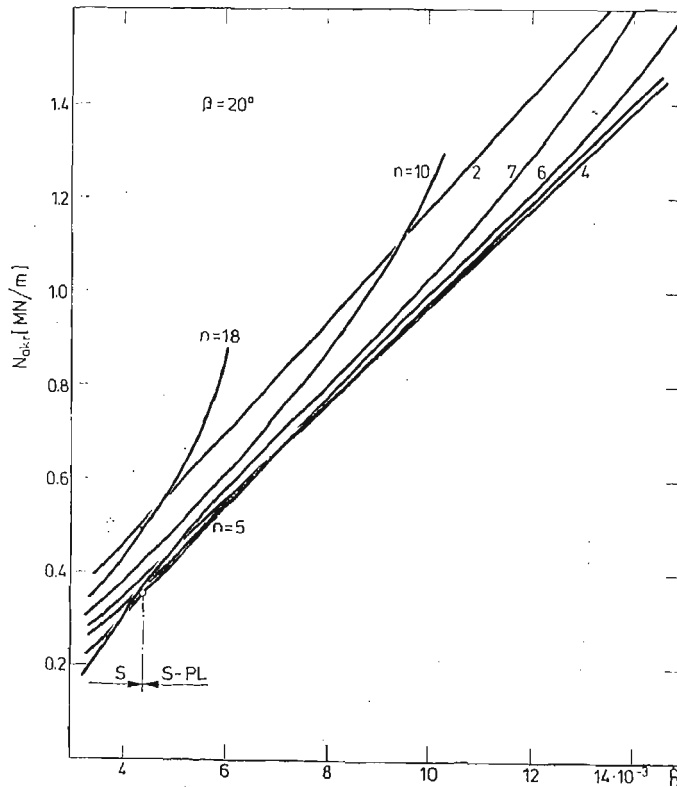
Kolejnym etapem analizy numerycznej były obliczenia obciążeń krytycznych powłoki ściskanej osiowo siłą rozłożoną równomiernie na obwodzie podstawy. Obliczeń dokonano dla obydwu teorii plastyczności, opierając się na zależnościach (6.3) do (6.6) i (7.1) i procedurach opisanych uprzednio. Powłoka ściskana siłą wzdłużną może po utracie stateczności pofalować się zarówno w kierunku wzdłużnym jak i po obwodzie, zależnie od parametrów fizycznych i geometrycznych. Stąd wynika konieczność minimalizacji zarówno względem parametru m jak i n . Na rys. 6 pokazano jak zmieniają się obciążenia krytyczne dla różnych ilości fal wybozczenia m i n . Dla tej grupy danych uzyskano obciążenie krytyczne równe $N_{a\text{kr}} = 1,217 \text{ MN/m}$ przy $m = 2$ i $n = 6$. Przeprowadzono również analizę



Rys. 6

wpływu zmiany grubości powłoki na obciążenia krytyczne, co przedstawia rys. 7. Wymiary dobrano w ten sposób, że dla dolnych wartości badanego zakresu powłoka traciła stateczność w stanie całkowicie sprężystym; wyniki dla obydwu teorii były zgodne, przy większych grubościach następowało wyboczenie w stanie sprężysto-plastycznym, rozbieżności pomiędzy TD i TPP były niewielkie. Jak widać z wykresu, podobnie jak w poprzednich przypadkach, wraz ze zmianą grubości powłoki krytyczna siła ściskająca wzrasta w przybliżeniu liniowo, przy malejącej liczbie fal obwodowych n . Zauważyć należy również, że niższe wartości obciążeń krytycznych uzyskiwano dla badanej grupy danych przy niesymetrycznej formie utraty stateczności.

Na zakończenie należy podkreślić, że odpowiedź na pytanie która z przyjętych teorii plastyczności da wyniki bliższe rzeczywistości powinien dać eksperyment. Pewną próbę



Rys. 7

wyjaśnienia uzyskiwanych rozbieżności dla problemów wyboczenia płyt i powłok przedstawił ostatnio R. N. DUBEX [1] doszukując się przyczyn w obrocie głównych osi naprężeń, a właśnie teoria przyrostowa pomija wpływ tych obrotów na płynięcie plastyczne. Pomimo że w pracy przyjęto liniową charakterystykę umocnienia materiału, wyniki i zaproponowana metoda mogą być z powodzeniem zastosowane dla innych charakterystyk, np. odcinkowo-łamanej lub potęgowej.

Literatura cytowana w tekście

1. R. N. DUBEY, *On Bifurcation in Elastic-Plastic Solids*, Nuclear Engineering and Design, **49**, 3, 217 - 222, 1978.
2. Э. И. Григолюк, *Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости*, Механика, Устойчивость и пластичность, И. Н., 1967.
3. H. RAMSEY, *Plastic Buckling of a Conical Shell under Axial Compression*, Int. J. of Mech. Sci., **19/5**, 1977.
4. J. ZIELNICA, *Stateczność powłoki stożkowej poza granicą sprężystości*, Rozprawy Inżynierskie, **20**, 3, 431 - 454, 1972.
5. J. ZIELNICA, W. OSMÓLSKI, *Wyznaczenie obciążenia krytycznego cienkiej powłoki stożkowej w oparciu o teorię plastycznego płynięcia*, Arch. Bud. Masz., **23**, 2, 283 - 299, 1976.
6. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, W-wa, 1973.

Резюме

WYPUCZIWANIE TONKÓJ KONICZESKÓJ OBOŁOČKI ПРИ
ОСЕ-СИММЕТРИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

В работе представлено метод определения нагрузок тонкой конической оболочки при напряжениях превышающих предел упругости при следующих осе-симметрических нагрузках:

- равномерное боковые давление
- всестороннее равномерное боковые давление
- сжимающая продольная сила действующая вдоль образующей

Использованы физические соотношения обеих фундаментальных теорий пластичности, при возрастающей нагрузке. Принимается сжимаемость материала оболочки, при линейных характеристиках. Полученные уравнения решены ортогонализационным методом. Приведены некоторые численные примеры и их анализ.

Summary

BUCKLING OF A THIN-WALLED CONICAL SHELL FOR AXIALLY-SYMMETRIC LOADS
BEYOND THE ELASTIC LIMIT

The basic equations are derived, and critical load evaluation method for elastic-plastic thin-walled conical shell is presented. It is assumed that the shell is subjected to the following, external, axially symmetric loads: lateral uniform pressure, external uniform hydrostatic pressure, longitudinal compressive force, acting along the shell generatrix.

Taking into account, Shanley's concept, for each case the relations are given enabling to find critical loads according to the both basic plasticity theories (incremental and total strain). The material's compressibility and linear-type stress-strain characteristic are taken into account. The problem is solved by the orthogonalization method. Numerical results are given in diagrams.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1980 roku