MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 19 (1981)

O FORMOWANIU DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ANDRZEJ GAŁKA (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

Wskaźniki $k, l, \ldots$ przebiegają ciąg $\{1, 2, 3\}$ i odnoszą się do kartezjańskiego układu współrzędnych w przestrzeni fizycznej. Wskaźniki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ przebiegające również ciąg $\{1, 2, 3\}$ i wskaźniki $K, L, M, \ldots$ przebiegające ciąg $\{1, 2\}$ odnoszą się do krzywoliniowego układu współrzędnych w wyróżnionej konfiguracji $\varkappa_\tau$. Współrzędne materialne oznaczone są przez $\boldsymbol{X} = (X^\alpha)$ i zamiennie przez $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{Z}, Y)$, $\boldsymbol{Z} = (Z^K)$. Wskaźniki $A, B, \ldots$; $a, b, \ldots$; $\zeta, \eta \ldots$; ν, μ, $\bar{\nu}$, $\bar{\mu}$ przebiegają skończone ustalone ciągi liczb naturalnych, przy czym $\zeta, \eta \leqslant 6$. Stosujemy konwencje sumacyjną Einsteina.

B_τ — obszar zajęty przez ciało B w ustalonej chwili τ.

B_R — obszar zmienności współrzędnych Lagrange'a.

$\bar{B}_\tau, \bar{B}_R, \bar{\Pi}_R$ — domknięcia obszarów odpowiednio B_τ, B_R, Π_R.

$\partial B_\tau, \partial B_R$, — brzeg obszaru odpowiednio B_τ, B_R.

$\boldsymbol{e}_k$ — jednostkowe wektory bazy w przestrzeni fizycznej.

$\boldsymbol{g}_\alpha$ — wektory bazy naturalnej krzywoliniowego układu współrzędnych w wyróżnionej konfiguracji $\varkappa_\tau$.

$\boldsymbol{g}^\alpha$ — wektory bazy dualnej.

$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_\alpha \boldsymbol{g}_\beta$ — składowe tensora metrycznego

$\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{n}}$ — jednostkowe wektory normalne do ∂B_R, ∂B_τ.

$\boldsymbol{x} = x^k \boldsymbol{e}_k$ — wektor położenia cząstki w przestrzeni fizycznej.

$\chi^k(\boldsymbol{X}, t)$ — funkcje deformacji, $\boldsymbol{x} = \chi^k(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{e}_k$.

$\boldsymbol{C} = C_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}^\alpha \otimes \boldsymbol{g}^\beta$ — lokalny metryczny tensor deformacji.

$\boldsymbol{T}_\tau = T^{k\alpha}\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{g}_\alpha$ — pierwszy tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa

$\boldsymbol{T} = T^{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{g}_\beta$ — drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa (odniesiony do B_τ), $\boldsymbol{T}_\tau = \nabla\chi\hat{\boldsymbol{t}}$,

ϱ_τ — gęstość masy na jednostkę objętości obszaru B_τ.

$\boldsymbol{b} = b^k(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{e}_k$ — zewnętrzne obciążenia masowe,

$\boldsymbol{p} = p^k(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{e}_k$ — zewnętrzne obciążenia brzegowe,

$\boldsymbol{r} = r^k(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{e}_k$ — wewnętrzne siły reakcji,

$\boldsymbol{s} = s^k(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{e}_k$ — brzegowe siły reakcji,

$\sigma(\boldsymbol{C})$ — funkcja energii odkształcenia,

$\gamma(\boldsymbol{T})$ — funkcja energii komplementarnej,

$(\cdot)_{,\alpha}$ — operacja różniczkowania cząstkowego, $(\cdot)_{,\alpha} = \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial X^\alpha}$,

Wstęp

W teorii powłok, w celu sprowadzenia trójwymiarowych zagadnień brzegowych do aproksymujących je zagadnień dwuwymiarowych, stosuje się różne metody. Wśród nich można rozróżnić dwa podejścia [1]. Podejście bezpośrednie oparte na modelu powłoki jako tzw. powierzchni Cosseratów i drugie poprzez uproszczenie równań klasycznej mechaniki kontinuum, Metody te zostały wyczerpująco omówione w monografii NAGHDI'EGO [1]. W pracach [2], [6] przedstawiono odmienną metodę formułowania zagadnień dwuwymiarowych, opartą na równaniach mechaniki ośrodków ciągłych z więzami wewnętrznymi, przy czym więzy zakładano tylko dla deformacji. Metoda przedstawiona w [2] zostanie w tej pracy rozszerzona poprzez wprowadzenie więzów dla naprężeń.

Przyjęcie więzów dla naprężeń pozwala w pewnych przypadkach otrzymać prostsze równania i wierniej opisać stan naprężenia i odkształcenia w ciele.

1. Założenia i sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań jest ciało B z materiału hypersprężystego, które w pewnej ustalonej konfiguracji zajmuje obszar B_τ. Założymy, że obszar ten da się parametryzować współrzędnymi $X = (Z, Y) \in B_R$, gdzie domknięcie obszaru B_R jest postaci $\bar{B}_R = \bar{\Pi}_R \times [-h, h]$ Π_R jest obszarem regularnym na płaszczyźnie, $(-h, h)$ odcinkiem, $Z = (Z^1, Z^2) \in \Pi_R$, $Y \in (-h, h)$.

W pracy zostanie podany sposób opisu przestrzennych zagadnień mechaniki rozważanego ciała przy pomocy dwuwymiarowych zagadnień brzegowych. Jako podstawę rozważań przyjęto następujące równania mechaniki ośrodków ciągłych z więzami dla deformacji i naprężeń [4]:

1°. Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &\operatorname{Div} \boldsymbol{T}_\tau + \varrho_\tau \boldsymbol{b} + \varrho_\tau \boldsymbol{r} = \varrho_\tau \ddot{\chi}, && X \in B_R, \\ &\boldsymbol{T}_\tau \boldsymbol{n}_\tau = \boldsymbol{p}_\tau + \boldsymbol{s}_\tau && X \in \partial B_R. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2°. Równania konstytutywne dla ciała hypersprężystego

$$\boldsymbol{T} = 2\varrho_\tau \frac{\partial \sigma(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}}, \tag{1.2}$$

3°. Równania definicyjne obciążeń zewnętrznych

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}(X, t) &= \hat{\boldsymbol{b}}(X, t, \chi, \nabla\chi), \\ \boldsymbol{p}_\tau(X, t) &= \hat{\boldsymbol{p}}_\tau(X, t, \chi), \end{aligned} \tag{1.3}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{b}}(\cdot)$, $\hat{\boldsymbol{p}}_\tau(\cdot)$ są danymi funkcjami lub funkcjonałami,

4°. Więzy dla deformacji

$$\begin{aligned} &h_\nu(X, t, \chi, \nabla\chi, \boldsymbol{q}, \nabla\boldsymbol{q}) = 0 && X \in B_R, \nu = 1, \dots, I_\nu \\ &R_\mu(X, t, \chi, \boldsymbol{q}) = 0, && X \in \partial B_R, \mu = 1, 2, \dots I_\mu \end{aligned} \tag{1.4}$$

5°. Więzy dla naprężeń

$$\begin{aligned} &h^{\bar{\nu}}(X, t, \boldsymbol{T}, \nabla\boldsymbol{T}, \vartheta, \nabla\vartheta) = 0, && X \in B_R, && \bar{\nu} = 1, 2, \dots I_{\bar{\nu}} \\ &R^{\bar{\mu}}(X, t, \boldsymbol{T}, \vartheta) = 0, && X \in \partial B_R, && \bar{\mu} = 1, 2, \dots I_{\bar{\mu}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

W równaniach więzów funkcje $h_\nu(\cdot)$, $R_\mu(\cdot)$, $h^{\bar{\nu}}(\cdot)$, $R^{\bar{\mu}}(\cdot)$ są znanymi funkcjami, różniczkowalnymi w swoich naturalnych dziedzinach. Funkcje $\boldsymbol{q} = (q^A(X,t))$, $A = 1, 2, \dots I_A < 3$ i $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta^\zeta(X,t))$, $\zeta = 1, 2, \dots I_\zeta < 6$ stanowią dodatkowe nieznane pola kinematyczne i kinetyczne.

6°. Warunek idealności więzów dla deformacji

$$\int_{B_\tau} \varrho_\tau \boldsymbol{r}\, \delta\chi dv_\tau + \int_{\partial B_\tau} s_\tau \delta\chi d\sigma_\tau = 0, \tag{1.6}$$

który winien być spełniony dla dowolnej funkcji $\delta\chi$, takiej, że układ funkcji $(\delta\chi, \delta\boldsymbol{q})$ spełnia równania:

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial \chi}\delta\chi + \frac{\partial h_\nu}{\partial \nabla\chi}\delta\nabla\chi + \frac{\partial h_\nu}{\partial \boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial h_\nu}{\partial \nabla\boldsymbol{q}}\delta\nabla\boldsymbol{q} = 0 \quad \text{dla} \quad X \in B_R$$

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial \chi}\delta\chi + \frac{\partial R_\mu}{\partial \boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q} = 0, \quad \text{dla} \quad X \in \partial B_R$$

7°. Warunek idealności więzów dla naprężeń

$$\int_{B_R} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{T}dv_R = 0, \quad \text{gdzie} \quad \boldsymbol{D} \overset{\text{df}}{=} (\nabla\chi)^T(\nabla\chi) - \boldsymbol{C}, \tag{1.7}$$

który winien być spełniony dla dowolnej funkcji $\delta\boldsymbol{T}$ takiej, że układ funkcji $(\delta\boldsymbol{T}, \delta\boldsymbol{\vartheta})$ spełnia układ równań:

$$\frac{\partial h^{\bar{\nu}}}{\partial \boldsymbol{T}}\delta\boldsymbol{T} + \frac{\partial h^{\bar{\nu}}}{\partial \nabla\boldsymbol{T}}\delta\nabla\boldsymbol{T} + \frac{\partial h^{\bar{\nu}}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}\delta\boldsymbol{\vartheta} + \frac{\partial h^{\bar{\nu}}}{\partial \nabla\boldsymbol{\vartheta}}\delta\nabla\boldsymbol{\vartheta} = 0, \quad \text{dla} \quad X \in B_R,$$

$$\frac{\partial R^{\bar{\mu}}}{\partial \boldsymbol{T}}\delta\boldsymbol{T} + \frac{\partial R^{\bar{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}\delta\boldsymbol{\vartheta} = 0, \quad \text{dla} \quad X \in \partial B_R.$$

W pracy (w punkcie 2) wyspecjalizujemy więzy dla deformacji (1.4) i więzy dla naprężeń (1.5) tak, by na podstawie wyżej przytoczonych równań otrzymać dwuwymiarowe zagadnienie brzegowe, którego rozwiązanie pozwala określić stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w trójwymiarowym ciele hypersprężystym. Po rozwiązaniu przy pomocy otrzymanych równań danego zagadnienia dysponujemy wewnętrznymi siłami reakcji $\boldsymbol{r}$ i s_τ (1.1) oraz niezgodnościami deformacji $\boldsymbol{D}$, $(1.7)_2$, wywołanymi więzami dla naprężeń, które po wprowadzeniu odpowiednich norm dają pewną możliwość oceny dokładności rozwiązań względem nieznanych rozwiązań odpowiedniego zagadnienia trójwymiarowego.

2. Równania więzów

Więzy dla deformacji przyjmiemy w postaci

$$\begin{aligned} &\chi^k(X,t) = \Phi^k(X, \psi^A(Z,t)), \quad X \in B_R, \quad Z \in \Pi_R. \\ &\alpha_\nu(Z, \psi^A(Z,t), \psi^A_{,K}(Z,t)) = 0, \quad Z \in \Pi_R, \quad \nu = 1, 2, \dots I_\nu \\ &\beta_\mu(Z, \psi^A(Z,t)) = 0, \quad Z \in \partial\Pi_R, \quad \mu = 1, 2, \dots I_\mu \end{aligned} \tag{2.1}$$

więzy dla naprężeń w postaci

$$T^{\alpha\beta} = \Psi^{\alpha\beta}(X, \pi^a(Z,t), \vartheta^\zeta(X,t)), \quad X \in B_R, \quad Z \in \Pi_R. \tag{2.2}$$

W przyjętych równaniach więzów funkcje $\Phi^k(\cdot)$, $\alpha_\nu(\cdot)$, $\beta_\mu(\cdot)$, $\Psi^{\alpha\beta}(\cdot)$ są danymi a priori funkcjami różniczkowalnymi w swoich naturalnych dziedzinach, natomiast $\psi^A(Z,t)$, $A = 1, 2, \dots I_A$, $\pi^a(Z,t)$, $a = 1, 2, \dots I_a$, $\vartheta^\zeta(X,t)$, $\zeta = 1, 2, \dots I_\zeta < 6$ są nowymi niewiadomymi funkcjami. Funkcje $\psi^A(Z,t)$ nazwiemy uogólnionymi deformacjami a funkcje $\vartheta^\zeta(X,t)$ i $\pi^a(Z,t)$ uogólnionymi naprężeniami. Postulowanie więzów w postaci (2.1) ma jasny sens kinematyczny w teorii płyt i powłok. Kinematyka bryły jest tam sprowadzana, przy pomocy tego typu więzów, do kinematyki powierzchni. Informacje dotyczące stanu naprężenia, dające się analitycznie wyrazić w postaci (2.2), można przy pomocy wprowadzonych więzów (2.2) wykorzystać do wierniejszego opisu, otrzymanymi niżej równaniami, stanu naprężenia i odkształcenia w rozpatrywanym ciele.

3. Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe

Celem otrzymania równań ruchu i kinetycznych warunków brzegowych o dwóch zmiennych niezależnych przekształcimy warunek idealności więzów (1.6) do postaci w której występują całki po obszarze $B_R = \Pi_R \times (-h, h)$ i $\partial B_R = (\partial\Pi_R \times ([-h, h]) \cup (\Pi_R \times \{-h\}) \cup (\Pi_R \times \{h\})$. Po dokonaniu zmiany obszarów całkowania z B_τ na B_R i przejęciu $dv_\tau = \sqrt{g}\, d\Pi_R dY$, $ds_\tau = j\, ds_R$ oraz uwzględnieniu zależności

$$\delta\chi_k = \Phi_{Ak}\delta\psi^A, \quad \text{gdzie} \quad \Phi_{Ak} \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial\Phi_k}{\partial\psi^A}, \tag{3.1}$$

wynikających z przyjętych równań więzów $(2.1)_1$, warunek idealności więzów deformacyjnych (1.6) można zapisać w postaci [6]:

$$\int_{\partial\Pi_R} s_A(Z,t)\,\delta\psi^A dl_R + \int_{\Pi_R} r_A(Z,t)\,\delta\psi^A d\Pi_R = 0, \tag{3.2}$$

gdzie zostały wprowadzone wielkości

$$\begin{aligned} s_A(Z,t) &= \int_{-h}^{h} s_\tau^k \Phi_{Ak} j\, dY, \quad Z \in \partial\Pi_R, \\ r_A(Z,t) &= \int_{-h}^{h} \varrho_\tau r^k \Phi_{Ak}\sqrt{g}\, dY + [s_\tau^k \Phi_{Ak} j]_{Y=-h,h}, \quad Z \in \Pi_R, \end{aligned} \tag{3.3}$$

które nazwiemy uogólnionymi siłami reakcji. Funkcje $\delta\psi^A$ w przypadku występowania więzów $(2.1)_2$, $(2.1)_3$ nie są dowolne, lecz spełniają zależności

$$\begin{gathered} \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A}\delta\psi^A + \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,K}}\delta\psi^A_{,K} = 0, \quad Z \in \Pi_R, \\ \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A}\delta\psi^A + \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,t}}\delta\psi^A_{,t} = 0, \\ \frac{\partial\beta_\mu}{\partial\psi^A}\delta\psi^A = 0, \quad Z \in \partial\Pi_R - \partial^*\Pi_R, \quad \left[\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,t}}\delta\psi^A\right]_{\partial^*\Pi_R} = 0, \quad Z \in \partial^*\Pi_R. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Symbol $[\cdot]_{Y=-h,h}$ oznacza sumę wartości wyrażenia w nawiasie dla $Y=-h$ i dla $Y=h$, $\psi^A_{,l}$, oznacza pochodną funkcji $\psi^A(Z,t)$ w kierunku stycznym do brzegu $\partial\Pi_R$, $\partial^*\Pi_R$ skończony zbiór punktów brzegu obszaru Π_R w których normalna może doznawać skoku, $[\cdot]_{\partial^*\Pi_R}$ suma skoków wyrażenia w nawiasie w punktach $Z\in\partial^*\Pi_R$.

Warunek (3.2) idealności więzów będziemy realizować przyjmując

$$(3.5)\quad \begin{aligned} r_A(Z,t) &= -\left(\lambda^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,K}}\right)_{,K}+\lambda^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A}, \qquad Z\in\Pi_R,\\ s_A(Z,t) &= \lambda^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,K}}N_K+\hat{\lambda}^\mu\frac{\partial\beta^\mu}{\partial\psi^A}+\bar{\lambda}_\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A}-\left(\bar{\lambda}^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,l}}\right)_{,l}, \qquad Z\in\partial\Pi_R.\end{aligned}$$

gdzie λ^ν, $\bar{\lambda}^\nu$, $\hat{\lambda}^\mu$ są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami, które nazywać będziemy *funkcjami więzów odpowiednio dla* $(2.1)_2$ *i* $(2.1)_3$, N *jest wektorem jednostkowym*, zewnętrznie normalnym do $\partial\Pi_R$ w płaszczyźnie $Y=0$. Można wykazać, korzystając z (3.4), że związki (3.5) spełniają warunek idealności więzów (3.2) tożsamościowo

Po podstawieniu do (3.3) wyrażeń $\varrho_\tau r^k$ i s^k_τ odpowiednio z równań ruchu (1.1) i kinetycznych warunków brzegowych $(1.1)_2$ i wykonaniu potrzebnych przekształceń, otrzymamy równania ruchu

$$(3.6)\quad H^K_{A,K}+h_A+f_A+r_A = i_A, \qquad A=1,\ldots,I_A$$

i kinetyczne warunki brzegowe

$$(3.7)\quad H^K_A N_K = p_A+s_A,$$

gdzie

$$(3.8)\quad \begin{aligned} H^K_A(Z,t) &= \int_{-h}^{h}\chi^k_{.\alpha}T^{\alpha K}\Phi_{Ak}\sqrt{g}\,dY,\\ h_A(Z,t) &= -\int_{-h}^{h}\chi^k_{.\alpha}T^{\alpha\beta}\Phi_{Ak,\beta}\sqrt{g}\,dY,\\ f_A(Z,t) &= \int_{-h}^{h}\varrho_\tau b^k\Phi_{Ak}\sqrt{g}\,dY+[p^k_\tau\Phi_{Ak}j]_{Y=-h,h},\\ i_A(Z,t) &= \int_{-h}^{h}\varrho_\tau\ddot{\chi}^k\Phi_{Ak}\sqrt{g}\,dY, \qquad Z\in\Pi_R,\\ p_A(Z,t) &= \int_{-h}^{h}p^k\Phi_{Ak}j\,dY, \qquad Z\in\partial\Pi_R.\end{aligned}$$

Po wykorzystaniu równań więzów $(2.1)_1$ i (2.2) i równań definicyjnych obciążeń zewnętrznych (1.3) ostatnie związki można zapisać w postaci

$$(3.9)\quad \begin{aligned} H^K_A(Z,t) &= \hat{H}^K_A(Z,\psi^A(Z,t),\psi^A_{,K}(Z,t),\pi^a(Z,t);[\vartheta^\zeta(X,t]),\\ h_A(Z,t) &= \hat{h}_A(Z,\psi^A(Z,t),\psi^A_{,K}(Z,t),\pi^a(Z,t);[\vartheta^\zeta(X,t)]),\\ f_A(Z,t) &= \hat{f}_A(Z,\psi^A(Z,t),\psi^A_{,K}(Z,t)),\\ p_A(Z,t) &= \hat{p}_A(Z,\psi^A(Z,t)),\\ i_A(Z,t) &= \hat{\varrho}_{AB}\ddot{\psi}^B+\varrho_{ABC}\dot{\psi}^B\dot{\psi}^C\end{aligned}$$

gdzie $\hat{H}^K_A(\cdot)$, $\hat{h}_A(\cdot)$ są funkcjami zmiennych Z, ψ^A, $\psi^A_{,K}$, π^a i funkcjonałami zmiennych $\vartheta^\zeta(X, t)$, zdefiniowane całkami

$$\text{(3.10)}\qquad \begin{aligned} \hat{H}^K_A(\cdot) &= \int_{-h}^{h} \Phi_{Ak}(\Phi^k_\alpha \Psi^{\alpha K} + \psi^B_{,L}\Phi^k_B \Psi^{LK})\sqrt{g}\,dY, \\ h_A(\ ) &= -\int_{-h}^{h} \Phi_{Ak,\beta}(\Phi^k_\alpha \Psi^{\alpha\beta} + \psi^B_{,L}\Phi^k_B \Psi^{L\beta})\sqrt{g}\,dY, \end{aligned}$$

$\hat{f}_A(\cdot), \hat{p}_A(\cdot), \hat{\varrho}_{AB}(\cdot), \varrho_{ABC}(\cdot)$, są funkcjami zmiennych Z, ψ^A, $\psi^A_{,K}$:

$$\text{(3.11)}\qquad \begin{aligned} &\hat{f}_A(\ ) = \int_{-h}^{h} \varrho_\tau b^k(X, t, \Phi^k, \Phi^k_{,\alpha})\Phi_{Ak}\sqrt{g}\,dY + [p^k(X, t, \Phi^k)\Phi_{Ak}j]_{Y=-h,h} \qquad Z \in \Pi_R, \\ &\hat{p}_A(\cdot) = p^k_\tau(X, t, \Phi^k)\Phi_{Ak}j\,dY, \qquad Z \in \partial\Pi_R, \\ &\hat{\varrho}_{AB}(\cdot) = \int_{-h}^{h} \varrho_\tau \Phi^k_A \Phi_{Bk}\sqrt{g}\,dY, \quad \hat{\varrho}_{ABC}(\cdot) = \int_{-h}^{h} \varrho_\tau \Phi_{Ak}\frac{\partial^2\Phi^k}{\partial\psi^B\partial\psi^C}\sqrt{g}\,dY, \\ &\Phi^k_\alpha = \frac{\partial\Phi^k}{\partial X^\alpha}. \end{aligned}$$

4. Równania zgodności deformacji

Warunek idealności więzów $(1.7)_1$ po zmianie obszaru całkowania B_τ na B_R, uwzględnieniu zależności

$$\text{(4.1)}\qquad \delta T^{\alpha\beta} = \Psi^{\alpha\beta}_a \delta\pi^a + \Psi^{\alpha\beta}_\zeta \delta\vartheta^\zeta,$$

gdzie $\Psi^{\alpha\beta}_a = \dfrac{\partial\Psi^{\alpha\beta}}{\partial\pi^a}$, $\Psi^{\alpha\beta}_\zeta = \dfrac{\partial\Psi^{\alpha\beta}}{\partial\vartheta^\zeta}$, wynikających z przyjętych więzów dla naprężeń, i wprowadzeniu wielkości $D_a(Z, t)$ i $D_\zeta(X, t)$

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{aligned} D_a(Z, t) &= \int_{-h}^{h} D_{\alpha\beta}\Psi^{\alpha\beta}_a \sqrt{g}\,dY, \\ D_\zeta(X, t) &= D_{\alpha\beta}\Psi^{\alpha\beta}_\zeta, \end{aligned}$$

które nazwiemy uogólnionymi niezgodnościami deformacji, można zapisać w postaci

$$\text{(4.3)}\qquad \int_{B_R} D_\zeta \delta\vartheta^\zeta \sqrt{g}\,dB_R + \int_{\Pi_R} D_a \delta\pi^a d\Pi_R = 0.$$

Ze względu na dowolność funkcji $\vartheta^\zeta(X, t)$, $\pi^a(Z, t)$, z warunku (4.3) otrzymamy

$$\text{(4.4)}\qquad D_\zeta = 0, \quad D_a = 0.$$

Po podstawieniu do (4.2) wielkości $D_{\alpha\beta}$ z równań $(1.7)_2$ i uwzględnieniu (4.4) otrzymamy równania zgodności deformacji

$$\text{(4.5)}\qquad \begin{aligned} C_a(Z, t) &= \int_{-h}^{h} \chi^k_{,\alpha}, \chi_{k,\beta}\Psi^{\alpha\beta}_a \sqrt{g}\,dY, \\ C_\zeta(X, t) &= \chi^k_{,\alpha}\chi_{k,\beta}\Psi^{\alpha\beta}_\zeta, \end{aligned}$$

gdzie wielkości C_a, C_ζ, które nazwiemy uogólnionymi odkształceniami są zdefiniowane wzorami

$$C_a(Z, t) = \int_{-h}^{h} C_{\alpha\beta}\Psi_a^{\alpha\beta}\sqrt{g}\,dY, \quad C_\zeta(X, t) = C_{\alpha\beta}\Psi_\zeta^{\alpha\beta}, \tag{4.6}$$

Równania zgodności deformacji (4.5) po uwzględnieniu równań więzów $(2.1)_1$ można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} C_a(Z, t) &= \hat{C}_a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^a; [\vartheta^\zeta]), \\ C_\zeta(X, t) &= \hat{C}_\zeta(X, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^a, \vartheta^\zeta) \end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{C}_a(\ ) &= A^{KL}_{aAB}\psi^A_{,K}\psi^B_{,L} + A^K_{aA}\psi^A_{,K} + A_a, \\ \hat{C}_\zeta(\ ) &= B^{KL}_{\zeta AB}\psi^A_{,K}\psi^B_{,L} + B^K_{\zeta A}\psi^A_{,K} + B_\zeta, \\ A^{KL}_{aAB} &= \int_{-h}^{h} \Phi_{Ak}\Phi^k_B\Psi^{KL}_a\sqrt{g}\,dY, \\ A^K_{aA} &= 2\int_{-h}^{h} \Phi_{Ak}\Phi^k_\beta\Psi^{K\beta}_a\sqrt{g}\,dY, \quad A_a = \int_{-h}^{h} \Phi_{\alpha k}\Phi^k_\beta\Psi^{\alpha\beta}_a\sqrt{g}\,dY, \\ B^{KL}_{\zeta AB} &= \Phi_{Ak}\Phi^k_B\Psi^{KL}_\zeta, \\ B^K_{\zeta A} &= 2\Phi_{Ak}\Phi^k_\beta\Psi^{K\beta}_\zeta, \quad B_\zeta = \Phi_{\alpha k}\Phi^k_\beta\Psi^{\alpha\beta}_\zeta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Współczynniki A^{KL}_{aAB}, A^K_{aA}, A_a, $B^{KL}_{\zeta AB}$, $B^K_{\zeta A}$, B_ζ, w ogólności zależą od ψ^A, π^a, ϑ^ζ. W przypadku gdy funkcje $\Psi^{\alpha\beta}(\cdot)$ występujące w równaniach więzów są liniowymi względem uogólnionych naprężeń π^a i ϑ^ζ to wymienione współczynniki od nich nie zależą.

5. Równania konstytutywne

Równania konstytutywne dla materiału hypersprężystego przyjmiemy w postaci odwrotnej do (1.2)

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial\gamma(T)}{\partial T^{\alpha\beta}}, \tag{5.1}$$

gdzie $\gamma(\boldsymbol{T})$ jest funkcją energii komplementarnej. Po podstawieniu ostatnich związków do zależności (4.6) otrzymamy uogólnione równania konstytutywne

$$C_a(Z, t) = \frac{\partial\hat{\Gamma}(\cdot)}{\partial\pi^a}, \quad C_\zeta(X, t) = \frac{\partial\hat{\gamma}(\cdot)}{\partial\vartheta^\zeta}, \tag{5.2}$$

gdzie $\hat{\gamma}(\cdot)$ jest funkcją otrzymaną z funkcji energii komplementarnej $\gamma(\boldsymbol{T})$ przez podstawienie $T^{\alpha\beta} = \Psi^{\alpha\beta}(X, \vartheta^\zeta(X, t), \pi^a(Z, t))$,

$$\hat{\gamma}(\cdot) \equiv \hat{\gamma}(X, \vartheta^\zeta(X, t), \pi^a(Z, t)) \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma(\Psi^{\alpha\beta}), \tag{5.3}$$

$\hat{\Gamma}(\cdot)$ jest funkcją zmiennych Z, π^a i funkcjonałem $\vartheta^\zeta(X, t)$ określonym całką

$$\hat{\Gamma}(\cdot) \equiv \hat{\Gamma}(Z, \pi^a(Z, t); [\vartheta^\zeta(X, t)]) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{-h}^{h} \hat{\gamma}(X, \vartheta^\zeta(X, t), \pi^a(Z, t))\sqrt{g}\,dY. \tag{5.4}$$

6. Konstrukcja dwuwymiarowych zagadnień brzegowych

Równania więzów (2.1) i (2.2), równania ruchu (3.6), kinetyczne warunki brzegowe (3.7), równania zgodności deformacji (4.7) i związki konstytutywne (5.2) tworzą podstawowy układ równań dla podstawowych niewiadomych funkcji: uogólnionych naprężeń $\pi^a(Z,t)$, $\vartheta^\zeta(X,t)$, uogólnionych deformacji $\psi^A(Z,t)$ i funkcji więzów $\lambda^\nu(Z,t)$, $\hat{\lambda}^\mu(Z,t)$, $\bar{\lambda}^\nu(Z,t)$. Wykażemy, że powyższy układ równań prowadzi do dwuwymiarowych zagadnień brzegowych dla funkcji $\psi^A(Z,t)$.

Z równań konstytutywnych $(5.2)_1$ i równań zgodności deformacji $(4.7)_1$ otrzymamy związki między uogólnionymi deformacjami i uogólnionymi naprężeniami

$$\frac{\partial\hat{\gamma}(\cdot)}{\partial\vartheta^\zeta} = \hat{C}_\zeta(X, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^a, \vartheta^\zeta). \tag{6.1}$$

Założymy, że w przypadku gdy w równaniach więzów dla naprężeń (2.2) występują funkcje ϑ^ζ zależne od trzech zmiennych przestrzennych, spełniony jest warunek

$$\det\left[\frac{\partial^2\hat{\gamma}(\cdot)}{\partial\vartheta^\zeta\partial\vartheta^\eta} - \frac{\partial\hat{C}_\zeta(\cdot)}{\partial\vartheta^\eta}\right] \neq 0. \tag{6.2}$$

Z równań (6.1) możemy wtedy wyznaczyć $\vartheta^\zeta(X,t)$ jako znane funkcje X, ψ^A, $\psi^A_{,K}$, π^a:

$$\vartheta^\zeta(X,t) = \hat{\vartheta}^\zeta(X, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^a). \tag{6.3}$$

Podstawiając (6.3) do $(4.7)_1$, $(5.2)_1$ oraz do $(3.9)_{1,2}$ wyeliminujemy z podstawowego układu równań nieznane funkcje $\vartheta^\zeta(X,t)$ i otrzymamy zamknięty układ równań na poszukiwane funkcje $\psi^A(Z,t)$, $\lambda^\nu(Z,t)$, $\bar{\lambda}^\nu(Z,t)$, $\hat{\lambda}^\mu(Z,t)$, $\pi^a(Z,t)$

Zestawimy ten układ równań

1°. Równania więzów

$$\begin{aligned} &\alpha_\nu\big(Z, \psi^A(Z,t), \psi^A_{,K}(Z,t)\big) = 0, \quad Z\in\Pi_R, \quad \nu = 1, 2, \ldots \\ &\beta_\mu\big(Z, \psi^A(Z,t)\big) = 0, \quad Z\in\partial\Pi_R, \quad \mu = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{6.4}$$

2°. Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &H^K_{A,K} + h_A + f_A + r_A = i_A, \quad Z\in\Pi_R, \\ &H^K_A n_K = p_A + s_A, \quad Z\in\partial\Pi_R, \end{aligned} \tag{6.5}$$

3°. Równania definicyjne

$$\begin{aligned} H^K_A &= \hat{H}^K_A\big(Z, \psi^B, \psi^B_{,L}, \pi^a; [\hat{\vartheta}^\zeta(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^a)]\big), \\ h_A &= \hat{h}_A\big(Z, \psi^B, \psi^B_{,L}, \pi^a; [\hat{\vartheta}^\zeta(X, \psi^B, \psi^B_{,L}, \pi^a)]\big), \\ f_A &= \hat{f}_A(Z, \psi^B, \psi^B_{,L}), \\ p_A &= \hat{p}_A(Z, \psi^B), \\ i_A &= \hat{\varrho}_{AB}(Z, \psi^D)\ddot{\psi}^B + \hat{\varrho}_{ABC}(Z, \psi^D)\dot{\psi}^B\dot{\psi}^C, \\ r_A &= -\left(\lambda^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,K}}\right)_{,K} + \lambda_\nu\frac{\partial\alpha^\nu}{\partial\psi^A}, \quad Z\in\Pi_R \\ s_A &= \lambda^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,K}}N_K + \hat{\lambda}^\mu\frac{\partial\beta_\mu}{\partial\psi^A} + \bar{\lambda}^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A} - \left(\bar{\lambda}^\nu\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\psi^A_{,l}}\right)_{,l}, \quad Z\in\partial\Pi_R, \end{aligned}$$

4°. Równania zgodności deformacji

$$C_a = \hat{C}_a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^b; [\vartheta^\zeta(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^b)]), \tag{6.7}$$

5°. Równania konstytutywne

$$C_a = \left(\frac{\partial}{\partial \pi^a} \hat{\Gamma}(Z, \pi^b; [\vartheta^\zeta(X, t)])\right) \vartheta^\zeta(X, t) = \hat{\vartheta}^\zeta(X, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^b) \tag{6.8}$$

W przypadku gdy w równaniach więzów dla naprężeń (2.2) nie występują funkcje $\vartheta^\zeta(X, t)$, wtedy $\hat{\gamma}(\cdot)$ nie zależy od $\vartheta^\zeta(X, t)$. Równania (6.1) są spełnione tożsamościowo a w równaniach $(6.6)_{1,2}$, (6.7) i (6.8) $\hat{H}_A(\cdot)$, $\hat{h}_A(\cdot)$, $\hat{C}_a(\cdot)$ i $\hat{\Gamma}(\cdot)$ są funkcjami zmiennych Z, ψ^A, $\psi^A_{,K}$, π^a.

Przy założeniu

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial \pi^b} \hat{\Gamma}_a(\cdot) - \hat{C}_a(\cdot))\right] \neq 0$$

gdzie

$$\hat{\Gamma}_a(\cdot) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \pi^a} \hat{\Gamma}(Z, \pi^b; [\vartheta^\zeta])\right]_{\vartheta^\zeta = \hat{\vartheta}^\zeta(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^b)},$$

$$\hat{C}_a(\cdot) = \hat{C}_a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}, \pi^b; [\hat{\vartheta}^\zeta(X, \psi^B, \psi^B_{,K}, \pi^b)]),$$

z równań (6.7) i (6.8) można wyznaczyć $\pi^a(Z, t)$ jako znane funkcje Z, ψ^A, $\psi^A_{,K}$

$$\pi^a(Z, t) = \hat{\pi}^a(Z, \psi^A, \psi^A_{,K}).$$

Podstawiając te związki do $(6.6)_{1,2}$ otrzymamy $I_A + 2I_\nu + I_\mu$ równań na niewiadome funkcje $\psi^A(Z, t)$, $A = 1, \ldots I_A$, $\lambda^\nu(Z, t)$, $\bar{\lambda}^\nu(Z, t)$, $\nu = 1, \ldots I_\nu$ $\hat{\lambda}^\mu(Z, t)$, $\mu = 1, \ldots I_\mu$. Eliminując funkcje więzów, możemy tą drogą dojść do dwuwymiarowych zagadnień brzegowych dla $\psi^A(Z, t)$. Przedstawiony wyżej sposób konstrukcji dwuwymiarowych zagadnień brzegowych zilustrujemy niżej na przykładzie.

7. Przykład

W wyróżnionej konfiguracji $\varkappa_r$ wprowadźmy ortogonalny układ współrzędnych o wektorach bazy g_α taki, że $g_{33} = g_3 g_3 = 1$. Więzy dla deformacji przyjmijmy w postaci $(2.1)_1$, zaś więzy dla naprężeń w postaci

$$T^{11} = \vartheta^1(X, t), \quad T^{22} = \vartheta^2(X, t), \quad T^{12} = \vartheta^3(X, t),$$

$$T^{K3} = \pi^K(Z, t)\left(1 - \left(\frac{Y}{h}\right)^2\right), \tag{7.1}$$

$$T^{33} = \Psi(X, t),$$

gdzie $\vartheta^\zeta(X, t)$ $\zeta = 1, 2, 3$, $\pi^K(Z, t)$, $K = 1, 2$ są nieznanymi funkcjami — uogólnionymi naprężeniami, $\Psi(X, t)$ jest znaną funkcją. Założymy, że materiał ciała jest jednorodnym izotropowym materiałem Hooka. Trójwymiarowe równania konstytutywne (5.1) mają więc postać

$$E_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta}, \tag{7.2}$$

gdzie $E_{\alpha\beta}$ jest tensorem odkształcenia Greena, Saint Venanta

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}),$$

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1+\nu}{2E}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) - \frac{\nu}{E}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}.$$

Każdemu z uogólnionych naprężeń odpowiada uogólnione odkształcenie które oznaczymy odpowiednio przez $C_\zeta(X, t)$ i $C_K(Z, t)$. W przypadku przyjętych więzów dla naprężeń (7.1) funkcje $C_\zeta(\cdot)$ i $C_K(\cdot)$ nie zależą od $\vartheta^\zeta(X, t)$ i $\pi^K(Z, t)$. Równania (6.1) na podstawie (4.8), $(4.6)_1$ i $(5.2)_1$ będą miały postać

$$L_{\zeta\eta}\vartheta^\eta(X, t) + L_\zeta \Psi(X, t) = \frac{1}{2}(\hat{C}_\zeta - g_\zeta), \tag{7.3}$$

gdzie

$$L_{11} = \frac{1}{E}g_{11}, \quad L_{22} = \frac{1}{E}g_{22}, \quad L_{33} = \frac{1+\nu}{2E}g_{11}g_{22},$$

$$L_{12} = L_{21} = -\frac{\nu}{E}g_{11}g_{22}, \quad L_{13} = L_{31} = L_{23} = L_{32} = 0,$$

$$L_1 = \frac{1+\nu}{2E}g_{11}, \quad L_2 = \frac{1+\nu}{2E}g_{22}, \quad L_3 = 0,$$

$$C_1 = B_{AB}\psi^A_{,1}\psi^B_{,1} + B_{A1}\psi^A_{,1} + B_{11},$$

$$C_2 = B_{AB}\psi^A_{,2}\psi^B_{,2} + B_{A2}\psi^A_{,2} + B_{22},$$

$$C_3 = B_{AB}\psi^A_{,1}\psi^B_{,2} + \frac{1}{2}(B_{A1}\psi^A_{,2} + B_{A2}\psi^A_{,1}) + B_{12},$$

$$g_1 = g_{11}, \quad g_2 = g_{22}, \quad g_3 = 0,$$

$$B_{AB} = \Phi^k_A \Phi_{Bk}, \quad B_{AL} = 2\Phi^k_A \Phi_{Lk}, \quad B_{KL} = \Phi^k_K \Phi_{lk}.$$

Warunek (6.2) jest spełniony. Z równań (7.3) można wyznaczyć $\vartheta^\zeta(X, t)$

$$\vartheta^\zeta(X, t) = L^{\zeta\eta}\left[\frac{1}{2}(\hat{C}_\eta - g_\eta) - L_\eta \Psi(X, t)\right], \tag{7.5}$$

gdzie $L^{\zeta\eta}$ są elementami macierzy odwrotnej do macierzy o elementach $L_{\zeta\eta}$

$$L^{\zeta\eta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} (g^{11})^2, & \nu g^{11}g^{22}, & 0 \\ \nu g^{11}g^{22}, & (g^{22})^2, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{2(1-\nu^2)}{1+\nu}g^{11}g^{22} \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Równania zgodności deformacji (6.7) na podstawie $(4.8)_2$ mają postać

$$C_K(Z, t) = A_B\psi^B_{,K} + A_K, \tag{7.7}$$

gdzie

$$A_B = 2\int_{-h}^{h} \Phi_{Bk}\Phi^k_3\left[1 - \left(\frac{Y}{h}\right)^2\right]\sqrt{g}\,dY, \quad A_K = \int_{-h}^{h} \Phi_k \Phi^k_K\left[1 - \left(\frac{Y}{h}\right)^2\right]\sqrt{g}\,dY.$$

Równania konstytutywne (6.8) mają postać

$$C_K = \bar{L}_{KL}\pi^L(Z, t), \tag{7.8}$$

gdzie

$$\bar{L}_{11} = \frac{1+\nu}{2E}\int_{-h}^{h} g_{11}\left[1-\left(\frac{Y}{h}\right)^2\right]\sqrt{g}\,dY, \quad \bar{L}_{22} = \frac{1+\nu}{2E}\int_{-h}^{h} g_{22}\left[1-\left(\frac{Y}{h}\right)^2\right]\sqrt{g}\,dY,$$

$$L_{12} = 0$$

Z równań (7.7) i (7.8) otrzymamy

$$\pi^K(Z, t) = \frac{1}{\bar{L}_{KK}}(A_B\psi^B_{,K}+A_K). \tag{7.9}$$

Wielkości H^K_A, h_A występujące w równaniach ruchu (6.5) po uwzględnieniu równań więzów (7.1), związków (7.5), (7.9) i wyznaczeniu całek w $(3.10)_{1,2}$ są znanymi funkcjami Z, $\psi^A(Z, t)$, $\psi^A_{,K}(Z t)$. Otrzymamy więc równania różniczkowe na funkcje $\psi^A(Z, t)$. Jeżeli znajdziemy rozwiązanie tych równań to z (7.9) i z (7.5) wyznaczymy $\pi^K(Z, t)$ i $\vartheta^\zeta(X, t)$. Ruch ciała określony jest funkcją deformacji $(2.1)_1$ a naprężenia związkami (7.1).

Literatura cytowana w tekście

1. P. M. NAGHDI; *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik, vol. VI a/2, s. 425-640, Berlin-Haidelberg-New York 1972.
2. Cz. WOŹNIAK; *Constrained Continous Media III, Partly Discretized Bodies*, Bull. Acad. Polon., Ser. Sci. Techn., 21, 4, 1973.
3. Cz. WOŹNIAK; *Non-linear mechanics of constrained material continua. I. Foundations of the theory*, Arch. Mech. Stos., 26, 1, Warszawa 1974.
4. Cz. WOŹNIAK; *Non-linear Mechanics of constrained material continua. II. Ideal constraints for deformation and stresses*. Arch. Mech. Stos., 28, 2, Warszawa 1976.
5. Cz. WOŹNIAK; *On the Non-Standard Continuum Mechamics. II. Continua with Kinetic and Kinematic — Kinetic Constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 24, 1, 1976.
6. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER; *Nieliniowa mechanika konstrukcji* PWN (w druku).

Р е з ю м е

О ПОСТРОЕНИИ ФДВУХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе предложен метод, в котором класс пространственных задач механики гиперупругого тела решается при помощи двухмерных краевых задач. Исходной точкой являются трёхмерные уравнения механики сплошных сред с внутренними связами [4]. Принято идеальные связи для деформации и напряжений. После употребления принципов идеальности получено систему уравнений, которая для определённых предположений даёт возможность постройки двухмерных краевых задач апроксимирующих соответствующую трёхмерную задачу.

Summary

CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE THEORY OF ELASTICITY

The purpose of the paper is the reduction of a class of three-dimensional problems of hyperelastic body to two-dimensional ones. The equations of continuum mechanics with internal constraints are used [4]. For deformations and stresses the ideal constraints are assumed. By means of the principles of ideality the system of equations has been obtained which, under some assumptions, gives the possibility of construction of two-dimensional problems approximating the corresponding tree-dimensional problem.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 listopada 1979 roku.