

ZAGADNIENIA KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ W OTOCZENIU OTWORÓW W OŚRODKU  
NIEJEDNORODNYM. CZĘŚĆ II.

W. I. ANDREJEW (MOSKWA)

W pracy tej wyprowadzone są równania sprężystego i sprężysto-plastycznego zagadnienia grubościennego walca i grubościennej kuli z materiału niejednorodnego. Przytoczone są pewne rozwiązania dla różnych charakterystyk mechanicznych zależnych od promienia. Wyniki obliczeń mogą być wykorzystane do oceny stanu naprężeń w pobliżu otworów w ośrodku niejednorodnym. Przytoczone są także pewne wyniki obliczeń dotyczących zadania o masywie sprężystym z pustką kulistą, z uwzględnieniem sił objętościowych.

1. Niech grubościenny walec sprężysty, o promieniu wewnętrznym  $a$  i zewnętrznym  $b$  jest obciążony równomiernymi ciśnieniami, odpowiednio  $p_a$  i  $p_b$ . Materiał walca jest niejednorodny i w ogólnym przypadku jego sprężyste charakterystyki — moduł Younga i współczynnik Poissona są dowolnymi funkcjami promienia:  $E(r)$  i  $\nu(r)$ . Przytoczmy podstawowe równanie w biegunowych współrzędnych  $r, \theta$ . Równanie równowagi:

$$(1.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

Równanie zgodności odkształceń:

$$(1.2) \quad \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0$$

Prawo Hooke'a:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E(r)} [\sigma_r - \nu(r)(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta - \nu(r)(\sigma_r + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E(r)} [\sigma_z - \nu(r)(\sigma_\theta + \sigma_r)]. \end{aligned}$$

Rozpatrując dostatecznie długi walec i przyjmując dla prostoty  $\varepsilon_z = 0$  (w przypadku  $\varepsilon_z = \varepsilon_\theta$  różnice będą niewielkie), z ostatniego równania (1.3) znajdujemy  $\sigma_z$ , i wyrażając z (1.1)  $\sigma_\theta$  przez  $\sigma_r$  otrzymamy wzory na  $\varepsilon_r$  i  $\varepsilon_\theta$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_r(1-2\nu) - \nu r \sigma_r'], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_r(1-2\nu) - (1-\nu)r \sigma_r']. \end{aligned}$$

Tutaj i dalej prim oznacza różniczkowania względem promienia. Podstawiając (1.4) do (1.2) otrzymamy podstawowe równanie rozwiązujące na  $\sigma_r$ :

$$(1.5) \quad r\sigma_r'' + \left[ \frac{3(1-\nu^2) + 2r\nu\nu^1}{1-\nu^2} - r \frac{E'}{E} \right] \sigma_r' - \left[ \frac{\nu'(1+4\nu)}{1-\nu^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} \right] \sigma_r = 0.$$

Dla  $\nu = \text{const}$  równanie (1.5) upraszcza się

$$(1.5a) \quad r\sigma_r'' + \left( 3 - r \frac{E'}{E} \right) \sigma_r' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} \sigma_r = 0,$$

a w przypadku materiału nieściśliwego ( $\nu = 0.5$ ) przyjmuje najprostszą postać:

$$(1.5b) \quad r\sigma_r'' + \left( 3 - r \frac{E'}{E} \right) \sigma_r' = 0.$$

Całkę ostatniego równania możemy otrzymać w postaci ogólnej dla dowolnej funkcji  $E(r)$ . Oznaczając  $y = \sigma_r$ , dostaniemy

$$y' + \left( \frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) y = 0,$$

stąd

$$y = c_1 \frac{E(r)}{r^3},$$

i ostatecznie

$$(1.6) \quad \sigma_r = c_2 + c_1 \int \frac{E(r)}{r^3} dr.$$

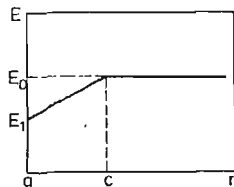
Drugie naprężenie  $\sigma_\theta$  łatwo znajduje się z (1.1). Oczywiście, z (1.6) otrzymuje się rozwiązanie dla materiału jednorodnego ( $E = \text{const}$ )

$$(1.7) \quad \sigma_r = c_2 - c_1 \frac{E}{2r^2}.$$

W przypadku materiału ściśliwego ( $\nu = \text{const} \neq 0.5$ ) rozwiązanie równania (1.5a) istotnie zależy od postaci funkcji  $E(r)$  i dla pewnych zależności może być sprowadzone do równań klasycznych. Tak na przykład, jeśli  $E = E_0 r^n$ , to równanie (1.5a) jest równaniem Eulera

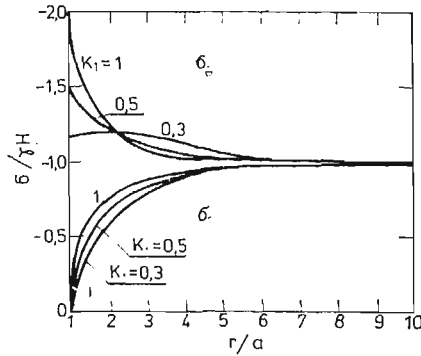
$$r\sigma_r'' + (3-n)\sigma_r' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{n}{r} \sigma_r = 0.$$

W przypadku zależności  $E(r)$  odcinkami liniowej (na rys. 1. jest ona pokazana dla ośrodka nieograniczonego ( $b \rightarrow \infty$ )) równanie (1.5a) sprowadza się do hipergeometrycz-



Rys. 1.

nego, a w przypadku  $\nu = 0.5$  rozwiązanie otrzymuje się w sposób elementarny przy pomocy wzoru (1.6) dla obszaru  $a \leq r \leq c$  i (1.7) dla przedziału  $c \leq r < \infty$ . Na Rys. 2. przytoczone są pewne wykresy naprężeń  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  dla przypadku  $c = 3a$ ,  $p_a = 0$ ,  $p_b = -\gamma H$  i różnych wartości  $k_1 = \frac{E_1}{E_0}$ . Widać, że wykresy  $\sigma_r$  zmieniają się nieznacznie w porównaniu z naprężeniami w zagadnieniu jednorodnym, podczas gdy naprężenia  $\sigma_\theta$  w pobliżu



Rys. 2.

brzegu pustki maleją znacznie w miarę zmniejszania się parametru  $k_1$ , przy tym maksimum naprężeń może przesuwać się od brzegu pustki w głąb masywu.

2. W zagadnieniu grubościennej kuli sprężystej, obciążonej na wewnętrznym brzegu ( $r = a$ ) ciśnieniem  $p_a$ , a na zewnętrznym ( $r = b$ ) ciśnieniem  $p_b$ , przy takich samych założeniach jak w rozpatrywanym powyżej zagadnieniu rury grubościennej, wśród podstawowych równań różnić się będzie równanie równowagi, które we współrzędnych kulistych  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  ma postać

$$(2.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Oprócz tego, uwzględniając, że  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$  i wyrażając na podstawie (2.1)  $\sigma_\theta$  przez  $\sigma_r$ , prawo Hooke'a można teraz zapisać w następującej postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r(1-2\nu) - \nu r \sigma_r'], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r(1-2\nu) + \frac{1-\nu}{2} r \sigma_r' \right]. \end{aligned}$$

Trzeci związek przy uwzględnieniu  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$  będzie analogiczny. Podstawiając (2.2) do (1.2) (warunek Saint-Venanta w przypadku symetrii środkowej ma taką postać, jak i w płaskim osiowosymetrycznym zadaniu) otrzymujemy podstawowe równanie:

$$(2.3) \quad r\sigma_r'' + \left(4 - \frac{E'}{E} r - \frac{\nu'r}{1-\nu}\right) \sigma_r' + \left(-2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} - \frac{4\nu'}{1-\nu}\right) \sigma_r = 0.$$

W przypadku  $\nu = \text{const}$  równanie przyjmuje postać

$$(2.3a) \quad r\sigma_r'' + \left(4 - \frac{E'}{E} r\right) \sigma_r' - 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} \sigma_r = 0,$$

a dla  $\nu = 0.5$  ma najprostszą postać

$$(2.3b) \quad r\sigma_r'' + \left(4 - \frac{E'}{E}r\right)\sigma_r' = 0.$$

Ostatnie równanie pozwala otrzymać rozwiązanie w postaci całki

$$(2.4) \quad \sigma_r = c_2 + c_1 \int \frac{E(r)dr}{r^\nu}.$$

Przytoczymy niektóre rozwiązania otrzymanych równań dla różnych zależności  $E(r)$ . W przypadku materiału ściśliwego ( $\nu = \text{const} \neq 0.5$ ) dla funkcji  $E(r) = E_0 r^n$  równanie (2.3a) sprowadza się do postaci

$$(2.5) \quad \varrho^2 s'' + (4-n)\varrho s' - 2kns = 0.$$

Tutaj  $\varrho = \frac{r}{\alpha}$ ,  $k = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$ ,  $s = \frac{\sigma_r}{p}$ , gdzie  $p$ - pewne ciśnienie charakterystyczne. Równanie (2.5) jest równaniem Eulera, którego rozwiązanie zapisuje się w postaci

$$(2.6) \quad s = c_1 \varrho^\alpha + c_2 \varrho^\beta,$$

gdzie

$$\alpha, \beta = \frac{n-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-3)^2}{4} + 2kn}.$$

W przypadku zależności przytoczonej na rys. 1., równanie (2.3a) w obszarze  $a \leq r \leq c$  przyjmuje postać

$$(2.7) \quad \varrho(\varrho+A)s'' + (3\varrho+4A)s' - 2ks = 0,$$

gdzie  $A = \frac{E_1 c - E_0 a}{(E_0 - E_1)a}$ . Podstawiając  $\varrho = A(x-1)$ ,  $s = y(x)$  otrzymamy hipergeometryczne równanie Gaussa

$$(2.7a) \quad x(x-1)y'' + (3x+1)y' - 2ky = 0,$$

które w skróconej postaci da się zapisać [1] następująco

$$(2.7b) \quad H(\alpha, \beta, \gamma, y, x) = 0,$$

ze stałymi

$$\alpha, \beta = 1 \pm \sqrt{1+2k},$$

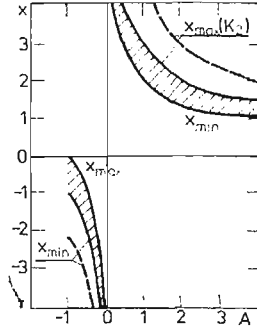
$$\gamma = -1$$

Postać rozwiązania równania (2.7b) zależy od obszaru zmienności zmiennej  $x$ , która związana jest z  $r$  zależnością

$$(2.8) \quad x = \frac{r}{aA} + 1.$$

Na rys. 3. pokazane są obszary zmienności  $x$  w zależności od parametru  $A$ . Zauważmy, że położenie krzywych ograniczających te obszary  $x_{\max}$  dla  $A < 0$  i  $x_{\min}$  dla  $A > 0$  nie zależy od wartości  $k_1 = \frac{E_1}{E_0}$  i  $k_2 = \frac{c}{d}$ , równocześnie położenie krzywych  $x_{\min}$  dla

$A < 0$  i  $x_{\max}$  dla  $A > 0$  zależy od  $k_2$ . W ten sposób, obszar zmienności  $x$  można rozbić na dwa. A mianowicie,  $A < 0$   $x \leq 0$ , oraz  $A > 0$   $x \geq 1$ . Wówczas rozwiązanie równania (2.7b) jest znane tylko dla obszaru  $0 < x < 1$ , a rozwiązanie dla półprostych  $x < 0$  i  $x > 1$  otrzymuje się przy pomocy określonych podstawień. Oddzielnym przypadkiem



Rys. 3.

est  $A = 0$ , gdy  $x$  jest nieokreślone, ale w tym przypadku bezpośrednio z (2.7) otrzymujemy równanie Eulera.

Przytoczymy rozwiązanie dla przypadku  $A > 0$ . Podstawienie  $\xi = \frac{1}{x}$ ,  $y(x) = |x|^{-\alpha} \eta(\xi)$  sprowadza rozwiązanie równania (2.7b) do rozwiązań równania

$$(2.9) \quad H(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \eta, \xi) = 0,$$

dla obszaru  $0 \leq \xi \leq 1$ . Przy tym

$$(2.10) \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \alpha - \gamma + 1, \quad \gamma_1 = \alpha - \beta + 1,$$

jeśli  $\gamma_1$  nie jest liczbą całkowitą. Rozwiązanie równania (2.7b) wyraża się przez hipergeometryczne funkcje  $F_i$  [2] i po nie skomplikowanych przekształceniach można otrzymać wyrażenie dla naprężeń:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= p \xi^\alpha [c_1 F_1(\xi) + c_2 \xi^{1-\gamma_1} F_2(\xi)], \\ \sigma_\theta &= p \xi^\alpha \left\{ c_1 \left[ \left( 1 - \alpha \frac{1-\xi}{2} \right) F_1(\xi) - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma_1} \frac{1-\xi}{2} \xi F_3(\xi) \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left[ \xi^{1-\gamma_1} \left( 1 - \frac{1-\xi}{2} (1 + \alpha - \gamma_1) \right) F_2(\xi) - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\gamma_2} \xi^{2-\gamma_1} \frac{1-\xi}{2} F_4(\xi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Tutaj

$$F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{\alpha_i+k-1}^k c_{\beta_i+k-1}^k}{c_{\gamma_i+k-1}^k} \xi^k,$$

gdzie  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  zgodne są z (2.10), a  $\alpha_2 = \alpha_1 - \gamma_1 + 1$ ,  $\beta_2 = \beta_1 - \gamma_1 + 1$ ,  $\gamma_2 = 2 - \gamma_1$ ,  $\alpha_3 = \alpha_1 + 1$ ,  $\beta_3 = \beta_1 + 1$ , ...,  $\gamma_4 = \gamma_2 + 1$ . Stałe rozwiązania (2.11) można wyznaczyć z warunków brzegowych dla  $\xi = \xi_1$  i  $\xi = \xi_2$ , odpowiadających brzegom kuli  $a$  i  $b$ .

W przypadku gdy  $\gamma_1$  jest liczbą całkowitą, co jest możliwe tylko dla wartości  $\nu = \frac{3}{11}$

(dla  $0 < \nu < 0.5$   $\gamma_1$  zmienia się od 3 do  $1+2\sqrt{3}$ , przy czym jedyną liczbą całkowitą w tym przedziale jest  $\gamma_1 = 4$ ) rozwiązania równania (2.9) można sprowadzić przy pomocy podstawienia

$$\eta(\xi) = |\xi|^{1-\nu} \eta_1(\xi),$$

do rozwiązania równania

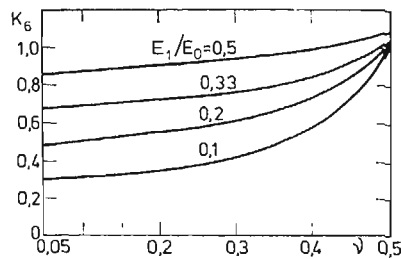
$$H(\alpha_1 - \gamma_1 + 1, \beta_1 - \gamma_1 + 1, 2 - \gamma_1, \eta, \xi) = 0.$$

Rozwiązanie powyższego równania jest również znane i można je znaleźć np. w [1].

Jak już zauważyliśmy, w przypadku  $A = 0$  równanie (2.7) przechodzi w równanie Eulera

$$p^2 s'' + 3ps' + -2ks = 0,$$

które jest szczególnym przypadkiem równania (2.5) dla  $n = 1$ . Parametry  $\alpha$  i  $\beta$ , występujące w rozwiązaniu (2.6) są rzeczywiste, ponieważ  $k = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$  — jest zawsze dodatnie. Rozwiązanie (2.4) jest ważne w obszarze liniowej zależności  $E(r)$  ( $a \leq r \leq c$ ), dla  $r \geq c$  ważne jest rozwiązanie zadania jednorodnego. Przytoczymy pewne wyniki obliczeń dla danego przypadku przy warunkach brzegowych  $r = a, p_a = 0, r = b \rightarrow \infty, p_b = -\gamma H$ . Na rys. 4. przytoczone są wykresy zależności współczynnika koncentracji naprężeń  $k_\sigma = \frac{|\sigma_0(r=a)|}{\gamma H}$  od współczynnika Poissona przy różnych zależnościach



Rys. 4.

$E_1/E_0$ . Zauważmy, że strefa niejednorodności, dana zależnością  $a/c$  jest w tym przypadku ściśle określona (dla  $A = 0, \frac{a}{c} = \frac{E_1}{E_0}$ ). Z rysunku widać, że przy silnej niejednorodności w pobliżu brzegu ( $E_1/E_0$  — małe) wpływ współczynnika Poissona może być dostatecznie duży.

3. Rozpatrzmy sprężysto-plastyczne zadanie o równowadze grubościennej kuli przy tych samych założeniach co w p. 2. Będziemy zakładać, że w każdym punkcie materiał spełnia warunek idealnej plastyczności, przy tym moduł Younga i granica płynięcia  $\sigma_r$  są funkcjami promienia

$$(3.1) \quad \begin{aligned} E(r) &= E_0 \left[ 1 + (k_1 - 1) \left( \frac{a}{r} \right)^n \right], \\ \sigma_r(r) &= \sigma_{r0} \left[ 1 + (k_r - 1) \left( \frac{a}{r} \right)^m \right] \end{aligned}$$

Przy przejściu do ośrodka nieograniczonego (zewnątrzny promień kuli  $b \rightarrow \infty$ ), takie funkcje asymptotyczne dostatecznie dobrze opisują rzeczywiste zależności. Oprócz tego, jak zwykle w sprężysto-plastycznych zadaniach będziemy zakładać, że materiał jest nieściśliwy ( $\nu = 0.5$ ). Rozwiązanie w strefie sprężystej zgodnie z (2.4) przyjmuje postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{re} &= c_2 + c_1 \left[ -\frac{a^3}{3r^3} - \frac{k_1 - 1}{n + 3} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \right], \\ \sigma_{oc} &= c_2 + c_1 \frac{a^3}{6r^3} + \frac{(k_1 - 1)(n + 1)}{2(n + 3)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \end{aligned}$$

Drugie naprężenie otrzymano z równania (2.1), indeks odpowiada strefie sprężystej.

W przypadku symetrii środkowej warunki plastyczności Hubera-Misesa i Treski-Saint Venanta mają jednakową postać

$$(3.3) \quad \sigma_0 - \sigma_r = \kappa \sigma_r(r), \quad \kappa = \pm 1.$$

Podstawiając ten związek do (2.1), po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{rp} &= D + 2\kappa \sigma_{T0} \left[ \ln \frac{r}{a} - \frac{k_T - 1}{m} \left(\frac{a}{r}\right)^m \right], \\ \sigma_{0p} &= D + 2\kappa \sigma_{T0} \left[ \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} + \frac{(k_T - 1)(m - 2)}{2m} \left(\frac{a}{r}\right)^m \right]. \end{aligned}$$

Tutaj indeks  $p$  odpowiada strefie plastycznej. Stałe  $C_1$ ,  $D$ ,  $C_2$ , oraz promienie brzegów strefy plastycznej  $r_i$  określa się z warunków brzegowych na powierzchni kuli

$$(3.5) \quad \begin{aligned} r = a, \quad \sigma_r &= -p_a, \\ r = b, \quad \sigma_r &= -p_b, \end{aligned}$$

i na wspomnianych granicach

$$(3.5a) \quad \begin{aligned} r = r_i, \quad \sigma_{re} &= \sigma_{rp}, \\ \sigma_{0e} - \sigma_{re} &= \kappa \sigma_T(r_i), \\ u_e &= u_p. \end{aligned}$$

Drugi ze związków (3.5a) odpowiada punktowi przejścia materiału w stan uplastycznienia,  $u$  — jest przemieszczeniem promieniowym.

Przed wyznaczeniem stałych, należy zbadać zagadnienie powstawania stref plastycznych. Na podstawie związków (3.2) przejście w stan plastyczny zachodzi przy spełnieniu warunku

$$(3.6) \quad F(r) = \frac{c_1}{2\kappa \sigma_{T0}} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{1 + (k_1 - 1)(a/r)^n}{1 + (k_T - 1)(a/r)^m} = 1.$$

Po znalezieniu maksimum funkcji  $F(r)$ , otrzymamy równanie określające  $r_s$  — promień, od którego zaczynają pojawiać się odkształcenia plastyczne

$$(3.7) \quad 3 + \alpha \left(\frac{a}{r_s}\right)^m + \beta \left(\frac{a}{r_s}\right)^n + \gamma \left(\frac{a}{r_s}\right)^{m+n} = 0.$$

Tutaj  $\alpha = (3 - m)(k_T - 1)$ ,  $\beta = (3 + n)(k_1 - 1)$ ,  $\gamma = (3 + n - m)(k_1 - 1)(k_T - 1)$ . W zależności od wartości  $n$ ,  $m$ ,  $k_1$ ,  $k_T$  zachowanie się funkcji  $F(r)$  może znacznie się różnić. Na

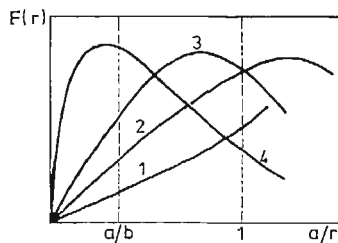
Rys. 5. podaliśmy cztery różne postacie tej funkcji. Widać, że funkcja  $F(r)$  może nie posiadać maksimum (krzywa 1), a w przypadku jego istnienia, może ono znajdować się wewnątrz ścianki kuli (krzywa 3) lub na zewnątrz jej (krzywe 2 i 4). W ostatnich dwóch przypadkach powstają oczywiście odkształcenia plastyczne na wewnętrznym lub zewnętrznym brzegu kuli. W przypadku braku maksimum, pozostaje określić największe wartości  $F(r)$ , (np. na krzywej 1 dla  $r = a$ ). Możliwe są również funkcje posiadające minimum, np. dla  $n < -(m+3)$ . W tym przypadku odkształcenia plastyczne powstają kolejno na powierzchniach kuli i przy zwiększeniu obciążenia strefy łączą się.

Łatwo znajdujemy ciśnienie, gdzie najpierw pojawią się odkształcenia plastyczne. Określając  $C_1$  dla zagadnienia sprężystego, zgodnie z (3.6) znajdziemy

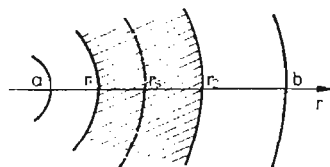
$$(3.8) \quad p_s = (p_a - p_b)_s = \left[ \frac{1 - k_2^3}{3} + \frac{k_1 - 1}{n + 3} (1 - k_2^{n+3}) \right] \frac{2\kappa\sigma_{T0} [1 + (k_T - 1)(a/r_s)^m]}{[1 + (k_1 - 1)(a/r_s)^n](a/r_s)^3}.$$

Tutaj  $k_2 = \frac{a}{b}$ . Z (3.8) można także określić znak  $\kappa$ , jeśli tylko znak wyrażenia znajdującego się w pierwszym nawiasie kwadratowym przy znanych  $k$ ,  $n$  i  $k_2$  jest znany. Np. dla  $n > 0$ ,  $\kappa = \text{sign}(p_a - p_b)$ .

W zależności od miejsca wystąpienia strefy plastycznej może być różny dalszy sposób rozwiązywania. Rozpatrzmy przypadek, gdy odkształcenia plastyczne powstają wewnątrz ścianki kuli:  $a < r_s < b$ . Przy zwiększeniu ciśnienia  $p$ , strefa plastyczna rozszerza się



Rys. 5.



Rys. 6.

w obie strony aż do momentu gdy jedna z granic pokryje się z jedną z powierzchni kuli, a następnie, do całkowitego przejścia kuli w stan plastyczny. Oznaczając granice strefy plastycznej przez  $r_1$  i  $r_2$  (p. rys. 6), i dwukrotnie spełniając warunki (3.5) i (3.5a), znajdujemy osiem związków dla ośmiu niewiadomych:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $D$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  i  $B$ , gdzie  $C_3$  i  $C_4$  — stałe rozwiązania zagadnienia sprężystego, typu (3.2) dla drugiej (wewnętrznej lub zewnętrznej) strefy sprężystej, a  $B$  — stała występująca w wyrażeniu na przemieszczenia w strefie plastycznej

$$(3.9) \quad u_p = \frac{B}{r_2}.$$

Ostatni związek otrzymuje się drogą całkowania warunku nieściśliwości. Przemieszczenie w strefie sprężystej określa się z prawa Hooke'a (2.2) i związku Cauchy'ego  $u = \varepsilon_{\theta r}$ . Układ ośmiu równań dla określenia powyżej wymienionych stałych, może być sprowadzony do dwóch, z których jedno jest liniowe

$$(3.10) \quad \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 \frac{1 + (k_T - 1)(a/r_1)^m}{1 + (k_T - 1)(a/r_2)^m} = \frac{1 + (k_1 - 1)(a/r_1)^n}{1 + (k_1 - 1)(a/r_2)^n},$$



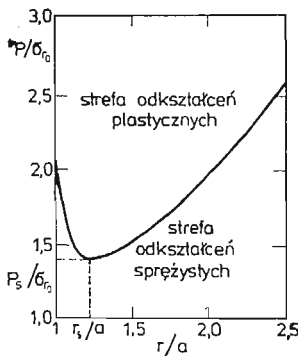
a drugie przestępne

$$(3.11) \quad -\frac{p}{2\kappa\sigma_{T0}} = \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_T - 1}{m} \left[ \left( \frac{a}{r_1} \right)^m - \left( \frac{a}{r_2} \right)^m \right] + \left\{ \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r_1} \right)^3 + \left( \frac{a}{r_2} \right)^3 - k_2^3 \right] + \right. \\ \left. + \frac{k_1 - 1}{n + 3} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r_1} \right)^{n+3} + \left( \frac{a}{r_2} \right)^{n+3} - k_2^{n+3} \right] \right\} \frac{1 + (k_T - 1)(a/r_2)^m}{1 + (k_1 - 1)(a/r_2)^n} \left( \frac{r_2}{a} \right)^3.$$

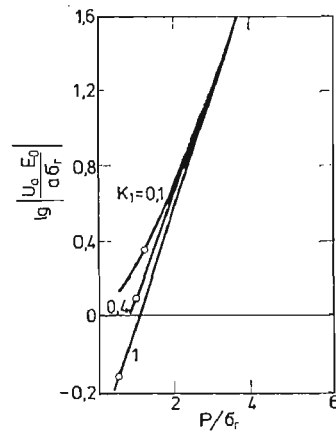
W celu wyznaczenia z tych związków promieni  $r_1$  i  $r_2$  przy danym  $p > p_s$  stosuje się następującą metodę odwrotną.

Wybierając dowolną wartość  $r_1$  z przedziału  $[a, r_s]$ , z (3.10) znajdujemy odpowiadającą wartość  $r_2$  i dla otrzymanej pary wartości  $r_1, r_2$  z (3.11) określa się konieczne ciśnienie  $p$ . (Przy dojściu strefy plastycznej do jednej z powierzchni kuli otrzymuje się przypadek zwyrodniały i dalsze obliczenia prowadzi się jedynie przy pomocy związku (3.11) dla  $r_1 = a$  lub  $r_2 = b$ ).

Na rys. 7 pokazaliśmy zależność  $p(r_1, r_2)$  dla przypadku  $\sigma_T = \sigma_{T0} = \text{const}$ ,  $k_1 = 0.1$ ,  $n = 2$ ,  $b \rightarrow \infty$  ( $k_2 = 0$ ). Według tego wykresu można dla danego ciśnienia  $p$  określić



Rys. 7.



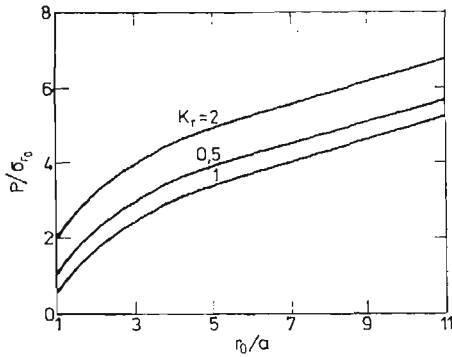
Rys. 8.

granice strefy plastycznej. Znając je, pozostałe 6 stałych można określić bardzo łatwo z pozostałych związków. Na rys. 8 pokazane są przemieszczenia punktów brzegu pustki w zależności od ciśnienia dla różnych stopni niejednorodności sprężystej. Kółka na krzywych odpowiadają początkowi odkształcenia plastycznego.

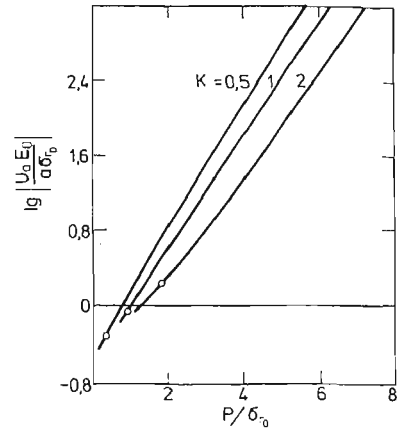
Na rys. 9 pokazaliśmy jeszcze jeden przykład obliczenia dla przypadku  $b \rightarrow \infty$  ( $k_2 = 0$ ),  $n = 2$ ,  $k = 0.5$ ,  $m = 2$  i różnych wartości  $k_T$ . W tym przykładzie odkształcenia plastyczne pojawiają się na brzegu pustki ( $r = a$ ), a przy powiększeniu ciśnienia, strefa plastyczna (określona promieniem  $r$ ) rozprzestrzenia się w głąb masywu. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń, na rys. 10. podaliśmy wykresy przemieszczeń punktów brzegu pustki w zależności od ciśnienia, dla różnych wielkości plastycznej niejednorodności. Porównując wykresy na rys. 8 i 10 można zauważyć, że przy dużych ciśnieniach niejednorodność plastyczna znacznie bardziej wpływa na przemieszczenia, niż sprężysta. Jest to związane z tym, że przy dużych ciśnieniach, kiedy strefa plastyczna jest dostatecznie

duża, jej rozmiary mało zależą od wielkości sprężystej niejednorodności, a znacznie od plastycznej.

4. Na zakończenie rozpatrzmy zagadnienie o wpływie sił objętościowych i asymetrii obciążeń zewnętrznych na stan naprężenia w pobliżu pustki kulistej. Pełne sformułowanie zadania podane jest w [3]. W celu rozwiązania zadania posłużono się algorytmem zapro-



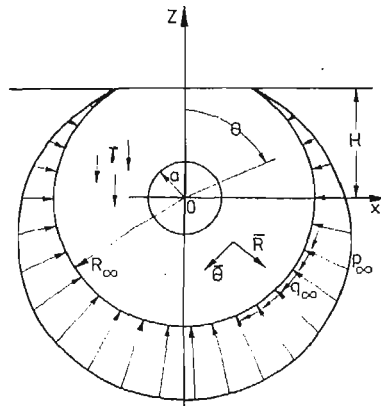
Rys. 9.



Rys. 10.

ponowanym w [4]. Programy i obliczenia wykonali A. B. Zołotow, W. I. Prokopiew, B. N. Sidorow i autor niniejszej pracy. Poniżej krótko przedstawimy metodę obliczeń i wyniki.

Na Rys. 11. pokazany jest schemat obliczeniowy zadania, zgodnie z którym, z niejednorodnej sprężystej półprzestrzeni wycina się ściętą kulę o promieniu  $R_\infty$ , a — jest



Rys. 11.

promieniem pustki. Z powodu symetrii względem osi  $Oz$  wystarczy rozpatrzeć połowę kuli. W związku z przyjętą geometrią i obciążeniami oddziaływującymi na rozpatrywany obszar, warunki brzegowe mogą być zapisane w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} r = a \\ \theta \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} \sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0, \\
 & \left. \begin{array}{l} \theta = 0, \quad a \leq r \leq H \\ \theta = \pi, \quad a \leq r \leq R_\infty \end{array} \right\} v = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \\
 (4.1) \quad & \left. \begin{array}{l} r = R_\infty \\ \arccos \frac{H}{R_\infty} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_r = -p_\infty = -\gamma(H - R_\infty \cos \theta) \left( \frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right), \\ \tau_{r\theta} = q_\infty = \frac{\gamma}{2} (H - R_\infty \cos \theta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sin 2\theta, \end{cases} \\
 & \left. \begin{array}{l} r = \frac{H}{\cos \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{H}{R_\infty} \end{array} \right\} \begin{cases} \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta = 0, \\ \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Na każdy element rozpatrywanej przestrzeni oddziałują siły objętościowe

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \bar{R} = \gamma \cos \theta, \\
 & \bar{\Theta} = \gamma \sin \theta.
 \end{aligned}$$

W rozpatrywanej metodzie mechaniczne stałe materiału można przyjąć jako dowolne funkcje dwóch współrzędnych, jednak obliczenia przeprowadza się dla modułu Younga danego w postaci (3.1) i  $\nu = \text{const}$ . Sposób przyjęty w obliczeniach pozwala na wyrowadzenie równań równowagi na cyfrowej maszynie matematycznej. W tym celu konieczna jest znajomość funkcjonałów energii odkształconej strefy i pracy sił zewnętrznych. W rozwiązaniu zadania stosuje się metodę elementów skończonych, w której obszar dzieli się kulistymi i stożkowymi powierzchniami na skończoną liczbę podobszarów. Zakładając, że wewnątrz  $(i, j)$ -tego elementu wszystkie odkształcenia i naprężenia są stałe, można dla niego napisać funkcjonał energii

$$(4.3) \quad \Phi_{ij} = \left\{ \frac{1}{E(r)} [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_\varphi^2 - 2\nu(\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta \sigma_\varphi + \sigma_r \sigma_\varphi) + 2(1+\nu)\tau_{r\theta}^2] \right\}_{ij} \cdot v_{ij},$$

gdzie

$$v_{ij} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f(\xi) \sin \theta d\xi d\theta,$$

$$a) \quad f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{H}{R_\infty} \quad \text{i} \quad r > \frac{H}{\cos \theta}, \\ \xi^2 & \end{cases}$$

punktowi węzłowemu odpowiadać będzie funkcjonał

$$\Phi_{cij} = \frac{1}{4} (\Phi_{i-1, j-1} + \Phi_{i-1, j} + \Phi_{i, j-1} + \Phi_{ij}),$$

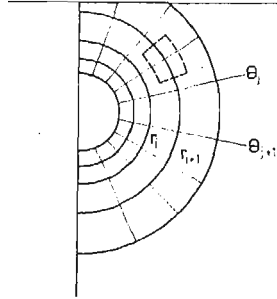
o wartości średniej w objętości, ograniczonej linią kropkowaną na rys. 12. Zgodnie z twierdzeniem o skończenie wymiarowych operatorach liniowych [5], dany funkcjonał można jednoznacznie przedstawić jako macierz współczynników układu liniowych równań algebraicznych, która odpowiada równaniom równowagi.

W celu obliczenia prawych części liniowych równań algebraicznych wykorzystuje się wzory (4.1), (4.2). Dla  $(i, j)$ -tego punktu węzłowego

$$(4.4) \quad \begin{aligned} F'_{ij} &= \bar{R}_j V_{ij} + [p_\infty R_\infty^3 (\text{jeśli } r = R_\infty)] s_{ij}, \\ F''_{ij} &= \bar{\Theta}_j V_{ij} + [q_\infty R_\infty^3 (\text{jeśli } r = R_\infty)] s_{ij}, \end{aligned}$$

gdzie

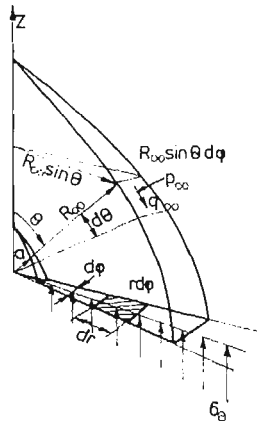
$$s_{ij} = \pi \frac{\cos \theta_{j-1} - \cos \theta_{j+1}}{2},$$



Rys. 12.

a  $p_\infty$  i  $q_\infty$  — oznaczają normalne i styczne ciśnienia, przyłożone na zewnętrznej powierzchni, dane wzorami (4.1).

Dla określenia współczynników układu i jego rozwiązania metodą Gaussa wykorzystuje się procedury w języku Algol. Zauważmy, że wzdłuż promienia obliczaliśmy nierównomierną siatkę, zagęszczającą się przy brzegu pustki. W wyniku obliczeń, wyznaczono naprężenia w środkach elementów, a w celu obliczenia naprężeń na granicach obszaru zastosowano ekstrapolację liniową. Przed przejściem do omówienia wyników należy powiedzieć kilka słów o oszacowaniu dokładności obliczeń. Pierwszą, ocenę całkową przeprowadzamy na podstawie analizy spełnienia warunku równowagi na osi Oz (rys. 13). Całka z obciążeń powierzchniowych i sił objętościowych (Weryfikację przeprowadzono dla przypadku  $R_\infty < H$ )



Rys. 13.

$$I_1 = \gamma \frac{d\varphi}{3} (R_\infty^3 - a^3) + d\varphi \int_0^{\pi/2} p_\infty R_\infty \sin\theta \cos\theta d\theta + d\varphi \int_0^{\pi/2} q_\infty R_\infty^2 \sin^2\theta d\theta.$$

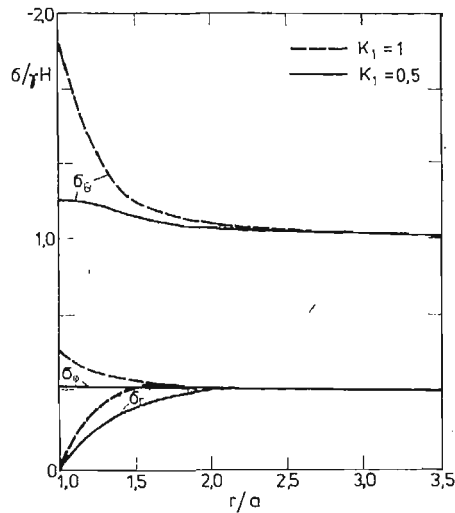
porównywano z obliczoną całką z naprężenia  $\sigma_\theta$ , oddziaływującego na warstwę poziomą

$$I_2 = d\varphi \int_a^{R_\infty} \sigma_\theta r dr$$

Różnica pomiędzy tymi całkami dla pewnych wariantów obliczeń nie przekraczała 0.4%.

Druga weryfikacja polegała na porównaniu naprężeń  $\sigma_\theta$  w punkcie  $\left(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$  dla przypadku jednorodnego ( $k_1 = 1$ ) i rozwiązania zadania o ściskaniu w trzech kierunkach masywu z pustką kulistą (p. [3]). W punkcie tym, jak pokazuje analiza analogicznego zagadnienia płaskiego z otworem walcowym, wpływ ciężaru własnego ośrodka i asymetria obciążeń zewnętrznych nie powinny się różnić od bardziej prostego rozwiązania. W rozpatrywanym zadaniu, odpowiednie porównanie pokazało, że w danym przypadku też ma to miejsce, różnica w wielkościach naprężeń  $\sigma_\theta$  wynosiła około 2%, co jest dobrą dokładnością dla metody elementów skończonych.

Na rys. 14. pokazaliśmy wykresy trzech składowych naprężenia wzdłuż poziomego promienia dla dwóch wersji obliczeń: zadanie jednorodne ( $k_1 = 1$ ) i niejednorodne ( $k_1 = 0.5$ ) dla  $\nu = 0.23$ ,  $\gamma = 21.1$  Pa.



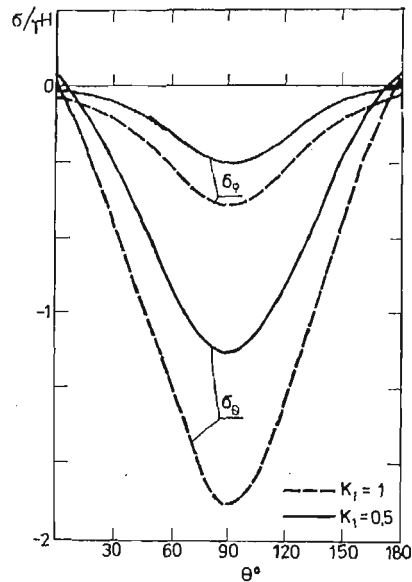
Rys. 14.

Na podstawie tych wykresów można wyciągnąć dwa podstawowe wnioski.

1. Wpływ sił objętościowych i asymetrii obciążenia zewnętrznego daje istotne różnice w naprężeniach  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varphi$  w porównaniu z zadaniem Lamègo dla grubościennej kuli w której po pierwsze  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ , a po drugie  $\sigma_{\theta \max} = 1.5 \gamma H$ . Równocześnie wzdłuż danego kierunku  $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$  wszystkie trzy naprężenia (przypadek jednorodny) praktycznie są takie same jak w zadaniu o ściskaniu (w trzech kierunkach) masywu z pustką kulistą.

2. Wpływ niejednorodności na wielkość naprężeń w pobliżu pustki całkowicie odpowiada temu, co było pokazane przy rozwiązaniu dużo prostszego zadania z symetrią środkową.

Na rys. 15. przedstawione są naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varphi$  na brzegu pustki w zależności od kąta  $\theta$  dla tych samych dwóch wersji obliczeń. Widać oczywiste różnice w porównaniu z zadaniem Lamègo, związane z istotną zmiennością naprężeń wzdłuż brzegu pustki,



Rys. 15.

aż do miejsca w pobliżu biegunów, gdzie pojawiają się niewielkie naprężenia rozciągające, co może być przyczyną zniszczenia w gruntach, w których granica wytrzymałości na rozciąganie jest znacznie mniejsza od granicy wytrzymałości na ściskanie. Oprócz tego, i to jest ważnym czynnikiem, niejednorodność w pobliżu pustki wpływa proporcjonalnie na obie składowe naprężenia.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń zanalizowano wpływ rozmiaru pustki  $a$  na stan naprężenia przy stałej głębokości  $H$ . Obliczenia przeprowadzono dla  $a = 0.0008 \div 0.2 H$ , przy czym okazało się, że przy wszystkich tych wartościach naprężenie  $\sigma_{\theta \max} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right)$  praktycznie się nie zmienia, a naprężenie  $\sigma_\theta$  w punktach ( $r = a, \theta = 0 \cdot \pi$ ) zmienia się o wielkość rzędu  $\gamma a$ , co jest zgodne z analogicznymi obliczeniami we wspomnianym powyżej zadaniu o pustce walcowej. Przeprowadzone obliczenia pokazały, że dla dostatecznie zagłębionych otworów ( $a \leq 0.2H$ ), obliczenia z uwzględnieniem niejednorodności mogą być przeprowadzone w dwóch etapach. Pomijając siły objętościowe, można otrzymać rozwiązanie zawierające współczynnik oporu bocznego  $\frac{\nu}{1-\nu}$  z zadania o ściskaniu masywu w trzech kierunkach. Biorąc pod uwagę to, że wpływ niejednorodności na naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\varphi$  w pobliżu brzegu pustki jest proporcjonalny dla wszystkich war-

tości  $\theta$ , współczynnik proporcjonalności można określić z rozwiązania zadania Lamego dla kuli grubościennej. Ponieważ rozwiązanie ostatniego zadania można otrzymać stosunkowo łatwo, to można również przeanalizować różne postacie niejednorodności dla szeroko zmieniających się wartości parametrów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Э. Камке; *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976, 421.
2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи; *Высшие трансцендентные функции, Гипергеометрическая функция, функции Лежандра*, Наука, М., 1965.
3. W I. ANDREJEW; *Zagadnienie koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w ośrodku niejednorodnym*, cz. I, MTiS 3, 1980.
4. А. Б. Золотов, В. Н. Сидоров; *Алгоритмизация краевых задач строительной механики на ЭВМ*, Строительная механика и расчеты сооружений, № 5, 1975.
5. В. А. Ильин, И. Г. Позняк; *Линейная алгебра*, Наука, М., 1974.

#### Резюме

#### ВОПРОСЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. Ч. II

Данная работа является продолжением и развитием I части. В ней рассматриваются результаты собственных исследований автора в вопросе концентрации напряжений в неоднородной среде. Приведены решения упругой и упруго-пластической задач для толстостенных цилиндра и шара с различными законами неоднородности. Рассматривается также задача о концентрации напряжений вблизи подземной сферической полости с учетом собственного веса среды и асимметрии внешней нагрузки, решение которой получено численным методом.

#### Summary

#### STRESS CONCENTRATION IN THE NEIGHBOURHOOD OF HOLES IN A NONHOMOGENEOUS MEDIUM. PART II.

Author's results are considered referring to the stress concentration in a nonhomogeneous medium. The solutions are discussed to elastic and elasto-plastic problems in the case of a thick-walled cylinder and a sphere with various laws of nonhomogeneity. We also envisage the numerical solution the stress concentration problem in the neighbourhood of an underground spherical, cavity taking into account the forces of gravity and asymmetry of an external load.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1979 roku.*