MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 19 (1981)

O WARIACYJNYM CHARAKTERZE ZASADY JOURDAINA I JEJ ZWIĄZKU Z OGÓLNYMI TWIERDZENIAMI DYNAMIKI

N. CYGANOWA (MOSKWA)

Zasada Jourdaina jest różniczkową zasadą wariacyjną mechaniki niezmieniającego się układu punktów materialnych. Ma ona postać zasady wariacyjnej ponieważ w jej analitycznym zapisie występuje wariacja prędkości.

W niniejszej pracy badamy wariacyjny charakter zasady i jej związek z ogólnymi twierdzeniami dynamiki.

1. Zasada Jourdaina jest różniczkową wariacyjną zasadą mechaniki, zajmującą pośrednie miejsce między zasadą d'Alamberta-Lagrange'a i zasadą najmniejszego skrępowania Gaussa. Zasada ta została wyprowadzona przez angielskiego uczonego F. Jourdaina w 1909 r.

1. Dowód F. Jourdaina jest następujący.
Rozpatruje się układ „n" punktów materialnych z więzami holonomicznymi i liniowymi nieholonomicznymi. Równania więzów holonomicznych i liniowych nieholonomicznych przyjmują postać

$$dx_i = \sum_{\nu=1}^{s} a_{i\nu} dq_\nu + a_i dt \qquad (i = 1, 2, ..., 3n), \tag{1}$$

gdzie x_i — kartezjańskie współrzędne układu punktów, q_ν — współrzędne uogólnione, $a_{i\nu}$ i a_i — pewne funkcje q_ν i t. Porównajmy analityczne wyrażenia zasad d'Alamberta-Lagrange'a i Gaussa i odpowiadające im procesy wariacyjne

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i = 0, \qquad \delta t = 0, \qquad \delta x_i \neq 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta_2 \ddot{x}_i = 0, \qquad \delta_2 t = 0, \qquad \delta_2 x_i = \delta_2 \dot{x}_i = 0, \qquad \delta_2 \ddot{x}_i \neq 0, \tag{3}$$

dla większej jasności wariacje w tych dwóch zasadach oznaczone są odpowiednio przez δ i δ_2.

Wariacje współrzędnych w zasadzie d'Alamberta-Lagrange'a i wariacje przyspieszeń w zasadzie Gaussa spełniają związki

$$\delta x_i = \sum_{\nu=1}^{s} a_{i\nu} \delta q_\nu, \tag{4}$$

$$\delta_2 \ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{s} a_{i\nu} \delta_2 \ddot{q}_\nu, \tag{5}$$

F. Jourdain zauważa, że jeśli rozpatrzymy nowy proces wariacyjny δ_1, dla którego $\delta_1 t = 0$, $\delta_1 x_i = 0$, a $\delta_1 \dot{x}_i \neq 0$, to wariacje prędkości będą spełniały warunki

$$\delta_1 \dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{s} a_{i\nu} \delta_1 \dot{q}_\nu \tag{6}$$

podobnie jak warunki (4) i (5) dla δx_i i $\delta_2 \ddot{x}_i$ w procesach wariacyjnych δ i δ_2. Stąd wnioskuje on, że w wyrażeniu (2) zasady d'Alamberta-Lagrange'a δx_i można zastąpić przez $\delta_1 \dot{x}_i$ (lub w wyrażeniu (3) zasady Gaussa $\delta_2 \ddot{x}_i$ zastąpić przez $\delta_1 \dot{x}_i$) i dochodzi do wyrażenia analitycznego nowej zasady wariacyjnej w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta_1 \dot{x}_i = 0, \qquad \delta_1 t = 0, \qquad \delta_1 x_i = 0. \tag{7}$$

Przechodząc w równaniu (7) do współrzędnych uogólnionych, F. Jourdain otrzymuje równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla układów holonomicznych, a dla liniowych nieholonomicznych układów układ równań Ferrersa. W ten sposób, zasada Jourdaina (7) nie prowadzi do nowej formy równań ruchu. Jedynie zasada Gaussa daje nową postać równań — równania Appela. Dalsze badanie zasady Jourdaina związane jest z pracami austriackiej szkoły fizyków Leitingera i Wassmutha. W pracy z 1913 r. [2] Leitinger wyprowadza zasadę Jourdaina, różniczkując równanie d'Alamberta-Lagrange'a (2) względem czasu i następnie przechodząc w otrzymanym wyrażeniu

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{d}{dt} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i = 0 \tag{8}$$

do wariacji Jourdaina, tzn. podstawiając $\delta_1 x_i = 0$. Wówczas równanie (8) otrzymuje postać (7). Analogicznie różniczkując względem czasu równanie (7), przedstawiające zasadę Jourdaina i przechodząc w otrzymanym wyrażeniu do wariacji Gaussa, Leitinger wykazał również związek zasady Jourdaina z uogólnioną zasadą najmniejszego działania Höldera-Vossa dla układu z holonomicznymi i liniowymi nieholonomicznymi więzami, w ogólnym przypadku niestacjonarnymi. Zasada Höldera-Vossa dla takich układów ma postać

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + 2T \Delta dt + dT \Delta t + \delta A dt) = 0, \tag{9}$$

gdzie T — energia kinetyczna układu, δA — praca wirtualna działających sił, Δ — asynchroniczna (zupełna) wariacja. Uogólniona zasada najmniejszego działania u Höldera opiera się na zasadzie d'Alamberta-Lagrange'a. Voss przechodząc do współrzędnych uogólnionych pokazał, że uogólniona zasada najmniejszego działania dla układów holonomicznych odpowiada równaniom Lagrange'a drugiego rodzaju, a dla liniowych układów holonomicznych — równaniom Ferrersa, przy czym Voss rozpatrzył przypadek więzów niestacjonarnych.

Leitinger wyprowadził zasadę Höldera-Vossa bezpośrednio z zasady Jourdaina, przekształcając w odpowiedni sposób wyrażenie podcałkowe w całce Vossa (9). Jeśli więzy holonomiczne są nałożone na układ niestacjonarny, to niesynchroniczne wariacje uogólnionych współrzędnych Δq_i są następująco związane z wirtualnymi wariacjami tych współrzędnych

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t \tag{10}$$

a dla Δ — uogólnionych wariacji prędkości mamy

$$\Delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\Delta q_i) - \dot{q}_i \frac{\Delta dt}{dt}. \tag{11}$$

Uwzględniając równania (10) i (11), oraz wyrażenie dla wirtualnej pracy sił działających

$$\delta A = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i$$

podcałkowe wyrażenie całki (9) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \Delta T dt + 2T \Delta dt + dT \Delta t + \delta A dt = \sum_{i=1}^{s} \Bigg[\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i + Q_i \delta q_i + \\ + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i\right) dt - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t\right)\Bigg] + \frac{d}{dt}(2T\Delta t) dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Różniczkując równanie (12) względem czasu i następnie podstawiając w otrzymanym wyrażeniu, zgodnie z zasadą Jourdaina $\delta q_i = 0$, a także uwzględniając wyrażenie zasady Jourdaina dla układów holonomicznych i liniowych nieholonomicznych w postaci

$$\sum_{i=1}^{s} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta \dot{q}_i = 0, \tag{13}$$

Leitinger dochodzi do równania

$$\frac{d}{dt}[\Delta T dt + 2T \Delta dt + dT \Delta t + \delta A dt] =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t\right)\right] + \frac{d^2}{dt^2}(2T\Delta t),$$

które można rozpatrywać, jako jedno z analitycznych wyrażeń zasady Jourdaina. Całkując dwukrotnie ostatnie równanie względem czasu t w określonych granicach, odpowiadającym założonemu początkowemu i końcowemu położeniu układu, — Leitinger otrzymuje równanie (9), wyrażające zasadę Höldera-Vossa dla więzów niestacjonarnych. Dane wyprowadzenie znacznie upraszcza się, jeśli więzy są stacjonarne. Wówczas

$$\begin{gathered} \Delta q_i = \delta q_i \\ \Delta \frac{dq_i}{dt} = \delta \dot{q}_i - \dot{q}_i \frac{\Delta dt}{dt}, \quad 2T = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \end{gathered} \tag{14}$$

Uogólniona zasada najmniejszego działania dla więzów stacjonarnych przedstawia się równaniem

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta T dt + 2T \Delta dt + \delta A dt = 0. \tag{15}$$

Pochodna względem czasu wyrażenia podcałkowego z uwzględnieniem związków (14) przekształca się następująco

$$\frac{d}{dt}\left[\Delta T+2T\frac{\Delta dt}{dt}+\delta A\right]=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta\dot{q}_i+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta\dot{q}_i+\frac{dQ_i}{dt}\delta q_i+Q_i\delta\dot{q}_i\right],$$

stąd zgodnie z zasadą Jourdaina otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta T+2T\frac{\Delta dt}{dt}+\delta A\right)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right).$$

Dwukrotne całkowanie tego równania doprowadza do równania (15), tzn. do zasady Höldera-Vossa dla związków stacjonarnych. A. Wassmuth w pracy z 1919 roku [3], dotyczącej związku trzech zasad różniczkowych, wprowadzonego przez Leitingera, zauważa, że proces przejścia od jednej zasady różniczkowej do drugiej przy pomocy różniczkowania względem czasu można przedłużyć, co doprowadzi do nowych różniczkowych zasad mechaniki.

W szczególności, jeśli zróżniczkować względem czasu równanie

$$\delta_2 S=\sum_{i=1}^{s}Q_i\delta_2\ddot{q}_i,$$

(S — energia przyspieszenia), przedstawiające zasadę Gaussa we współrzędnych uogólnionych i rozpatrzyć proces wariacyjny w którym $\delta_3 t=0$, $\delta_3 q_i=\delta_3\dot{q}_i=\delta_3\ddot{q}_i$ to dojdziemy do nowej zasady różniczkowej

$$\frac{d}{dt}\delta_2 S=\sum_{i=1}^{s}Q_i\delta_3\dddot{q}_i,$$

na mocy której, równania ruchu mają postać $\frac{\partial\dot{S}}{\partial\dddot{q}_i}=Q$. W pracy tej Wassmuth rozpatruje także zastosowanie zasady Jourdaina do wyprowadzenia dynamicznych równań ruchu Eulera przedstawiających ruch ciała sztywnego wokół nieruchomego punktu. Niech ciało sztywne porusza się wokół nieruchomego punktu 0, $(O\xi\eta\zeta)$ — nieruchomy układ osi, $(oxyz)$ — nieruchomy układ osi, niezmiennie związany z ciałem i poruszający się razem z nim względem nieruchomego układu.

Zgodnie z zasadą Jourdaina (7) mamy

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{\xi}_i\delta\dot{\xi}_i+\ddot{\eta}_i\delta\dot{\eta}_i+\ddot{\zeta}_i\delta\dot{\zeta}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\Xi_i\delta\dot{\xi}_i+H_i\delta\dot{\eta}_i+Z_i\delta\dot{\zeta}_i), \tag{16}$$

gdzie Ξ_i, H_i, Z_i — rzuty aktywnej siły $\overline{F}_i$, działającej na punkt m_i, na osie nieruchomego układu współrzędnych. Wykorzystując związek między współrzędnymi punktu w ruchomym i nieruchomym układzie współrzędnych, lewą stronę równania (16) można przedstawić w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} [m_i x_i^2(\ddot{\alpha}_1 \delta\dot{\alpha}_1 + \ddot{\beta}_1 \delta\dot{\beta}_1 + \ddot{\gamma}_1 \delta\dot{\gamma}_1) + m_i y_i^2(\ddot{\alpha}_2 \delta\dot{\alpha}_2 + \ddot{\beta}_2 \delta\dot{\beta}_2 + \ddot{\gamma}_2 \delta\dot{\gamma}_2) +$$
$$+ m_i z_i^2(\ddot{\alpha}_3 \delta\dot{\alpha}_3 + \ddot{\beta}_3 \delta\dot{\beta}_3 + \ddot{\gamma}_3 \delta\dot{\gamma}_3)],$$

gdzie α_k, β_k, γ_k — cosinusy kątów między osiami układu $(O\xi\eta\zeta)$ i $(oxyz)$.

Następnie w wyrażeniu tym w miejsce dziewięciu wariacji pochodnych cosinusów kierunkowych wprowadza się wariacje rzutów prędkości kątowej $\overline{\omega}\{p, q, r\}$ na osie ruchomego układu współrzędnych. W tym celu równanie Poissona

$$\dot{\alpha}_1 = r\alpha_2 - q\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = p\alpha_3 - r\alpha_1, \ldots, \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

wariuje się zgodnie z Jourdainem (oczywiście wariują się tylko p, q, r). Po podstawieniu lewą stronę równania (16) doprowadza się do postaci

$$[A\dot{p} + (C-B)qr]\delta p + [B\dot{q} + (A-C)rp]\delta q + [C\dot{r} + (B-A)pq]\delta r,$$

gdzie A, B, C — momenty główne bezwładności ciała. Analogicznie prawą część równania (16) doprowadza się do postaci

$$\delta p \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) + \delta q \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) + \delta r \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - y_i X_i),$$

gdzie X_i, Y_i, Z_i — rzuty aktywnej siły $\overline{F}_i$ na osie ruchomego układu współrzędnych. Obecnie równanie (16) ma postać

$$[A\dot{p} + (C-B)qr]\delta p + [B\dot{q} + (A-C)rp]\delta q + [C\dot{r} + (B-A)pq]\delta r =$$
$$= \delta p \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) + \delta q \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) + \delta r \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i),$$

skąd na mocy dowolności wariacji δp, δq, δr wynikają dynamiczne równania Eulera.

2. Wyprowadzimy związek zasady Jourdaina z twierdzeniem o zmianie energii kinetycznej układu.

Wyrażenie zasady Jourdaina (7) można przekształcić do postaci, która pozwoli wyprowadzić z niej twierdzenie o zmienności energii kinetycznej układu.
Istotnie

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta\dot{x} - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \delta x_i. \tag{17}$$

Ponieważ czas nie zmienia się, to $\frac{d}{dt} \delta\dot{x}_i = \delta \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \delta\ddot{x}_i$

Wyrażenie (17) otrzymuje postać

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt} \delta T, \tag{18}$$

przy czym

$$\frac{d}{dt} \delta T = \delta \frac{dT}{dt}. \tag{19}$$

Jeśli założyć, że siły X_i nie zależą od prędkości, to przy uwzględnieniu równań (18) i (19) wyrażenie zasady Jourdaina (7) przyjmuje postać

$$\delta\left(\frac{\partial T}{dt} - \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i\right) = 0, \tag{20}$$

lub

$$\delta\left(\frac{dT}{dt}\right) = \delta \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i. \tag{21}$$

Stąd w dowolnym momencie ruchu ma miejsce równanie (21) wariacji Jourdaina: Wariacja pochodnej energii kinetycznej układu równa się wariacji pracy sił zewnętrznych na prędkościach rzeczywistego ruchu układu punktów.

Z równania (21) wynika, że w dowolnym momencie ruchu

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i + C, \tag{22}$$

gdzie C — funkcja niezależąca od prędkości.
Niech w pewnym momencie ruchu, prędkości wszystkich punktów układu są zerowe. Wówczas z równania (22) wynika, że $C = 0$.
Stąd, z równania (22) mamy

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i,$$

lub

$$dT = \sum_{i=1}^{3n} X_i dx, \tag{23}$$

tzn. różniczka siły działającej jest równa sumie elementarnych prac sił zewnętrznych. Ostatnia równość wyraża twierdzenie o zmianie energii kinetycznej układu dla stałego układu punktów materialnych.

3. W wyrażeniu zasady Jourdaina (7) nie występuje wariacja żadnej funkcji, ale występuje wariacja prędkości, stąd lewa strona wyrażenia (7) jest wyrażeniem wariacyjnym i zasada Jourdaina ma postać wariacyjną.

Porównamy z zasadą Gaussa

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i)\delta\ddot{x}_i = 0. \tag{24}$$

Ona jest zarówno wariacyjna w swojej formie jak i w treści, ponieważ wyraża minimum skrępowania

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2. \tag{25}$$

Wracając do zasady Jourdaina należy postawić pytanie, czy zasada Jourdaina określa warunek na ekstremum jakiejś funkcji. W jakim przypadku? Przy jakich ograniczeniach?
a) Jeśli siły nie zależą od prędkości, to ma miejsce równanie

$$\delta\left(\frac{dT}{dt}-\sum_{i=1}^{3n}X_i\dot{x}_i\right)=0 \quad \text{lub} \quad \delta\left(\sum_{i=1}^{3n}X_i\dot{x}_i-\frac{dT}{dt}\right)=0. \tag{26}$$

W tym przypadku zasada ma jawnie wyrażony charakter wariacyjny: funkcja $\sum_{i=1}^{3n}X_i\dot{x}_i-$ $-\frac{dT}{dt}$ dla rzeczywistego ruchu ma stałą wartość. Oznaczymy tę funkcję $J=\sum_{i=1}^{3n}X_i\dot{x}_i-\frac{dT}{dt}$ i nazwiemy funkcją Jourdaina.

b) Jeśli siły zależą od prędkości, to przekształcenie równania (7) prowadzi do:

$$\delta\left(\frac{dT}{dt}-\sum_{i=1}^{3n}X_i\dot{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{3n}\delta X_i\dot{x}_i=0,$$

tzn. wariacja funkcji Jourdaina równa jest pracy wariacji (wg Jourdaina) sił na prędkościach ruchu rzeczywistego. Zasada Jourdaina w tym przypadku nie ma jawnie wyrażonego charakteru wariacyjnego w sensie istnienia funkcji posiadających wartość stałą dla ruchu rzeczywistego. Jednak jeśli praca wariacji sił na prędkościach ruchu rzeczywistego jest równa zero, to $\delta J=0$ tzn. funkcja Jourdaina ma wartość stacjonarną dla ruchu rzeczywistego.

A więc, dla układu punktów materialnych z więzami idealnymi, zasada Jourdaina ma jawnie wyrażony charakter wariacyjny — wariacja funkcji Jourdaina jest równa zero — jeśli siły działające na układ nie zależą od prędkości, i jeśli praca wariacji (wg Jourdaina) sił na prędkościach ruchu rzeczywistego jest równa zero.

c) Jeśli na układ oddziaływują jedynie zewnętrzne siły reakcyjne, proporcjonalne do pierwszej potęgi prędkości układu punktów, to wprowadzając funkcję rozrzutu Rayleigha (funkcja dysypatywna)

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}k_i\dot{x}_i^2$$

zasadę Jourdaina można przedstawić w postaci

$$\delta\left(\frac{dT}{dt}+\Phi\right)=0 \quad \text{lub} \quad \delta J=0$$

gdzie funkcja Jourdaina $J=\frac{dT}{dt}+\Phi$, tzn. w tym przypadku zasada Jourdaina ma jawnie wariacyjny charakter.

Literatura cytowana w tekście

1. P. JOURDAIN; *Note on an analogue of Gauss principle of least constraint*, Quarterly Journal of pure and applied mathematics, vol. 40, London, 1909.
2. R. LEITINGER; *Uber Jourdain's der Mechanik und Lessen Zusammenhang mit dem veralgemeinerten Prinzip der kleinsten Aktion*, Sitzungsberichte, Bd. 122, Wien, 1913.
3. A. WASSMUTH; *Studien über Jourdain's Prinzip der Mechanik*, Sitzungsberichte, Bd. 128, H. 3., Wien, 1919.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ХАРАКТЕРА ПРИНЦИПА ЖУРДЕНА И СВЯЗИ ЕГО С ОБЩИМИ ТЕОРЕМАМИ ДИНАМИКИ

Дается краткий обзор развития принципа Журдена и исследуется вариационный характер принципа.

Summary

ON VARIATIONAL CHARACTER OF JOURDAIN'S PRINCIPLE AND ITS RELATIONS WITH GENERAL THEOREMS OF DYNAMICS

A short review of the development of Jourdain's principle is investigated as well as its variational character.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1980 roku.