

ZASTOSOWANIE PÓLBEZMOMENTOWEJ TEORII POWŁOK W OBLICZENIACH STATYCZNYCH ORTOTROPOWYCH LINIOWO-SPRĘŻYSTYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH PRYZMATYCZNYCH O PRZEKROJU WIELOBWODOWYM ZAMKNIĘTYM

ZENON GÓRECKI

Politechnika Gdańska

1. Wstęp

Badania nad zastosowaniem funkcji kształtu do obliczeń statycznych prętów cienkościennych o zamkniętym profilu zapoczątkował W. Z. WŁASOW w latach trzydziestych naszego wieku [9]. Podstawą Jego ogólnej teorii pryzmatycznych i cylindrycznych konstrukcji cienkościennych składających się z płyt i powłok jest zaproponowana w 1931 roku metoda wariacyjna umożliwiająca sprowadzać złożone równania różniczkowe cząstkowe opisujące zachowanie się tego typu konstrukcji do równań różniczkowych zwyczajnych.

Teoria ta znajduje różnorodne zastosowanie, a szczególnie w lotnictwie [2], [7]. W końcu lat sześćdziesiątych pojawiają się prace gdzie zastosowano teorię powłok Własowa do obliczeń statków i doków pływających [1].

Począwszy od 1974 roku w Instytucie Okrętowym Politechniki Gdańskiej prowadzone są prace nad zastosowaniem półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów statków bezgrodziowych [4].

W niniejszej pracy przedstawiono metodę obliczania naprężeń i przemieszczeń dla prętów pryzmatycznych cienkościennych o przekrojach składających się z dowolnej ilości wielokątów dowolnego kształtu.

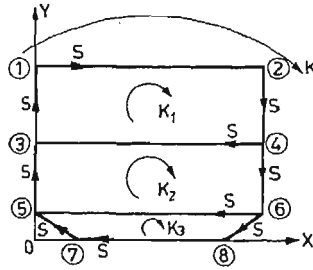
Zdaniem autora nowością jest rozszerzenie teorii do obliczeń konstrukcji wykonanych z materiałów ortotropowych oraz przystosowanie teorii do prowadzenia obliczeń na EMC.

2. Założenia półbezmomentowej teorii powłok

W ramach teorii półbezmomentowej poprzeczny przekrój np. kadłuba statku jest zastąpiony przekrojem cienkościennym wielobwodowym odcinkami prostym. Przekrój jest wyznaczony przez podanie współrzędnych (x, y) punktów załamania w dowolnym kartezjańskim układzie odniesienia OXY oraz tablicy połączeń wszystkich węzłów. Ograniczymy się wyłącznie do pręta pryzmatycznego, a więc współrzędne x, y poszczególnych

węzłów są niezależne od zmiennej z . Przykład przekroju wieloobwodowego oraz jego zapis w tablicy połączeń węzłów podano na rys. 1 i w tablicy 1.

Na każdym konturze zamkniętym K_i przekroju wprowadzamy współrzędną krzywoliniową s według obiegu w prawo mierzoną po długości konturu oraz układ trzech wersorów $\bar{l}_i, \bar{n}_i, \bar{b}_i$ lewoskrętny taki, że \bar{l}_i — zgodny jest z kierunkiem wzrostu współrzędnej s , \bar{n}_i — wersor normalnej zewnętrznej do konturu, \bar{b}_i — wersor prostopadły do dwóch pozostałych i skierowany zgodnie ze skrętnością wzdłuż osi z (rys. 1).



Rys. 1

Tablica 1

współrzędna X	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
współrzędna Y	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
Nr węzła	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0	1	1	0

Obciążenia powłoki dajemy w postaci wektora $\bar{p}(z, s)$ funkcji dwóch zmiennych z, s i rozkładamy w bazie lokalnej $\bar{l}, \bar{n}, \bar{b}$

$$(2.1) \quad \bar{p}(z, s) = p_n(z, s) \cdot \bar{n} + p_s(z, s) \cdot \bar{l} + p_b(z, s) \cdot \bar{b},$$

gdzie:

z — współrzędna wzdłuż pręta

s — współrzędna w kierunku obwodowym

Przemieszczenia powłoki dajemy w postaci wektora przemieszczenia $\bar{R}(z, s)$ funkcji dwóch zmiennych z, s i rozkładamy w bazie lokalnej $\bar{n}, \bar{l}, \bar{b}$

$$(2.2) \quad \bar{R}(z, s) = u(z, s) \cdot \bar{b} + v(z, s) \cdot \bar{l} + w(z, s) \cdot \bar{n}.$$

2.1. Postulat deformacji i naprężenia w powłoce. Rozpatrujemy pręt pryzmatyczny cienkościenny posiadający w przekroju skończoną liczbę zamkniętych konturów (rys. 1). Na

przemieszczenia nakładamy więzy postulujące, że współrzędne wektora przemieszczenia wyrazić można w formie sum iloczynów dwóch funkcji o zmiennych rozdzielonych

$$(2.3.1) \quad u(z, s) = \sum_{i=1}^n U_i(z) \cdot \varphi_i(s),$$

$$(2.3.2) \quad v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \cdot \psi_k(s),$$

$$(2.3.3) \quad w(z, s) = \sum_{l=1}^r W_l(z) \cdot \chi_l(s),$$

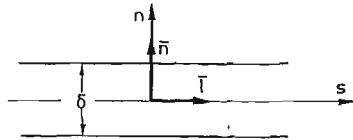
w których funkcje zmiennej z : $U_i(z)$, $V_k(z)$, $W_l(z)$ są funkcjami poszukiwanymi, zaś funkcje współrzędnej obwodowej s : $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$, $\chi_l(s)$ stanowią bazy w których rozłożone są przemieszczenia $u(z, s)$, $v(z, s)$, $w(z, s)$.

Wektor przemieszczenia $\vec{R}(z, s)$ opisuje jedynie deformację powierzchni środkowej powłoki. Do opisu deformacji elementów powłoki wprowadzamy w przekroju współrzędną n normalną do s jak na rys. 2 i przyjmujemy hipotezę Kirchhoffa. Przemieszczenia elementów powłoki przedstawiamy w następującej postaci:

$$(2.4.1) \quad \check{u}(z, s, n) = u(z, s) - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot n,$$

$$(2.4.2) \quad \check{v}(z, s, n) = v(z, s) - \frac{\partial w}{\partial s} \cdot n,$$

$$(2.4.3) \quad \check{w}(z, s, n) = w(z, s),$$



Rys. 2

gdzie: \check{u} , \check{v} , \check{w} — oznaczają przemieszczenia elementów powłoki w zależności od odległości od powierzchni środkowej.

Przyjmując zlinearyzowaną teorię i uwzględniając relacje (2.4) składowe tensory deformacji Greena-St. Venanta są:

$$(2.5.1) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \check{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \cdot n,$$

$$(2.5.2) \quad \varepsilon_s = \frac{\partial \check{v}}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \cdot n,$$

$$(2.5.3) \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial \check{u}}{\partial s} + \frac{\partial \check{v}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} \cdot n,$$

$$(2.5.4) \quad \varepsilon_n = \frac{\partial \check{w}}{\partial n} = 0,$$

$$(2.5.5) \quad \gamma_{ns} = \frac{\partial \check{w}}{\partial s} + \frac{\partial \check{v}}{\partial n} = 0,$$

$$(2.5.6) \quad \gamma_{nz} = \frac{\partial \check{w}}{\partial z} + \frac{\partial \check{u}}{\partial n} = 0.$$

Na podstawie zależności (2.5) widać, że stan deformacji w powłoce jest jedynie zależny od dwóch współrzędnych z, s .

Rozważania prowadzimy dla powłoki wykonanej z materiału sprężystego i ortotropowego o osiach ortotropii $\bar{l}, \bar{n}, \bar{b}$. Wtedy przyjmujemy związki fizyczne postaci:

$$(2.6.1) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_1} \sigma_z - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_s,$$

$$(2.6.2) \quad \varepsilon_s = \frac{1}{E_2} \sigma_s - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_z,$$

$$(2.6.3) \quad \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \tau_{zs}.$$

Dla przypadku materiałów sprężystych jest:

$$(2.7) \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2},$$

gdzie:

E_1, E_2 — moduły Younga

ν_{12}, ν_{21} — stałe Poissona

G — moduł ścinania (Kirchhoffa)

Relacje odwrotne do (2.6) są:

$$(2.8.1) \quad \sigma_s = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_s \nu_{12} + \varepsilon_z),$$

$$(2.8.2) \quad \sigma_z = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_z \nu_{21} + \varepsilon_s),$$

$$(2.8.3) \quad \tau_{zs} = G \gamma_{zs}.$$

Siły i momenty wewnętrzne określamy wzorami:

$$(2.9) \quad N_z = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_z dn, \quad N_s = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_s dn, \quad S = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{zs} dn,$$

$$M_s = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_s n dn, \quad M_z = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_z n dn, \quad H = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{zs} n dn$$

Podstawiając (2.5) i (2.6) do (2.9) otrzymujemy związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami

dla sił normalnych

$$(2.10.1) \quad N_z = \frac{E_1 \delta}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \right),$$

$$(2.10.2) \quad N_s = \frac{E_2 \delta}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

dla siły stycznej

$$(2.10.3) \quad S = G \delta \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

dla momentów gnących

$$(2.10.4) \quad M_s = - \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

$$(2.10.5) \quad M_z = - \frac{E_1 \delta^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right),$$

dla momentu skręcającego

$$(2.10.6) \quad H = - \frac{G \delta^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s}$$

2.2. Związki zachodzące pomiędzy siłami wewnętrznymi w półbezmomentowej teorii powłok. Równania równowagi nieskończenie małego elementu płyty przy braku obciążeń zewnętrznych powierzchniowych można wyrazić za pomocą momentów gnących i skręcających w sposób następujący ([9] s. 266)

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial s} = 0.$$

Zakładając, że naprężenia normalne podłużne i naprężenia styczne są równomiernie rozłożone na grubości płyty to wtedy otrzymujemy

$$(2.12) \quad M_z = H = 0.$$

Ze związków (2.11) i (2.12) mamy

$$(2.13) \quad \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} = 0.$$

Zgodnie z otrzymanymi wynikami w półbezmomentowej teorii powłok przyjmujemy:

1. pomijamy moment skręcający ($H = 0$)
2. pomijamy moment gnący ($M_z = 0$)
3. we wzorze (2.10.4) pomijamy wyrażenie $\nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ przyjmując

$$(2.14) \quad M = M_s = -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

gdzie:

$$D = \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}.$$

2.3. Energia sprężysta powłoki. Energia sprężysta odkształcenia jednostki powierzchni środkowej powłoki jest

$$(2.15) \quad \Phi = \frac{1}{2} (N_z \cdot \varepsilon_z|_{n=0} + N_s \cdot \varepsilon_s|_{n=0} + S \cdot \gamma_{zs}|_{n=0} + M \cdot \varkappa|_{n=0}),$$

gdzie: $\varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$

Całkując wyrażenie (2.15) otrzymujemy wzór określający całkowitą energię sprężystą

$$(2.16) \quad \pi = \int_0^L \left(\oint_K \Phi ds \right) dz,$$

gdzie:

K — zamknięty kontur

L — długość powłoki

Po podstawieniu (2.15) do (2.16), wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.17.1) \quad \check{E}_i = \frac{E_i \delta}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (i = 1, 2),$$

$$(2.17.2) \quad \check{G} = G \delta,$$

wykorzystaniu założeń półbezmomentowej teorii powłok i wykorzystaniu relacji (2.7) otrzymujemy

$$(2.18) \quad \pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_K \left\{ \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\check{E}_1 \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right\} ds \right] dz.$$

Ponieważ praca sił zewnętrznych jest postaci

$$(2.19) \quad A = \int_0^L \left[\oint_K \bar{p}(z, s) \cdot \bar{R}(z, s) ds \right] dz = \int_0^L \left[\oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s + w \cdot p_n) ds \right] dz,$$

całkowitą energię mechaniczną układu możemy zapisać w postaci

$$(2.20) \quad \Omega = \pi - A.$$

3. Założenia teorii ramowo-powłokowej

3.1. Siły i deformacje

- Moment gnący M_s w dowolnym przekroju ramy wyznaczamy na podstawie teorii zgięcia ramy o kształcie przekroju poprzecznego powłoki przy założeniu, że następuje tylko zginanie prętów ramy (efekt zgięcia podłużnego pomija się)
- Węzły ramy przemieszczają się zgodnie z przyjętą hipotezą deformacji
- Na ramę działa obciążenie normalne $p_n(z, s)$

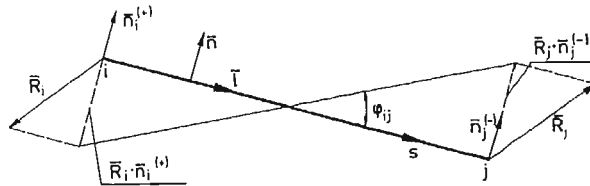
3.2. Wpływ przemieszczeń węzłów na momenty gnące w ramie. Dany jest pręt „ ij ” łączący węzły „ i ”, „ j ”. Zwrot „osi” s przyjmujemy od węzła „ i ” do węzła „ j ”. Niech \bar{R}_i, \bar{R}_j oznaczają wektory przemieszczenia węzłów (rys. 3). Momenty w ramie mogą powstać jedynie na skutek obrotów węzłów i obrotu prostej łączącej węzły po deformacji. Niech dodatni zwrot kąta φ_{ij} będzie zgodny ze skrętnością układu $(\bar{n}, \bar{l}, \bar{b})$, to wtedy

$$(3.1) \quad \varphi_{ij} = \frac{\bar{R}_j \cdot \bar{n}_j^{(-)} - \bar{R}_i \cdot \bar{n}_i^{(+)}}{l_{ij}}$$

gdzie: l_{ij} — jest długością pręta przed deformacją

Niech $m_{ij}(s)$ będzie momentem gnącym w ramie wywołanym obrotem pręta „ ij ” o kąt $\varphi_{ij} = 1$. Moment gnący na całej ramie $M_{ij}(s)$ spowodowany wyłącznie kątem obrotu φ_{ij} według wzoru (3.1) wyraża się wzorem

$$(3.2) \quad M_{ij}(s) = m_{ij}(s) \frac{\bar{R}_j \bar{n}_j^{(-)} - \bar{R}_i \bar{n}_i^{(+)}}{l_{ij}}$$



Rys. 3

Całkowity moment gnący do przemieszczeń węzłów zapiszemy w postaci

$$(3.3) \quad M_F = \sum_{(ij) \in J} m_{ij} \cdot \varphi_{ij}$$

gdzie: J — zbiór wszystkich par „ ij ” numerujących węzły.

3.3. Wyznaczanie momentów gnących w ramie od obciążeń $p_n(z, s)$. Niech M_g jest momentem gnącym od obciążenia $p_n(z, s)$ działającego na ramę przy nieprzesuwnych ale obracających się swobodnie węzłach. Gęstość energii sprężystej wskutek zginania ramy w przekroju $z = \text{const}$ jest

$$(3.4) \quad \frac{d\pi_M}{dz} = \oint_K \frac{1}{2D} (M_F + M_g)^2 ds.$$

Obliczenia momentu M_g przeprowadzamy następująco:

- rozcinamy ramę w węzłach i liczymy kąty ugięcia od obciążeń zewnętrznych na podporach oraz momenty gnące na podporach,
- piszemy równania do wyznaczania momentów podporowych i wyznaczamy te momenty z warunku zgodności kątów obrotu,
- dla każdego pręta znajdujemy sumę momentów gnących od obciążeń normalnych p_n przy rozciągniętych węzłach i momentów podporowych.

3.4. Całkowita energia mechaniczna układu. Energię sprężystą π powłoki zgodnie z równaniami (2.14) i (2.18) zapiszemy w postaci

$$(3.5) \quad \pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_K \left\{ V(u, v) + \frac{M^2}{D} \right\} ds \right] dz,$$

gdzie:

$$V(u, v) = \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\check{E}_1 \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial s} + \check{G} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2,$$

$$M = M_F + M_\theta.$$

Dla $z = \text{const}$ przemieszczenie w kierunku n jest

$$(3.6) \quad w(z, s) = w_1(z, s) + w_2(z, s),$$

gdzie:

$w_1(z, s)$ — przemieszczenie w kierunku n spowodowane przemieszczeniami \bar{R}_i, R_j poszczególnych węzłów,

$w_2(z, s)$ — ugięcie prętów ramy przy węzłach nieprzesuwnych i przegubach umieszczonych w węzłach.

Niech

$w_2^0(z, s)$ — ugięcie od obciążenia p_n

$w_2^1(z, s)$ — ugięcie od obrotów przekrojów węzłowych

to wtedy

$$(3.7) \quad w_2 = w_2^0 + w_2^1.$$

Pracę sił zewnętrznych (2.19) po uwzględnieniu (3.6) i (3.7) przepisujemy w postaci

$$(3.8) \quad A = \int_0^L \left[\oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s) ds \right] dz + \int_0^L \left[\oint_K (w_1 + w_2^0 + w_2^1) p_n ds \right] dz,$$

Ponieważ M_θ oraz w_2^0 nie zależą od poszczególnych funkcji $U_i(z), V_k(z), W_l(z)$ to pomijamy je w wyrażeniu na energię. Ostatecznie wyrażenie na całkowitą energię mechaniczną układu przyjmuje postać

$$(3.9) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_K \left\{ V(u, v) + \frac{M_F^2}{D} + 2 \frac{M_F M_\theta}{D} \right\} ds \right] dz - \\ - \int_0^L \left[\oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s) ds \right] dz - \int_0^L \left[\oint_K (w_1 + w_2^1) p_n ds \right] dz.$$

3.5. Wnioski wypływające z przyjęcia teorii ramowo-powłokowej. Dane jest naroże w węzle „i” łączącym dwa pręty (co najmniej dwa) jak na rys. 4. Para $\bar{l}_i^{(-)}, \bar{l}_i^{(+)}$ oraz para $\bar{n}_i^{(-)}, \bar{n}_i^{(+)}$ tworzą bazę (na ogół nieortogonalną). Możemy napisać, że

$$(3.10.1) \quad \bar{n}_i^{(-)} = \alpha_{1i} \bar{l}_i^{(-)} + \alpha_{2i} \bar{l}_i^{(+)},$$

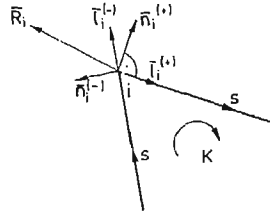
$$(3.10.2) \quad \bar{n}_i^{(+)} = \beta_{1i} \bar{l}_i^{(-)} + \beta_{2i} \bar{l}_i^{(+)}. \quad \square$$

Mnożąc te zależności obustronnie przez $\bar{n}_i^{(+)}$, a następnie przez $\bar{n}_i^{(-)}$ otrzymujemy układ równań do wyznaczenia α_{1i} , α_{2i} , β_{1i} , β_{2i} . Rzuty przemieszczeń na kierunek wersorów $\bar{n}_i^{(-)}$, $\bar{n}_i^{(+)}$ są

$$(3.11.1) \quad w_i^{(-)} = \bar{R}_i \bar{n}_i^{(-)} = \alpha_{1i} v_i^{(-)} + \alpha_{2i} v_i^{(+)},$$

$$(3.11.2) \quad w_i^{(+)} = \bar{R}_i \bar{n}_i^{(+)} = \beta_{1i} v_i^{(-)} + \beta_{2i} v_i^{(+)}. \quad .$$

Stąd wynika, że ugięcia w_i jak i moment M_F mogą być uzależnione od funkcji $v(z, s)$



Rys. 4

Wynikają stąd następujące wnioski:

1. W teorii ramowo-powłokowej hipotezy deformacji można narzucić na funkcje $u(z, s)$, $v(z, s)$, a mianowicie

$$(3.12.1) \quad u(z, s) = \sum_{l=1}^n U_l(z) \cdot \varphi_l(s)$$

$$(3.12.2) \quad v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \cdot \psi_k(s)$$

2. Funkcje $w(z, s) = \sum_{l=1}^r W_l(z) \cdot \chi_l(s)$ nie są potrzebne do pełnego opisu przemieszczeń gdyż są jednoznacznie określone przez funkcje $v(z, s)$.

W dalszej części pracy posługiwać będziemy się teorią ramowo-powłokową.

4. Równania równowagi

Ogólne zasady energetyczne prowadzą do równań równowagi w postaci równań różniczkowych. W przypadku continuum dwuwymiarowego są to równania różniczkowe cząstkowe albo układy tych równań.

Jeżeli na układ mechaniczny nałożymy więzy i wykorzystamy zasady energetyczne do wyprowadzenia równań równowagi, to wtedy przy określonych więzach mają one postać równań różniczkowych zwyczajnych. Fakt ten wykorzystano dalej w pracy sprowadzając zagadnienie do równań równowagi w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych.

4.1. Metoda funkcji kształtu w opisie deformacji pręta. Całkowitą energię mechaniczną powłoki zgodnie z (3.9) zapisujemy w postaci wygodnej do dalszych rozważań

$$(4.1) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_K \left\{ \check{V}(u, v) + \frac{M_F^2}{D} \right\} ds \right] dz + \int_0^L \left[\int_K \left\{ \frac{M_F M_g}{D} - u \cdot p_b - v \cdot p_s - (w_1 + w_2) p_n \right\} ds \right] dz$$

Pierwsza całka jest formą kwadratową, a druga całka jest formą liniową względem przemieszczeń u, v .

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcjonału Ω otrzymujemy z całki pierwszej — operator różniczkowy równań równowagi, z całki drugiej — wyrazy wolne które są uogólnionymi siłami zewnętrznymi.

Zajmiemy się pierwszym składnikiem formy kwadratowej

$$(4.2) \quad \oint_K \check{V}(u, v) ds$$

Wyrażenie podcałkowe zapisujemy w postaci

$$(4.3) \quad \check{V}(u, v) = \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \check{G} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \check{G} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ + 2\check{E} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + 2\check{G} \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

gdzie:

$$2\check{E} = \check{E}_2 \nu_{12} + \check{E}_1 \nu_{21}.$$

Wykorzystując hipotezę deformacyjną określoną wzorami (3.12) gdzie funkcje $\varphi_i(s)$ przyjmujemy jako ciągłe na całym konturze K , funkcje $\psi_k(s)$ jako ciągłe na odcinkach międzywęzłowych oraz stosując konwencję sumacyjną Einsteina to wtedy całkę (4.2) możemy zapisać następująco

$$(4.4) \quad \oint_K \check{V}(u, v) ds = U'_i U'_j \oint_K \check{E}_i \varphi_i \varphi_j ds + V'_k V'_l \oint_K \check{G} \psi_k \psi_l ds + \\ + V'_k \cdot V'_l \oint_K \check{E}_2 \psi'_k \psi'_l ds + U'_i U'_j \oint_K \check{G} \varphi'_i \varphi'_j ds + \\ + 2U'_i V'_k \oint_K \check{E} \varphi_i \psi'_k ds + 2U'_i V'_k \oint_K \check{G} \varphi'_i \psi_k ds.$$

gdzie: $()'$ — oznacza różniczkowanie funkcji U_i i V_k względem zmiennej z oraz różniczkowanie funkcji φ_i i ψ_k względem zmiennej s .

Do wyznaczenia współczynników pierwszego składnika formy kwadratowej (4.4) trzeba obliczyć następujące całki

$$(4.5) \quad \oint_K \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds, \quad \oint_K \check{G} \psi_k \psi_l ds, \quad \oint_K \check{E}_2 \psi'_k \psi'_l ds, \\ \oint_K \check{G} \varphi'_i \varphi'_j ds, \quad \oint_K \check{E} \varphi_i \psi'_k ds, \quad \oint_K \check{G} \varphi'_i \psi_k ds.$$

Drugim składnikiem formy kwadratowej jest całka $\oint_K \frac{M_F^2}{D} ds$. Jeżeli J jest zbiorem par „ ij ” numerujących odcinki ramy pomiędzy węzłami i i j , m_{ij} — jest momentem na ramie (kontur pręta) spowodowany jednostkowym kątem obrotu pręta „ ij ” to wtedy zgodnie z (3.1), (3.3), (3.11) otrzymujemy

$$(4.7) \quad \oint_K \frac{M_F^2}{D} ds = \frac{\gamma_{ij} \gamma_{rs}}{l_{ij} l_{rs}} \oint_K \frac{m_{ij} m_{rs}}{D} ds,$$

gdzie:

$$(4.8.1) \quad \gamma_{ij} = \alpha_{2j}v_j^{(+)} + (\alpha_{1j} - \beta_{2j})v_j^{(-)} - \beta_{1i}v_i^{(+)},$$

$$(4.8.2) \quad \gamma_{rs} = \alpha_{2s}v_s^{(+)} + (\alpha_{1s} - \beta_{2s})v_s^{(-)} - \beta_{1r}v_r^{(+)}. \quad \cdot$$

Do wyznaczenia współczynników drugiego składnika formy kwadratowej trzeba obliczyć całki

$$(4.9) \quad \oint_K \frac{m_{ij}m_{rs}}{D} ds,$$

dla wszystkich par wskaźników $[(ij), (rs)] \in J$

Teraz rozpatrzmy składnik, który jest formą liniową całkowej energii mechanicznej Ω . Wyrażenie zawierające składowe obciążenia binormalnych p_b i stycznych p_s po wykorzystaniu (3.12) zapiszemy w postaci

$$(4.10.1) \quad \oint_K u \cdot p_b ds = \sum_{i=1}^n U_i b_i,$$

gdzie:

$$(4.10.2) \quad b_i = \oint_K \varphi_i p_b ds \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

oraz

$$(4.11.1) \quad \oint_K v \cdot p_s ds = \sum_{k=1}^m V_k \cdot t_k,$$

gdzie:

$$(4.11.2) \quad t_k = \oint_K \psi_k p_s ds \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Zgodnie z (3.7) funkcje w_1 i w_2^1 przedstawimy w postaci

$$(4.12.1) \quad w_1 = \sum_{k=1}^m V_k w_{1k},$$

$$(4.12.2) \quad w_2^1 = - \sum_{k=1}^m V_k w_{2k}^1,$$

Składnik zawierający składowe normalne p_n obciążenia zewnętrznego zapiszemy teraz w postaci

$$(4.13.1) \quad \oint_K (w_1 + w_2^1) D_n ds = \sum_{k=1}^m V_k N_k,$$

gdzie:

$$(4.13.2) \quad N_k = \oint_K [w_{1k} - w_{2k}^1] p_n ds \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Kolejnym składnikiem formy liniowej jest wyrażenie zawierające momenty M_F i M_g . Sposób liczenia momentu M_g podano w p. 3:3 pracy, natomiast M_F zapisujemy w postaci

$$(4.14.1) \quad M_F = - \sum_{k=1}^m V_k m_k,$$

gdzie:

$$(4.14.2) \quad V_k m_k = \frac{V_k}{l_k} m_k = \varphi_k m_k,$$

k — oznacza parę „ ij ” ze zbioru J , φ — kąt obrotu pręta.

Stąd otrzymujemy

$$(4.15.1) \quad \oint_K \frac{M_F M_G}{D} ds = \sum_{k=1}^m V_k \cdot P_k,$$

gdzie:

$$(4.15.2) \quad P_k = \oint_K \frac{m_k M_G}{D} ds \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Składając wyrażenia na składniki formy liniowej otrzymujemy

$$(4.16) \quad \oint_K \left\{ \frac{M_F M_G}{D} - u p_b - v p_s - (w_1 + w_2) p_n \right\} ds = - \sum_{l=1}^n U_l b_l - \sum_{k=1}^m V_k a_k$$

gdzie: $a_k = t_k + N_k + P_k$, ($i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$).

4.2. Wybór funkcji kształtu. Funkcji $\varphi(s)$. Funkcje $\varphi_i(s)$ określają przemieszczenia prostopadłe do płaszczyzny konturu — muszą być zatem ciągłe na całym konturze K . Stosować będziemy funkcje $\varphi_i(s)$ pierwszego rodzaju (rys. 5), to znaczy takie, które są znormalizowane w taki sposób, że w wybranych węzłach mają wartość 1 (jeden) i zmieniają się liniowo do zera w węzłach najbliższych. Można również rozważać funkcje $\varphi_i(s)$ drugiego rodzaju skonstruowane z wielomianów Legendre'a P_4 tak by funkcje pierwszego i drugiego rodzaju były ortogonalne (rys. 6).

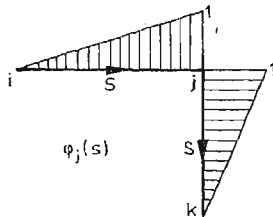
Jeżeli odcinek „ ij ” przyjęć jako przedział domknięty $\langle 0, 1 \rangle$ to funkcja pierwszego rodzaju jest

$$(4.17) \quad \varphi_i^{(1)}(s) = P_2(s) = s,$$

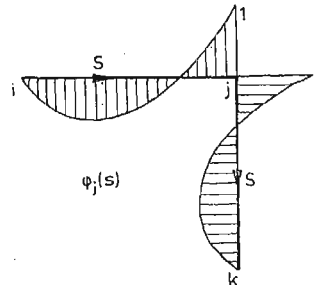
a drugiego rodzaju

$$(4.18) \quad \varphi_i^{(2)}(s) = P_4(s) = \frac{1}{2} (5s^3 - 3s).$$

Liczba funkcji φ_i pierwszego lub drugiego rodzaju jest osobno równa liczbie węzłów.



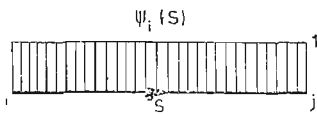
Rys. 5



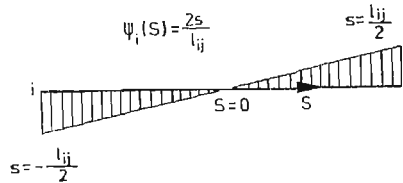
Rys. 6

Funkcje $\psi(s)$. Funkcje $\psi_k(s)$ określają przemieszczenia styczne do konturu, muszą być zatem ciągłe na każdym odcinku prostym między węzłami. Rozważać można funkcje $\psi_k(s)$ pierwszego rodzaju (rys. 7) nie uwzględniające wpływu sił osiowych w przecię między węzłami oraz drugiego rodzaju (rys. 8) uwzględniające ten wpływ.

Przyjęcie funkcji kształtu φ i ψ pierwszego i drugiego rodzaju zwiększa liczbę stopni swobody układu, a tym samym liczbę równań różniczkowych równowagi. Wpływ części odkształcenia pochodzący od funkcji φ i ψ drugiego rodzaju na całkowitą energię mechaniczną układu jest mały i może być zaniedbany w opisie deformacji pręta. Stąd w dalszej części pracy uwzględniać będziemy funkcje $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ tylko pierwszego rodzaju.



Rys. 7



Rys. 8

4.3. Macierzowa postać równowagi. Na wstępie weźmy pod uwagę wyrażenie $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ występujące w (4.3). Uwzględniając (3.12.1) oraz przyjmując że funkcje φ_i są ciągłe możemy napisać

$$(4.19) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^n U_i(z) \cdot \varphi_i(s) \right) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^n U_i'(z) \varphi_i(s) \right]^2,$$

stąd

$$(4.20) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \{u_i'\}^T [\varphi_i \varphi_j] \{U_j'\},$$

gdzie: symbolami $\{ \}$ i $[\]$ oznaczono wektory i macierze, natomiast literą **T** oznaczono operację transpozycji.

Stąd mamy

$$(4.21) \quad \oint_K \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 ds = \{U_i'\}^T [M_{\varphi\varphi}] \{U_j'\},$$

gdzie: $[M_{\varphi\varphi}]$ — jest macierzą o elementach $\int_K \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds$

Postępując analogicznie ze wszystkimi składnikami formy kwadratowej otrzymujemy zapis pierwszego składnika energii

$$(4.22) \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\{U_i'\}^T [M_{\varphi\varphi}] \{U_j'\} + \{V_k'\}^T [M_{\varphi\psi}] \{V_l'\} + \right. \\ \left. + \{V_k'\}^T ([M_{\psi\psi}] + [M_{FF}]) \{V_l'\} + \{U_i\}^T [M_{\varphi\psi}] \{U_j\} + \right. \\ \left. + 2 \{V_k\}^T [M_{\varphi\psi}] \{U_j\} + 2 \{V_k'\}^T [M_{\varphi\psi}] \{U_j\} \right) dz.$$

Macierz $[M_{FF}]$ jest wynikiem z rozważań $\oint_K \frac{M_k^2}{D} ds$

Macierze $[M_{\varphi\varphi}]$ i $[M_{\varphi'\varphi'}]$ mają wymiar $n \times n$, macierze $[M_{FF}]$, $[M_{\psi\psi}]$ i $[M_{\psi'\psi'}]$ mają wymiar $m \times m$, natomiast macierze $[M_{\varphi'\psi}]$ i $[M_{\psi\varphi}']$ mają wymiar $n \times m$. Elementy tych macierzy są całkami.

Z warunku ekstremum funkcjonału całkowitej energii mechanicznej (4.1) otrzymujemy

$$(4.23.1) \quad [M_{\varphi\varphi}] \{U_j'\} - [M_{\varphi'\varphi'}] \{U_j\} + ([M_{\psi\psi}]^T - [M_{\psi'\psi'}]^T) \{V_l'\} = \{b_j\},$$

$$(4.23.2) \quad [M_{\psi\psi}] \{V_l'\} - ([M_{\psi'\psi'}] + [M_{FF}]) \{V_l\} + ([M_{\psi'\psi}] - [M_{\psi\psi}']) \{u_l'\} = \{a_l\},$$

Równania te zapiszemy w postaci jednego równania macierzowego. Wprowadzając macierz kolumnę niewiadomych funkcji T_r

$$(4.24) \quad \{T_r\} = \begin{cases} U_i & i = 1, 2, \dots, n \\ V_k & k = 1, 2, \dots, m \\ & r = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

wektor sił uogólnionych w postaci

$$(4.25) \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_m\}^T = \{q_1, q_2, \dots, q_{n+m}\}^T = \{q_r\}^T,$$

to po przekształceniach otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$(4.26) \quad \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] & 0 \\ 0 & [M_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} 0 & [M_{\psi\psi}]^T - [M_{\psi'\psi'}]^T \\ [M_{\varphi'\psi}] - [M_{\psi\varphi}'] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}' - \begin{bmatrix} [M_{\varphi'\varphi'}] & 0 \\ 0 & [M_{\psi'\psi'}] + [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix},$$

Przyjęte funkcje ψ pierwszego rodzaju są stałe na odcinkach międzywęzłowych, a zatem ich pochodne względem s są zerami. Stąd wszystkie współczynniki w macierzach zawierające ψ' są zerami i układ równań (4.26) sprowadza się do postaci

$$(4.27) \quad \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] & 0 \\ 0 & [M_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} 0 & -[M_{\psi'\psi'}]^T \\ [M_{\varphi'\psi}] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}' - \begin{bmatrix} [M_{\varphi'\varphi'}] & 0 \\ 0 & [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix}.$$

Przyjmując funkcje $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ pierwszego rodzaju możemy w sposób automatyczny budować układy równań różniczkowych dla dowolnych prętów cienkościennych pryzmatycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym składającym się z wielokątów dowolnego kształtu.

5. Warunki brzegowe

Przyjęcie hipotezy deformacyjnej (3.12) prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych liniowych (4.27) rzędu

$$(5.1) \quad R = 2(n+m)$$

gdzie: n — ilość węzłów w przekroju równa liczbie znanych funkcji $\varphi_i(s)$

m — liczba stopni swobody w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta równa liczbie przyjętych funkcji $\psi_k(s)$

Do rozwiązania układu (4.27) potrzebna jest znajomość R wartości funkcji U_i , V_k i ich pochodnych względem zmiennej z w jednym lub dwu różnych przekrojach pręta.

Warunek brzegowy zapiszemy w postaci

$$(5.2) \quad [M] \{T\}_{z=0} + [P] \{T\}_{z=L} + \{S\} = \{0\}$$

przy czym:

$[M]$ — jest macierzą kwadratową rzędu R podaną dla przekroju $z = 0$

$[P]$ — jest macierzą kwadratową rzędu R podaną dla przekroju $z = L$

$\{T\}$ — jest wektorem R -wymiarowym zawierającym funkcje U_i i V_k

$\{S\}$ — jest stałym wektorem R -wymiarowym

Tak zapisany warunek brzegowy umożliwia wykorzystanie warunków danych w przemieszczeniach, w naprężeniach lub mieszanych.

Występujące w wyrażeniu na energię mechaniczną składniki formy liniowej równania (4.1) zawierają wielkości

$$(5.3.1) \quad b_i = \oint_K \varphi_i p_b ds,$$

$$(5.3.2) \quad t_k = \oint_K \psi_k p_s ds,$$

które są uogólnionymi siłami zewnętrznymi w przekroju $z = \text{const}$.

Rozpatrując te wielkości jako siły wewnętrzne i korzystając z zasady prac przygotowanych możemy napisać

$$(5.4.1) \quad b_i^0(z) = \oint_K \varphi_i \sigma_z ds,$$

$$(5.4.2) \quad t_k^0(z) = \oint_K \psi_k \tau_{zs} ds.$$

Podstawiając wyrażenie na σ_z i τ_{zs} według wzorów (2.8), po dalszych przekształceniach otrzymamy

$$(5.5.1) \quad b_i^0(z) = \sum_{j=1}^n U_j'(z) \oint_K \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds,$$

$$(5.5.2) \quad t_k^0(z) = \sum_{i=1}^n U_i'(z) \oint_K \check{G} \varphi_i \psi_k ds + \sum_{r=1}^m V_r'(z) \oint_K \check{G} \psi_k \psi_r ds,$$

Rozpatrując teraz równowagę powłoki w przekroju $z = \text{const}$ i zakładając, że $p_b^0(z, s)$ i $p_s^0(z, s)$ są odpowiednio wzdłużnymi i stycznymi siłami działającymi na jednostkę długości konturu na podstawie (5.3) i (5.5) otrzymujemy następujące związki równowagi uogólnionych sił zewnętrznych i wewnętrznych

$$(5.6.1) \quad \int_K \varphi_i p_b^0 ds = \sum_{j=1}^n U_j'(z) \int_K \check{E}_i \varphi_i \varphi_j ds,$$

$$(5.6.2) \quad \int_K \varphi_k p_s^0 ds = \sum_{r=1}^m V_r'(z) \int_K \check{G} \varphi_k \varphi_r ds + \sum_{i=1}^n U_i(z) \int_K \check{G} \varphi_i' \varphi_k' ds.$$

Wprowadzając zapis macierzowy i porównując z (4.22) zapiszemy

$$(5.7.1) \quad \{b_i^0\} = [M_{\varphi\varphi}] \{U_i'\},$$

$$(5.7.2) \quad \{t_k^0\} = [M_{\varphi' \varphi'}] \{U_i\} + [M_{\varphi\varphi'}] \{V_k'\}.$$

Zatem dla dowolnego przekroju $z = \text{const}$ warunki (5.7) mają postać

$$(5.8) \quad \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] & & & \\ & & & \\ & & [M_{\varphi' \varphi'}] & [M_{\varphi\varphi'}] \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i' \\ U_i \\ V_k' \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^0 \\ 0 \\ t_k^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

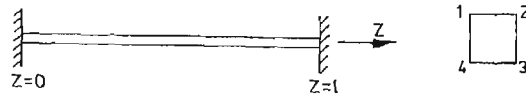
W miejsca niewypełnione należy wstawić macierze zerowe.

Dla przykładu jak na rys. 9 otrzymujemy warunki brzegowe tylko w przemieszczeniach co zapisujemy następująco

$$(5.9) \quad \begin{bmatrix} & & & \\ & [I] & & \\ & & & \\ [E] & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i' \\ U_i \\ V_k' \\ V_k \end{bmatrix}_{z=0} + \begin{bmatrix} & & & [I] \\ & & & \\ & & & \\ & & & [E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i' \\ U_i \\ V_k' \\ V_k \end{bmatrix}_{z=L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie: [I] — macierz jednostkowa $n \times n$

[E] — macierz jednostkowa $m \times m$



Rys. 9

6. Rozwiązywanie równań różniczkowych — przykłady zastosowań półbezmomentowej teorii ramowo-powłokowej. Obliczenia numeryczne

Równania różniczkowe równowagi powłok wynikające z zastosowań półbezmomentowej teorii ramowo-powłokowej sprowadzają się do całkowania równań różniczkowych rzędu drugiego dających się sprowadzić w prosty sposób do równań rzędu pierwszego przez odpowiednie podstawienie. Ogólna postać macierzowa jest

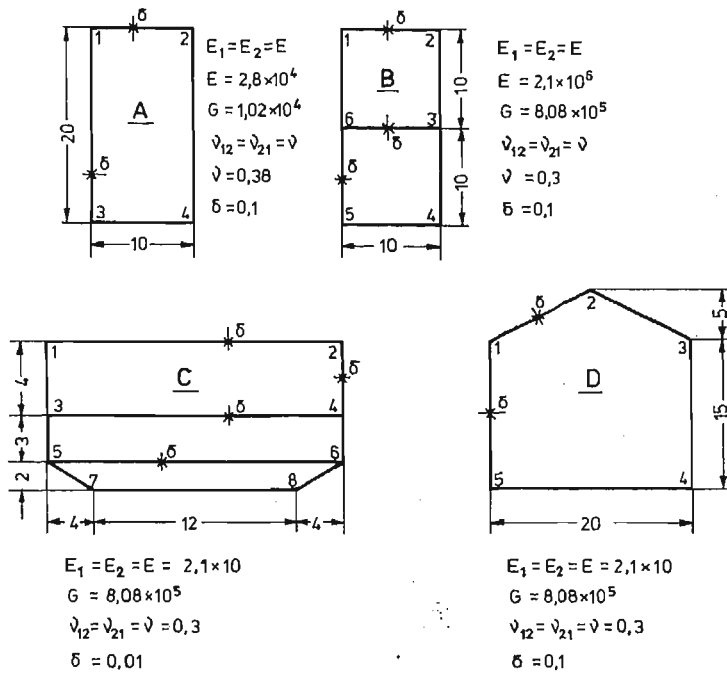
$$(6.1) \quad [A] \{T''\} + [B] \{T'\} + [C] \{T\} = \{Q\},$$

gdzie: [A], [B], [C] — stałe macierze kwadratowe, {T} — oznacza wektor kolumny nie-
wiadomych.

Trudność rozwiązania sprowadza się głównie do znalezienia dokładnej metody wyznaczenia bazy w przestrzeni rozwiązań tego równania, tak aby można było dokonać odpowiedniego złożenia elementów bazy i uzyskać rozwiązanie spełniające warunki graniczne o technicznym znaczeniu. Okazuje się, że znane metody całkowania układów równań różniczkowych typu Rungego-Kutty i inne opisane w [5], [6] okazały się dla tego układu nieefektywne (niezadawalająca dokładność i długi czas obliczeń). Efektywna okazała się dopiero metoda opisana w [4] polegająca na wykorzystaniu i uogólnieniu metody zaproponowanej przez Oluremi-Olaofe [8] dla jednego równania różniczkowego. Istotą metody jest rozwijanie funkcji $T(z)$ w szereg wielomianów Czebyszewa. Szczegółowy opis metody i sposób całkowania równań podano w [4] i [10].

Na podstawie wyżej przedstawionych rozważań autor opracował program na maszynie cyfrową ICL-4-70 w języku FORTRAN. Szczegółowy opis programu zamieszczono w [3].

Jako przykład rozważono pręty pryzmatyczne o przekrojach podanych na rys. 10. Dla wszystkich prętów przyjęto długość $L = 100$ m. Pozostałe charakterystyki geometryczne i materiałowe oraz schematy obciążenia podano na rys. 11, 12, 13, 14, 15, 16. W dziesięciu różnych przekrojach dla każdego pręta podano rozkłady naprężeń stycznych i naprężeń normalnych. Dla przejrzystości rysunków w poszczególnych przekrojach naniesiono wartość naprężenia w jednym węźle.

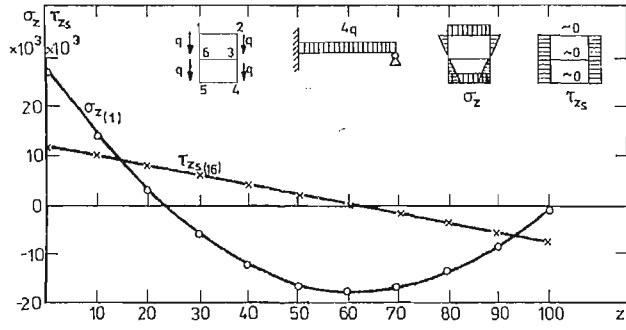


Przyjęto następujące jednostki:

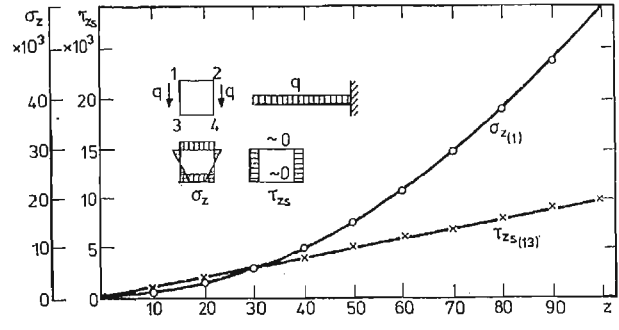
$$[E_1] = [E_2] = [G] = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} ; [\delta] = \text{m} ; [\sigma_x] = [\tau_{xz}] = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} ; [q] = \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Wymiary dotyczące przekrojów podano w metrach.

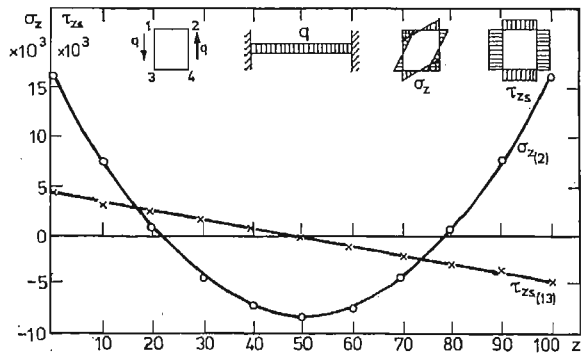
Rys. 10



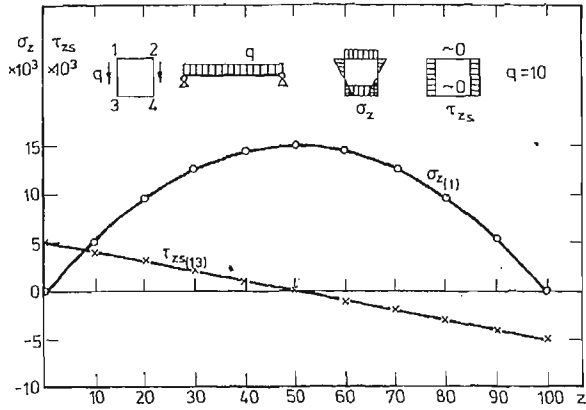
Rys. 11



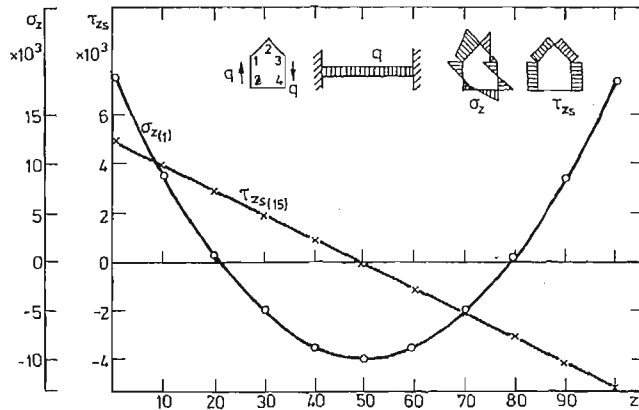
Rys. 12



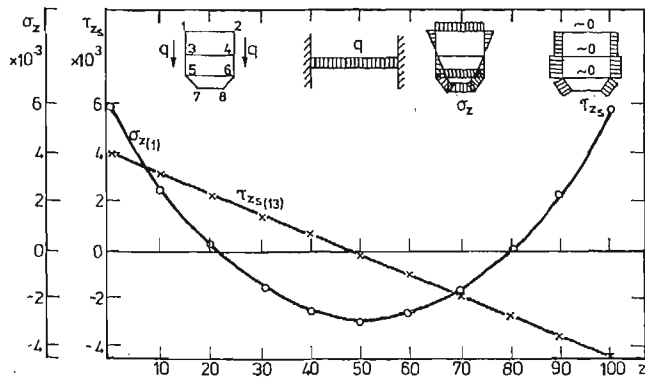
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

7. Wnioski

Z zastosowań półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń statycznych ortotropowych liniowo-sprężystych prętów cienkościennych pryzmatycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym z niniejszej pracy wynikają następujące wnioski.

1. Opracowana metoda pozwala w sposób automatyczny budować macierze współczynników układu równań różniczkowych dla prętów pryzmatycznych cienkościennych o przekrojach zamkniętych wieloobwodowych składających się z wielokątów dowolnego kształtu.
2. W wyniku opracowanego programu na maszynę cyfrową można obliczać naprężenia w dowolnym przekroju pręta.
3. Porównanie opracowanej metody w niniejszej pracy z metodą elementów skończonych wykazuje na znacznie szybszy wzrost czasu pracy maszyny cyfrowej wraz ze stopniem skomplikowania przekroju dla metody elementów skończonych. Dla ilości węzłów w przekroju 3 - 12 i długości kadłuba statku 100 metrów czas obliczeń według metody przedstawionej w pracy wynosi od 1.5 min. do 10 minut pracy maszyny cyfrowej ICL-4-70. W metodzie elementów skończonych czas ten jest kilkakrotnie większy dla tych samych przypadków co było potwierdzone informacjami z przemysłu okrętowego gdzie wykonano obliczenia kontrolne.
4. Rozwiązanie podanego w pracy układu równań różniczkowych stało się efektywne (nakład pracy, czas obliczeń) po wykorzystaniu metody podanej w [8] polegającej na rozwijaniu funkcji niewiadomej w sumy wielomianów Czebyszewa, a mało efektywne w przypadku stosowania znanych metod całkowania typu np. Rungego-Kutty.
5. W celu zwiększenia zakresu stosowalności metody należy prowadzić dalsze badania nad znalezieniem odpowiedniego sposobu całkowania układu równań różniczkowych równowagi, gdyż metoda przedstawiona w [8] i opisana w [4] jest efektywna dla układów równań różniczkowych do rzędu 40 tj. dla prętów o przekroju składającym się z 10 - 12 węzłów.

Literatura cytowana w tekście

1. W. S. CZUWIKOWSKII, *Problemy procznosti sudow*, Sudostrojenie Leningrad 1975.
2. A. F. FIEOFANOW, *Stroitel'naja miechanika awiacyjnych konstrukcji*, Maszinoostrojenie Moskwa 1969.
3. Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodziowych*, Praca doktorska. Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej 1980 (niepublikowana).
4. Z. GÓRECKI, M. SPERSKI, J. WIĘCKOWSKI, *Wdrożenie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodziowych*. Praca badawcza Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej. Gdańsk 1976 cz. I, Gdańsk 1977, cz. II, Gdańsk 1979, cz. III, (niepublikowana).
5. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, Wyd. Nauk. Techn. Warszawa 1974.
6. K. MOSZYŃSKI, *Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych na maszynach cyfrowych*, Wyd. Nauk Techn. Warszawa 1971.
7. J. F. OBRACZOW, *Mietydy Raczota na proczność kesonnych konstrukcji tipa kryla*, Obornigiz 1960.
8. G. OLUREMI-OLAOFI, *On the Tchebyschev method of solution of ordinary differential equations*, J. of Math. Anal. and Aplic. Vol. 60, No 1 August 1977.
9. W. Z. WŁASOW, *Tonkostiennye uprugije stierżni*, Gosud. Izdat. Fiz.-Mat. Lit. Moskwa 1959.
10. J. WIĘCKOWSKI, M. SPERSKI, J. DREWKO, *Równania równowagi i obliczenia numeryczne powłok liniowo-sprężystych o wielospójnym prostokątnym przekroju*, II Konferencja „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie” Gołun 6 - 10 XI 1978.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУ-БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК К СТАТИЧНОМУ РАСЧЁТУ ОРТОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗАКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В работе представлено метод расчёта напряжений и перемещений ортотропных линейно-упругих тонкостенных призматических стержней произвольного закрытого профиля состоящегося из многоугольников произвольного очертания. Приведено предположения полу-безмоментной теории оболочек на основании теории оболочек В. З. Власова. Эту теорию расширено и приспособлено к расчётам на вычислительных машинах (ЭВМ). Приведенный метод применено к статическому расчёту без-переборковых судовых корпусов. Даны примеры вычислений на ЭВМ стержней с произвольных очертаниях в произвольных краевых условиях.

Summary

THE APPLICATION OF SEMI-MOMENTLESS THEORY OF SHELLS IN STATIC COMPUTATION OF ORTOTROPIC LINEAR ELASTIC BARS WITH MULTICIRCUIT CLOSED SECTION

In the paper a method of computation of stresses and displacements for ortotropic linear-elastic thin-walled prismatic bars with multicircuit section consisted of polygon with arbitrary form is presented. The assumption of semi-momentless theory of shells is based on V. Z. Vlasov a shell theory. The theory is developed and adopted for computation on a digital computer. The described method is applied in static computation for hulls of unbulthead ships. Examples of numerical computations for bars with different cross-sections and different boundary conditions conclude the paper.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 listopada 1981 roku.