MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

WYKORZYSTANIE METOD ANALIZY WRAŻLIWOŚCI DO BADANIA UKŁADÓW MECHANICZNYCH OPISYWANYCH LINIOWYMI I NIELINIOWYMI RÓWNANIAMI MATHIEU

BOGUSŁAW SKIERCZYŃSKI

Lublin

We wszystkich naukach przyrodniczych i w technice ważna jest idea modelowania. Sformułowanie teorii (proponowanej koncepcji badanego zjawiska) można z całą słusznością nazwać „tworzeniem modelu". Teoria występuje tu jako werbalny lub matematyczny model rzeczywistości. Dla naszych celów definiujemy model jako opis zasadniczych cech istniejącego lub projektowanego układu, dostarczający wiedzy o nim w formie użytecznej.

Podstawowym wymaganiem względem modelu jest to bowiem, by wiedza o procesie realizowanym przez niego była przedstawiona w formie użytecznej, ponieważ musi on dostarczyć wniosków do dalszej analizy. Jeżeli model jest zbyt złożony jego użyteczność staje się wątpliwa. Pociąga to za sobą konieczność odpowiedzenia na szereg trudnych pytań takich jak np.:

— Jak ocenić jakość modelu?
— Jak zawrzeć w nim całą najistotniejszą wiedzę?
— Jak potraktować nieliniowości?
— Jak można rozważany układ przedstawić w sposób przybliżony za pomocą prostego modelu?
— itp.

Na niektóre z tych pytań metody analizy wrażliwości są w stanie udzielić odpowiedzi.

Literatura dotycząca metod analizy wrażliwości nie podaje konkretnych metod nadających się do wykorzystania w analizie układów nieliniowych. Podane są ogólne definicje wrażliwości oraz ich zastosowanie do układów liniowych. Zastosowanie tych metod do układów nieliniowych prowadzi do konieczności rozwiązywania równań liniowych o zmiennych współczynnikach, przy założeniu, że rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego jest znane.

Istnieją różne koncepcje i definicje pojęcia wrażliwości oraz jej miary. Jednym z wariantów zagadnienia wrażliwości jest zagadnienie wrażliwości ilościowej rozwiązania na zmiany parametrów, które poglądowo można przedstawić w następujący sposób. [2]

Niech model pewnego zjawiska fizycznego będzie opisywany równaniem różniczkowym w ogólnym przypadku nieliniowym.

$$\phi = \ddot{x}-f(t, x, \dot{x}, p) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{1}$$

Rozwiązanie równania (1) uważamy za znane. Zagadnienie które chcemy zbadać to zmiana wartości rozwiązania równania gdy parametr p zmieni się o Δp.

Jeżeli zmiana parametru nie zależy od czasu to funkcję wrażliwości można określić następująco:

$$w(t, p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{x(t, p+\Delta p)-x(t, p)}{\Delta p} = \frac{\partial x}{\partial p}, \tag{2}$$

dla p dostatecznie małego zależność (2) można przedstawić w postaci:

$$x(t, p+\Delta p)-x(t, p) \cong w(t, p)\cdot \Delta p. \tag{3}$$

Jak widać z przedstawionej zależności (3) jeżeli wyznaczymy lub oszacujemy funkcję wrażliwości $w(t, p)$ to możemy wyznaczyć lub oszacować zmianę funkcji $x(t, p)$ wynikłą ze zmiany parametru p, lub jeżeli mamy zmianę funkcji $x(t, p)$ i wyznaczymy lub oszacujemy funkcję wrażliwości to możemy wyznaczyć zmianę parametru p.

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości $w(t, p)$ otrzymujemy różniczkując równanie (1) względem parametru p.

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial \ddot{x}}\frac{\partial \ddot{x}}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \tag{4}$$

stąd na podstawie definicji funkcji wrażliwości (2) otrzymujemy:

$$\ddot{w}+\alpha(t, p)\dot{w}+\beta(t, p)w = \gamma(t, p), \tag{5}$$

gdzie:

$$\alpha(t, p) = -\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \quad \beta(t, p) = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \gamma(t, p) = \frac{\partial f}{\partial p}. \tag{6}$$

Jeżeli znamy rozwiązanie równania (1) to znamy również współczynniki α, β, γ, i funkcja wrażliwości jest rozwiązaniem równania (5) różniczkowego o zmiennych współczynnikach. Funkcje wrażliwości wyższych rzędów można otrzymać różniczkując równanie (1) względem $p^2, p^3, \ldots, p^n$.

Tak więc widać z przedstawionego schematu czy też metody otrzymywania funkcji wrażliwości dla równań nieliniowych, że zachodzi konieczność rozwiązania w pierwszym rzędzie równania różniczkowego a następnie równania liniowego o zmiennych współczynnikach.

Drugim wariantem wrażliwości jest tzw. „λ lub μ-wrażliwość" — wrażliwość rozwiązania na zmiany struktury równań opisujących model. Definicja ta jest bardzo ogólna i można w niej wyodrębnić cztery główne przypadki:

a. wrażliwość na zmiany rzędu modelu matematycznego,
b. wrażliwość na zmianę ilości stopni swobody,
c. wrażliwość na zmianę modelu ciągłego na dyskretny,
d. analizę wpływu wyrazów funkcyjnych, z których zbudowany jest model matematyczny.

Szczególnym przypadkiem wrażliwości strukturalnej rozumianej jako analizę wpływu wyrazów funkcyjnych jest wrażliwość na zmianę parametrów.

Weźmy pod uwagę model opisywany układem równań różniczkowych w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \tag{7}$$

gdzie:

$$x = \mathrm{col}[x_1, \dots, x_n],$$
$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

ε — mały parametr
f — funkcja nieliniowa

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości dla parametru jest postaci:

$$\dot{w} = \mathbf{A}w + \varepsilon \frac{\partial f(t, x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + f(t, x, \varepsilon), \tag{8}$$

gdzie:

$$w = \mathrm{col}[w_1, \dots, w_n], \quad w_n = \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon}.$$

Przyjmijmy, że parametr $\varepsilon = 0$. Wtedy równanie (8) przybiera postać:

$$\dot{w} = \mathbf{A}w + f(t, \tilde{x}, \varepsilon) \tag{9}$$

gdzie $\tilde{x}$ jest rozwiązaniem równania:

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}\tilde{x}. \tag{10}$$

Wprowadzone funkcje $w_i(t, \varepsilon = 0)$ (i $= 1, \dots,$ n) są to funkcje wrażliwości określające zmianę rozwiązania równania (10) gdy w równaniu tym pojawią się funkcje nieliniowe $f_i(t, x_i, \varepsilon)$.

Zgodnie z definicją (3) można napisać:

$$x - \tilde{x} = w(t, \varepsilon = 0) \cdot \varepsilon, \tag{11}$$

stąd rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego jest postaci:

$$x = \tilde{x} + w(t, \varepsilon = 0) \cdot \varepsilon \tag{12}$$

Powyżej przedstawioną metodę można wykorzystać do badania równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach — do wyznaczania ich rozwiązań i obszarów stateczności. W ostatnim czasie krąg zagadnień których rozwiązanie sprowadza się do badania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach a w szczególności do badania równania Mathieu szybko się powiększa. Spotykamy się z nim nie tylko w fizyce i technice lecz także w biologii, biofizyce, medycynie itp.
W związku z tym zachodzi konieczność podania efektywnej metody rozwiązywania równania liniowego i nieliniowego Mathieu. Wydaje się, że taką metodą jest metoda przedstawiona powyżej.

Jako przykład rozważmy równanie Mathieu w postaci:

$$\ddot{z} + (a - 2q\cos 2t)z = 0. \tag{13}$$

W zależności od parametrów a i q rozwiązanie równania Mathieu może być okresowe lub nieokresowe, stateczne lub niestateczne.

Przyjmijmy, że a jest określone zależnością:

$$a = \omega^2 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + . \tag{14}$$

Podstawiając (14) do równania (13) otrzymujemy:

(15) $$\ddot{z}+(\omega^2+a_1q+a_2q^2+\ldots-2q\cos 2t)z = 0.$$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości dla parametru q jest postaci:

(16) $$\ddot{w}+(\omega^2+a_1q+a_2q^2+\ldots-2q\cos 2t)w = -a_1z-2a_2qz-\ldots+2z\cos 2t,$$

gdzie: $w = \frac{\partial z}{\partial q}$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości drugiego rzędu dla parametru q przybiera postać:

(17) $$\ddot{w}_2+(\omega^2+a_1q+a_2q^2+\ldots-2q\cos 2t)w_2 = -a_1w-2qa_2w-\ldots-a_1w-2a_2z- -\ldots+4\cos 2tw,$$

gdzie: $w_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$

Przyjmujemy, że $q = 0$ i otrzymujemy:

(18) $$\ddot{z}_0+w^2z_0 = 0,$$

(19) $$\ddot{w}_1+\omega^2w_1 = -a_1z_0+2z_0\cos 2t,$$

(20) $$\ddot{w}_{20}+\omega^2w_{20} = 2(-a_1w_1-a_2z_0+2w_1\cos 2t).$$

Rozwiązanie równania (18) jest postaci:

(21) $$z_0(t) = C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t,$$

gdzie:

C_1, C_2 — stałe określone przez warunki początkowe.

Podstawiając (21) do (19) otrzymujemy:

(22) $$\ddot{w}_1+\omega^2w_1 = -C_2a_{1c}\cos\omega t-C_1a_{1s}\sin\omega t+C_2\cos(\omega-2)t+C_2\cos(\omega+2)t+ +C_1\sin(\omega+2)t+C_1\sin(\omega-2)t.$$

Z postaci równania (22) wynika, że wyrazy sekularne pojawiają się w rozwiązaniu gdy $\omega = 0, 1, 2$

Przyjmijmy, że $\omega = 1$. Wtedy równanie (22) przybiera postać:

(23) $$\ddot{w}_1+w_1 = -C_2a_{1c}\cos t-C_1a_{1s}\sin t+C_2\cos t+C_2\cos 3t+C_1\sin 3t+C_1\sin t.$$

Usuwając wyrazy sekularne otrzymujemy dwa nietrywialne alternatywne warunki,

(14) $$\begin{array}{llll} \text{I.} & a_{1c} = 1 & \text{i} & C_1 = 0 \\ \text{II.} & a_{1s} = -1 & \text{i} & C_2 = 0 \end{array}$$

gdzie:

a_{1s} — oznacza stałą a_1 przy rozwiązaniu w postaci funkcji sinus.

a_{1c} — oznacza stałą a_1 przy rozwiązaniu w postaci funkcji cosinus.

Rozwiązanie równania (23) po usunięciu przybiera postać:

(25) $$w_1(t) = -\frac{C_2}{8}\cos 3t-\frac{C_1}{8}\sin 3t$$

Podstawiając (25) i (21) do równania (20) oraz usuwając wyrazy wiekowe otrzymujemy także dwa warunki. A mianowicie:

$$\text{I. } a_{2c} = -\frac{1}{8} \quad \text{i} \quad C_1 = 0 \tag{26}$$

$$\text{II. } a_{2s} = -\frac{1}{8} \quad \text{i} \quad C_2 = 0 \tag{27}$$

Rozwiązanie równania (20) jest postaci:

$$w_{20}(t) = -\frac{1}{32}C_2\cos 3t + \frac{1}{32}C_1\sin 3t + \frac{1}{96}C_2\cos 5t + \frac{1}{96}C_1\sin 5t. \tag{28}$$

Chcąc znaleźć dokładniejsze rozwiązanie równania (13) oraz dokładniejsze obszary stateczności należy wyznaczyć funkcje wrażliwości rzędu trzeciego, czwartego itp., co nie nastręcza dużych trudności jak widać z przedstawionego schematu.

Rozwiązanie równania (13) w ogólnej postaci określone jest zależnością:

$$z(t) = z_0(t) + w_1(t, q = 0)\cdot q + \frac{1}{2}w_{20}(t, q = 0)\cdot q^2 + \ldots \tag{29}$$

Ograniczając się do funkcji wrażliwości drugiego rzędu oraz uwzględniając wyznaczone warunki (24), (26) i (27) otrzymujemy dwa przypadki okresowego rozwiązania równania Mathieu (13) dla $\omega = 1$.

I.

$$z(t) = C_2\cos t - \frac{1}{8}C_2 q\cos 3t - \frac{1}{64}C_2 q^2\cos 3t + \frac{1}{192}C_2 q^2\cos 5t + \ldots \tag{30}$$

przy czym,

$$a_c = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 + \ldots \tag{31}$$

II.

$$z(t) = C_1\sin t - \frac{1}{8}C_1 q\sin 3t + \frac{1}{64}C_1 q^2\sin 3t + \frac{1}{192}C_1 q^2\sin 5t + \ldots \tag{32}$$

przy czym,

$$a_s = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \ldots \tag{33}$$

Jak widać z postaci rozwiązania równania Mathieu i krzywych rozdzielających obszary stateczności i niestateczności otrzymanych przy pomocy funkcji wrażliwości na pojawianie się wyrazów x funkcyjnych w równaniu liniowym o stałych współczynnikach są one takie same jak uzyskane przy pomocy innych metod [1, 3]. Przyjmując, że $\omega = 2{,}3$ i postępując w sposób przedstawiony powyżej otrzymujemy inne rozwiązania równania Mathieu. Metoda ta wydaje się być mniej skomplikowana w zastosowaniu w porównaniu z metodami klasycznymi.

W wielu zagadnieniach pojawiają się nieliniowe równania Mathieu. W tym przypadku metoda przedstawiona powyżej wyraźniej uwypukla swoje zalety. Wyznaczenie rozwiązania i obszarów stateczności jest dużo łatwiejsze w porównaniu z innymi metodami.

Jako przykład rozważmy nieliniowe równanie Mathieu postaci:

$$\ddot{z}+(a-2q\cos 2t)z+\mu z^3 = 0. \tag{34}$$

Podstawiając,

$$\mu = qb, \tag{35}$$

$$a = \omega^2+a_1 q+a_2 q^2+ \dots \tag{36}$$

do równania (34) otrzymujemy:

$$\ddot{z}+(\omega^2+a_1 q+a_2 q^2+ \dots -2q\cos 2t)z+qbz^3 = 0. \tag{37}$$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości pierwszego rzędu dla parametru q jest postaci:

$$\ddot{w}+(\omega^2+a_1 q+a_2 q^2+ \dots -2q\cos 2t)w+3qbz^2 w = -a_1 z-2a_2 qz+2\cos 2t\cdot z- -bz^3- \dots \tag{38}$$

Równanie różniczkowe na funkcje wrażliwości rzędu drugiego dla parametru q przybiera postać:

$$\ddot{w}_2+(\omega^2+a_1 q+a_2 q^2+ \dots -2q\cos 2t)w_2+3qbz^2 w_2+6qbzw^2 = -2a_1 w-2a_2 qw+ +4w\cos 2t-6bz^2 w-2a_2 z-2a_2 qw- \dots \tag{39}$$

Przyjmujemy, że $q = 0$ i $\omega = 1$. Wtedy równania (39), (38), (37) są postaci:

$$\ddot{z}_0+z_0 = 0 \tag{40}$$

$$\ddot{w}_1+w_1 = -a_1 z_{0-bz_0^3}+2z_0\cos 2t, \tag{41}$$

$$\ddot{w}_{20} = w_{20} = 2(-a_1 w_1+2w_1\cos 2t-a_2 z_0-3bz_0^2 w_1). \tag{42}$$

Rozwiązanie równania (40) jest postaci:

$$z_0(t) = C_1\sin t+C_2\cos t. \tag{43}$$

Podstawiając (43) do równania (41) oraz usuwając wyrazy sekularne otrzymujemy dwa warunki:

I.

$$a_{1c} = 1-\frac{3}{4}C_2^2 b \quad \text{i} \quad C_1 = 0 \tag{44}$$

II.

$$a_{1s} = -1-\frac{3}{4}C_1^2 h \quad \text{i} \quad C_2 = 0 \tag{45}$$

Rozwiązanie równania (41) po usunięciu wyrazów wiekowych jest postaci:

$$w_1(t) = -\frac{1}{8}\left(C_1^3+\frac{1}{4}C_1^3 b-\frac{3}{4}C_2^2 C_1 b\right)\sin 3t-\frac{1}{8}\left(C_2+\frac{3}{4}C_1^2 C_2 b-\frac{1}{4}C_2^3 b\right)\cos 3t \tag{46}$$

Usuwając wyrazy wiekowe w równaniu (42) po podstawieniu do niego (43) i (46) otrzymujemy warunki:

I.

$$a_{2c} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{32} C_2^2 b + \frac{3}{128} C_2^4 b^2 \quad \text{i} \quad C_1 = 0, \tag{47}$$

II.

$$a_{2s} = -\frac{1}{8} - \frac{4}{32} C_1^2 b - \frac{3}{138} C_1^4 b^2 \quad \text{i} \quad C_2 = 0. \tag{48}$$

Ograniczając się do funkcji wrażliwości drugiego rzędu oraz uwzględniając warunki (48), (47), (45), (44) otrzymujemy dwa przypadki rozwiązania okresowego nieliniowego równania Mathieu (34),

I.

$$\begin{aligned} z(t) = {} & C_2\cos t - \frac{1}{8} C_2 q\cos 3t + \frac{1}{32} C_2^3 bq\cos 3t + \frac{1}{64} C_2 q^2\cos 3t - \\ & - \frac{1}{128} C_2^3 q^2\cos 3t + \frac{3}{1024} C_2^5 b^2 q^2\cos 3t - \frac{1}{192} C_2 q^2\cos 5t + \\ & + \frac{1}{192} C_2^3 bq^2\cos 5t - \frac{3}{3072} B_2^5 b^2 q^2\cos 5t + \ldots \end{aligned} \tag{49}$$

przy czym,

$$a_c = 1 + q - \frac{3}{4} C_2^2 bq - \frac{1}{8} q^2 + \frac{1}{8} C_2^2 bq^2 + \frac{3}{128} b^2 C_2^4 q^2 + \ldots \tag{50}$$

II.

$$\begin{aligned} z(t) = {} & C_1\sin t - \frac{1}{8} C_1 q\sin 3t - \frac{1}{32} C_1^3 qb\sin 3t + \frac{1}{64} C_1 q^2\sin 3t - \\ & - \frac{1}{128} C_1^3 bq^2\sin 3t - \frac{3}{1024} C_1^5 b^2 q^2\sin 3t + \frac{1}{192} C_1 q^2\sin 5t + \\ & + \frac{1}{192} C_1^3 bq^2\sin 5t + \frac{3}{3072} C_1^5 b^2 q^2\sin 5t + \ldots \end{aligned} \tag{51}$$

przy czym,

$$a_s = 1 - q - \frac{3}{4} C_1^2 bq - \frac{1}{8} q^2 - \frac{1}{8} C_1^2 bq^2 - \frac{3}{128} C_1^2 b^2 q^2 + \ldots \tag{52}$$

Wyniki uzyskane przy pomocy proponowanej metody zgadzają się z wynikami uzyskanymi przy pomocy innych metod np.: (4).

Efektywność proponowanej metody jest tym większa im bardziej skomplikowana jest postać funkcji nieliniowej występującej w rozważanym równaniu. Metoda ta pozwala na uniknięcie bardzo kłopotliwego podnoszenia szeregu potęgowego do potęgi w jakiej występuje nieliniowość w równaniu, a przy bardziej skomplikowanych nieliniowościach do uniknięcia mnożenia szeregów potęgowych wcześniej podnoszonych do określonych potęg.

Literatura cytowana w tekście

1. E. GOŁOSKOKOW, A. FILIPOPOW, *Niestacjonarnyje kolebania miechaniczeskich sistem* „Naukowa Dumka" Kijów 1966.
2. R. GUTOWSKI, B. RADZISZEWSKI, A. OLAS, *Stateczność i wrażliwość w układach mechanicznych.* Ossolineum 1978.
3. W. JAKUBOWSKI, W. STARŻIŃSKIJ, *Liniejnyje differencjalnyje urawnienia s pieriodiczeskimi koeficientami i ich priłożenija.* Iz. „Nauka" Moskwa 1972.
4. J. MITROPOLSKIJ, J. KOZUBOWSKAJA, *O wlijanij nieliniejnosti na zony ustojcziwosti dlja urawnienija Mathieu.* Cb. „Analiticzeskije mietody issliedowanija nieliniejnych kolebanii" Kijew 1980.
5. R. TOMOWICZ, M. VUKOBRATOWICZ, *Obszczaja tieoria czuwstwitielnosti.* Iz. „Sowietskoje Radio" Moskwa 1972.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ К МЕХАНИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ ОПИСЫВАЕМЫМ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ МАТЬЕ

В работе представлено метод определения зон уптойчивости для линейных и нелинейных уравнений Матье при использовании методов анализа чувствительности — функции чувствительности на введение нелинейных членов в диференцияльные уравнения.

S u m m a r y

METHOD OF SENSITIVITY ANALYSIS APPLIED TO MECHANICAL SYSTEMS GOVERNED BY LINEAR AND NONLINEAR MATHIEU EQUATIONS

The method of determination of the regions of parametric instability in linear and nonlinear Mathieu equations has been presented by applying the sensitivity analysis, the sensitivity function has been used to introduce non-linear terms into differential equations.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1982 roku