

O METODACH TEORII POTENCJAŁÓW W ROZWIĄZYWANIU ZAGADNIĘĆ ODWROTNYCH WYMIANY CIEPŁA

KRZYSZTOF GRYSA

Politechnika Poznańska

Wstęp

Zagadnienia odwrotne wymiany ciepła rozważane są w literaturze naukowej od ok. dwudziestu lat. Pod tym określeniem rozumie się zwykle jeden z następujących rodzajów zagadnień: a) wyznaczenie funkcji opisującej źródło ciepła przy znanym rozkładzie temperatury w ciele, [1], b) wyznaczenie współczynników charakteryzujących proces wymiany ciepła przy znanym rozkładzie temperatury w rozważanym ośrodku, [2], c) odtwarzanie historii zmian temperatury w ciele przy znanym jej rozkładzie dla chwil czasu $t > t_0$, [3], oraz d) odtwarzanie warunków brzegowych przy znajomości tzw. wewnętrznych odpowiedzi termicznych, którymi mogą być temperatura lub strumień ciepła określone w pewnych punktach wewnętrznych rozważanego ciała, [4]. W niniejszej pracy zajmiemy się zagadnieniami odwrotnymi rozumianymi w sensie punktu d).

Przeгляд metod, stosowanych przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych zamieszczono w pracy [4]. Jak wynika z tego przeglądu, głównie zajmowano się — jak dotąd — zagadnieniami jednowymiarowymi. Przez wiele lat podstawowym problemem było uzyskanie rozwiązania przybliżonego, opisującego w zadowalający sposób poszukiwane warunki brzegowe. Głównym założeniem, które jest również podstawowym założeniem i niniejszej pracy, była znajomość rodzaju warunków panujących na brzegach. Zadowalające rezultaty dla zagadnień jednowymiarowych uzyskano dopiero w ostatnich latach — można tu wymienić np. prace [5] i [6]. Jednakże zagadnienia wielowymiarowe stanowiły problem o znacznie większym stopniu trudności — toteż ilość prac, w których takie problemy się rozważa, jest raczej niewielka. Wyniki, prezentowane w tych pracach, nie budzą większego zaufania (por. [7, 8]). Są to wyniki przybliżone, których wykorzystanie w praktyce uwarunkowane jest dostępem do szybkołoczącego komputera o bardzo dużej pamięci operacyjnej.

W niniejszej pracy rozważa się zagadnienie odwrotne wymiany ciepła w trzech wymiarach. Wykorzystując tzw. potencjały cieplne sprowadza się problem do równań całkowych. W pierwszej części pracy zdefiniowano zagadnienia Fouriera i określono klasy funkcji, do których należą dane i poszukiwane wielkości. Następnie zdefiniowano potencjały cieplne i pewne funkcje pomocnicze, ułatwiające analizę tak zagadnień początkowo-brzegowych jak i odwrotnych. W trzeciej części pracy pokazano rozwiązania niektórych początkowo-brzegowych zagadnień wymiany ciepła. Rozważania zawarte w tej części

pracy są punktem wyjścia do analizy dotyczącej zagadnień odwrotnych. Jednocześnie stanowią pewien materiał porównawczy, pozwalający lepiej uchwycić różnicę podejść do zagadnień początkowo-brzegowych i odwrotnych. W części czwartej podane są rozwiązania dotyczące zagadnień odwrotnych. Rozwiązania te określone są przy pomocy funkcji stanowiących rozwiązania pewnych równań całkowych typu Volterra I rodzaju o jądrach będących iloczynami pewnych jąder słabo osobliwych. W końcowych częściach pracy przedstawiono metodę przybliżonego rozwiązywania równań całkowych determinujących gęstości potencjałów, przy pomocy których definiuje się rozwiązania zagadnień odwrotnych oraz krótko omówiono możliwości zastosowań praktycznych otrzymanych wyników.

1. Zagadnienia Fouriera

Rozważmy ograniczony obszar $\Omega \subset R^3$, którego brzegiem jest zamknięta powierzchnia klasy C^2 , [9, s. 217]. Punkty wewnętrzne rozpatrywanego obszaru będziemy oznaczać przez $x = (x_1, x_2, x_3)$ lub przez $y = (y_1, y_2, y_3)$, a punkty zamkniętej powierzchni $S = \partial\Omega$ przez $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ lub przez $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. W obszarze tym będziemy rozważać równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1.1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(x, t) = F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \infty),$$

z warunkiem początkowym

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} T(x, t) = \varphi(x),$$

oraz z różnego typu warunkami brzegowymi. Tutaj ∇^2 jest operatorem Laplace'a, $T(x, t)$ — temperaturą, $F(x, t)$ — funkcją źródła, $F(x, t) = -Q(x, t)/\lambda$, gdzie $Q(x, t)$ — intensywność źródła ciepła, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego, κ — współczynnik dyfuzyjności temperaturowej. O funkcji $\varphi(x)$ zakłada się, że jest ograniczona i ciągła dla $x \in \Omega$.

Ze względu na rodzaje warunków brzegowych rozróżnia się tzw. pierwsze, drugie i trzecie zagadnienie Fouriera, a także zagadnienia mieszane.

Pierwsze zagadnienie Fouriera polega na wyznaczeniu funkcji $T(x, t)$, która dla $t > 0$ spełnia równanie (1.1) w obszarze Ω , jest ciągła w $\bar{\Omega}$, spełnia warunek (1.2), a na brzegu S spełnia warunek brzegowy I rodzaju

$$(1.3) \quad T(\xi, t) = \psi(\xi, t).$$

Drugie zagadnienie Fouriera formułuje się analogicznie, z tą różnicą, że na brzegu S funkcja $T(\xi, t)$ musi spełniać warunek brzegowy II rodzaju

$$(1.4) \quad \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) = \Psi(\xi, t).$$

Trzecie zagadnienie Fouriera polega na wyznaczeniu w obszarze Ω funkcji $T(x, t)$, która — oprócz równania (1.1) i warunku (1.2) — musi spełniać warunek brzegowy III rodzaju:

$$(1.5) \quad \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \chi(\xi, t)T(\xi, t) = \Phi(\xi, t).$$

W powyższych związkach n_ξ oznacza normalną zewnętrzną do S , zaś $\varphi(\xi, t)$, $\Psi(\xi, t)$, $\Phi(\xi, t)$ i $\chi(\xi, t)$ są pewnymi funkcjami ograniczonymi i ciągłymi dla $t > 0$ i $\xi \in S$, [9]. O współczynnikach λ i κ zakłada się, że są stałe. Funkcja $\chi(\xi, t)$ ma związek z liczbą Biota, $Bi(\xi, t)$:

$$(1.6) \quad Bi(\xi, t) = \chi(\xi, t)L$$

gdzie L jest wymiarem charakterystycznym obszaru Ω . Stąd — wobec stałości λ — widoczne jest, iż w ramach omawianej teorii dopuszcza się zależność współczynnika wnikania ciepła, α , powiązanego z liczbą Biota wzorem

$$(1.7) \quad Bi = \alpha L/\lambda,$$

od współrzędnych ξ i t : $\alpha = \hat{\alpha}(\xi, t)$.

Oprócz warunków (1.2) i jednego z warunków (1.3), (1.4) czy (1.5) powinien być jeszcze spełniony warunek zgodności, który na postać następującą:

— w przypadku I zagadnienia Fouriera:

$$(1.8) \quad \varphi(\xi, 0) = \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x),$$

— w przypadku II zagadnienia Fouriera

$$(1.9) \quad \Psi(\xi, 0) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\xi},$$

— w przypadku III zagadnienia Fouriera

$$(1.10) \quad \Phi(\xi, 0) = \lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\xi} + \chi(\xi, 0)\varphi(x) \right].$$

W teorii równań całkowych dowodzi się, że każda funkcja klasy $C^2(\mathcal{E}_r)$ (gdzie $\mathcal{E}_r = \Omega \times (0, T)$, Ω — obszar ograniczony klasy C^1 , [10, str. 351]) daje się w obszarze \mathcal{E}_r rozłożyć na sumę potencjałów cieplnych (por. [10, str. 345 - 351]). W związku z tym w następnej części pracy określimy potencjały cieplne oraz pewne inne funkcje pomocne przy dalszych rozważaniach.

2. Potencjały cieplne

Ażeby sprowadzić sformułowane wyżej zagadnienia Fouriera do równań całkowych konstruuje się pewne szczególne rozwiązania równania (1.1), które odgrywają taką samą rolę, jak potencjały logarytmiczne czy potencjały newtonowskie warstwy pojedynczej i podwójnej w zagadnieniach Dirichleta i Neumanna.

Rozważmy funkcję

$$(2.1) \quad w(x, t) = \kappa(4\kappa\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp[-|x|^2(4\kappa t)^{-1}],$$

określoną dla $t > 0$ i $x \in R^m$. Funkcja ta nosi nazwę rozwiązania podstawowego równania przewodnictwa cieplnego (1.1), [9, s. 224]. Otrzymuje się je w przypadku, gdy $Q(x, t)/\lambda = \delta(x)\delta(t)$, gdzie $\delta(x)$ — dystrybucja Diraca. Za pomocą tej funkcji konstruuje się pewne rozwiązania równania (1.1), mające postać całek. Całki te noszą nazwy potencjałów cieplnych.

Potencjałem cieplnym warstwy podwójnej nazywa się całkę

$$(2.2) \quad U(x, t) = \int_0^t \int_S f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau,$$

gdzie funkcja f nosi nazwę gęstości warstwy podwójnej.

Potencjałem cieplnym warstwy pojedynczej nazywa się całkę

$$(2.3) \quad V(x, t) = \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau,$$

gdzie funkcja h nosi nazwę gęstości warstwy pojedynczej.

Potencjałem cieplnym objętościowym [10, s. 350] nazywamy całkę

$$(2.4) \quad A(x, t) = - \int_0^t \int_\Omega F(y, \tau) w(x - y, t - \tau) dy d\tau,$$

gdzie F jest funkcją mierzalną i ograniczoną w obszarze Ω .

Oprócz trzech wyżej określonych całek wprowadza się jeszcze tzw. całkę Poissona-Weierstrassa [9, s. 225], nazywaną także całką Fouriera-Poissona [10, s. 361]. Ma ona postać

$$(2.5) \quad I(x, t) = - \frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \varphi(y) w(x - y, t) dy.$$

Określone wzorami (2.2) i (2.3) potencjały mają m.in. następujące własności: Jeśli $x \rightarrow \xi$ oraz $x \in \Omega$, naś f i h są funkcjami ciągłymi, to

$$(2.6) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ t > 0}} U(x, t) = - \frac{1}{2} f(\xi, t) + \int_0^t \int_S f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau,$$

$$(2.7) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ t > 0}} \frac{\partial}{\partial n_\xi} V(x, t) = \frac{1}{2} h(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau$$

Przedstawione wyżej związki różnią się nieco od odpowiednich wzorów podanych w monografii [9]. Wynika to z innej orientacji normalnej do brzegu S ; w monografii [9] n jest normalną wewnętrzną.

Oprócz podanych wyżej funkcji, których własności będą w pracy wykorzystywane, wprowadza się dla skrócenia zapisu następującą funkcję:

$$(2.8) \quad P(x, t) = \frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \varphi(y) w(x - y, t) dy - \int_0^t \int_\Omega F(y, \tau) w(x - y, t - \tau) dy d\tau.$$

Jak widać, funkcja $P(x, t)$ jest różnicą całki Poissona-Weierstrassa i potencjału objętościowego. Funkcje $\varphi(x)$ i $F(x, t)$ mają charakter określony związkami (1.1) i (1.2).

Dla $t = 0$ znajdujemy — na mocy twierdzeń podanych w monografii [10] na stronach 367, 361 i 347, iż

$$(2.9) \quad P(x, 0) = \int_{\Omega} \varphi(y) w(x-y, 0) dy = \varphi(x).$$

3. Postać całkowa zagadnień Fouriera .

Ponieważ punktem wyjścia do rozważań dotyczących problemów odwrotnych wymiany ciepła jest postać całkowa zagadnień Fouriera, więc poniżej przedstawiono niektóre spośród takich przedstawień.

W przypadku I zagadnienia Fouriera funkcję $T(x, t)$ można przedstawić w postaci sumy potencjału cieplnego warstwy podwójnej o gęstości f oraz funkcji $P(x, t)$:

$$(3.1) \quad T(x, t) = P(x, t) - U(x, t).$$

Gęstość $f(\xi, t)$ musi dla $t > 0$ spełniać równanie całkowe

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} f(\xi, t) - U(\xi, t) = \psi(\xi, t) - P(\xi, t).$$

Jest to — jak wynika z (2.2) — równanie typu Volterra II rodzaju.

W przypadku jednowymiarowym I zagadnienie Fouriera formułuje się następująco:

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_1(x, t) = F_1(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_1(x, t) = \varphi_1(x)$$

$$T_1(0, t) = \psi_0(t), \quad T_1(l, t) = \psi_l(t).$$

Tutaj i w dalszych rozważaniach indeks „1” służy do zaakcentowania, że chodzi o przypadek jednowymiarowy. Wzory (3.1) i (3.2) zastosowane do zagadnienia jednowymiarowego prowadzą do następujących związków całkowych:

$$(3.4) \quad T_1(x, t) = \frac{l-x}{2\kappa} f_1(l, t) \times \frac{w_1(x-l, t)}{t} + \frac{x}{2\kappa} f_1(0, t) \times \frac{w_1(x, t)}{t} + P_1(x, t),$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} f_1(0, t) + \frac{l}{2\kappa} f_1(l, t) \times \frac{w_1(l, t)}{t} = \psi_0(t) - P_1(0, t) \\ \frac{1}{2} f_1(l, t) + \frac{l}{2\kappa} f_1(0, t) \times \frac{w_1(l, t)}{t} = \psi_l(t) - P_1(l, t) \end{cases}$$

Symbol \times oznacza splot, [11, s. 149].

Układ równań całkowych (3.5) można łatwo rozwiązać w transformatach Laplace'a. Po wstawieniu tych rozwiązań do przetransformowanego związku (3.4), a następnie odwróceniu transformat otrzymuje się funkcję $T_1(x, t)$ w postaci

$$(3.6) \quad T_1(x, t) = \frac{d}{dt} \{ \psi_0(t) - P_1(0, t) \} \times \left\{ \frac{l-x}{l} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{l-x}{l}\alpha_k\right) \exp\left(-\alpha_k^2 \cdot \frac{\kappa t}{l^2}\right) \Big\} + \frac{d}{dt} \{\psi_1(t) - P_1(l, t)\} \times \\ & \times \left\{ \frac{x}{l} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \sin\left(\frac{x}{l}\alpha_k\right) \exp\left(-\alpha_k^2 \cdot \frac{\kappa t}{l^2}\right) \right\} + P_1(x, t), \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_k = \pi k$, przy czym możliwość wykorzystania całki Duhamela i doprowadzenia funkcji $T_1(x, t)$ do podanej wyżej postaci wynika ze wzoru (2.9) oraz postaci prawych stron równań (3.5), a także ze wzoru (5.3) z pracy [13], rozpisanego dla $x = 1$. Różniczkowanie funkcji $P_1(0, t)$ i $P_1(l, t)$ po czasie rozumie się w sensie twierdzeń podanych w monografii [10] na stronach 360 i 366.

W przypadku III zagadnienia brzegowego funkcję $T(x, t)$ można przedstawić w postaci sumy potencjału cieplnego warstwy pojedynczej o gęstości h oraz funkcji $P(x, t)$:

$$(3.7) \quad T(x, t) = V(x, t) + P(x, t).$$

Gęstość $h(\xi, t)$ musi dla $t > 0$ spełniać następujące równanie całkowe:

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} h(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) N(\xi, \zeta, t, \tau) dS_\zeta d\tau = k(\xi, t)$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} N(\xi, \zeta, t, \tau) &= \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(\xi - \zeta, t - \tau) + \chi(\xi, t) w(\xi - \zeta, t - \tau), \\ k(\xi, t) &= \Phi(\xi, t) - \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} + \chi(\xi, t) \right) P(\xi, t). \end{aligned}$$

Jeśli z funkcją $\chi(\xi, t)$ dokonać przejścia do zera, wówczas równania całkowe (3.7) i (3.8) z odpowiednio zmodyfikowanymi związkami (3.9) opisują II zagadnienie Fouriera. W miejsce funkcji $\Phi(\xi, t)$ należy wówczas wstawić $\Psi(\xi, t)$.

Rozważmy jeszcze równanie (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) i warunkami brzegowymi mieszanymi:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} T(\xi, t) &= \psi(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_1 \\ \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \chi(\xi, t) T(\xi, t) &= \Phi(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_2, \end{aligned}$$

przy czym $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = S$. Rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego (1.1), (1.2), (3.10) można przedstawić w postaci

$$(3.11) \quad T(x, t) = V(x, t) - U(x, t) + P(x, t),$$

gdzie gęstości f i h potencjałów cieplnych są funkcjami, równymi odpowiednio

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f(\xi, t) &= T(\xi, t) = \psi(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_1, \\ h(\xi, t) &= \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) = \Phi(\xi, t) - \chi(\xi, t) f(\xi, t) \quad \text{dla} \quad \xi \in S_2. \end{aligned}$$

Wzór (3.11) wynika z ogólnej postaci rozwiązania równania (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) i dowolnymi warunkami brzegowymi, [10, s. 350]. Funkcje f i h dla ξ należących do — odpowiednio — S_2 i S_1 określa się jako rozwiązania następującego układu równań całkowych, wynikających z (3.11) i (2.6):

$$(3.13) \quad \frac{1}{2}f(\xi, t) = - \int_0^t \int_{S_1} \psi(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \\ + P(\xi, t) - \int_0^t \int_{S_2} f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \\ + \lim_{x \rightarrow \xi} \left\{ \int_0^t \int_{S_1} h(\zeta, \tau) w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{S_2} [\Phi(\zeta, \tau) - \chi(\zeta, \tau) f(\zeta, \tau)] w(x - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau \right\},$$

gdzie osobno trzeba rozpatrzyć $\xi \in S_1$ i $\xi \in S_2$.

W przypadku jednowymiarowym powyższe zagadnienie mieszane sprowadza się do rozwiązania równania (3.3)₁ z warunkami (3.3)₂ oraz warunkami brzegowymi postaci — np. —

$$(3.14) \quad \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) - \chi_1(0, t)T_1(0, t) = -\Phi_0(t), \\ T_1(l, t) = \psi_l(t),$$

ozn. tutaj $S_1 = \{l\}$, $S_2 = \{0\}$.

Wzór (3.11) oraz równania wynikające z (3.13) przyjmą wówczas postaci

$$(3.15) \quad T_1(x, t) = \frac{l-x}{2\kappa} \psi_l(t) * \frac{w_1(x-l, t)}{t} + \frac{x}{2\kappa} f_1(0, t) * \frac{w_1(x, t)}{t} + \\ + P_1(x, t) + h_1(l, t) * w_1(x-l, t) - [\chi_1(0, t)f_1(0, t) - \Phi_0(t)] * w_1(x, t),$$

$$(3.16) \quad \frac{1}{2}f_1(0, t) + \frac{1}{2}\chi(0, t)f_1(0, t) * \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} - \\ - h_1(l, t) * w_1(l, t) = \frac{l}{2\kappa} \psi_l(t) * \frac{w_1(l, t)}{t} + \Phi_0(t) * \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} + P_1(0, t), \\ \frac{l}{2\kappa} f_1(0, t) * \frac{w_1(l, t)}{t} - \chi(0, t)f_1(0, t) * w_1(l, t) + \\ + h_1(l, t) * \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} = \frac{1}{2} \psi_l(t) - \Phi_0(t) * w_1(l, t) - P_1(l, t).$$

Przyjmijmy dla uproszczenia, iż $\chi(0, t) = \chi = \text{const}$. Wówczas układ równań całkowych (3.16) można łatwo rozwiązać w transformatach Laplace'a. Przetransformowaną funkcję $T_1(x, t)$ można ostatecznie przedstawić w postaci

$$(3.17) \quad \bar{T}_1(x, s) = \frac{1}{M(s)} \left\{ [\bar{\psi}_1(s) - \bar{P}_1(l, s)] \left[\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh \left(x \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \chi \sinh \left(x \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) \right] + \left[\bar{\psi}_0(s) + \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} - \chi \right) \bar{P}_1(0, s) \right] \times \sinh \left[(l-x) \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right] + \bar{P}_1(x, s) \right\},$$

gdzie $M(s) = \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh \left(l \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) + \chi \sinh \left(l \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)$, s — parametr transformacji. Odwrócenie transformaty $T_1(x, s)$ nie przedstawia większych trudności.

Odnosnie równań całkowych występujących przy rozwiązywaniu zagadnień Fouriera w przestrzeni trójwymiarowej dowodzi się, że ich rozwiązanie istnieje i jest funkcją ciągłą, [9].

4. Zagadnienia odwrotne wymiany ciepła

Jak już wspomniano na wstępie, przez zagadnienia odwrotne wymiany ciepła będziemy rozumieli problem wyznaczenia warunków brzegowych (których rodzaj jest znany) przy znajomości warunków początkowych, funkcji źródła oraz przy znanej funkcji $T(x^*, t)$ lub $q(x^*, t)$, $x^* \in \partial\Omega^*$, gdzie $\Omega^* \subset \Omega$. Funkcja $T(x^*, t)$ opisuje rozkład temperatury na pewnej powierzchni $\partial\Omega^*$, zaś funkcja $q(x^*, t)$ — rozkład strumienia ciepła na tej powierzchni. Funkcje te, określone dla $x^* \in \partial\Omega^*$ i $t > 0$, nazywać będziemy wewnętrznymi odpowiedziami (w skrócie *WO*), przy czym $T(x^*, t)$ jest wewnętrzną odpowiedzią temperaturową (*WOT*), zaś $q(x^*, t)$ — wewnętrzną odpowiedzią strumieniową (*WOS*).

Nie każda funkcja może opisywać *WOT* czy *WOS*. Pewne ograniczenia na te funkcje wynikają z ogólnej postaci rozwiązania równania (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) [10, s. 350], jak również z fizyki zagadnienia. Na podstawie własności potencjałów cieplnych oraz całki Poissona-Weierstrassa (por. [9, s. 225], a także [10], twierdzenia na s. 360 i 366) otrzymujemy następujące warunki dostateczne na to, aby funkcja $T(x^*, t)$ lub $q(x^*, t)$ mogła opisywać *WO*:

1° Funkcja ta musi być ograniczona dla $t \in (0, \infty)$

2° Funkcja ta musi mieć skończone granice dla $t \rightarrow 0+$ i $t \rightarrow \infty$.

3° W przypadku *WOT* funkcja $T(x^*, t)$ musi być przynajmniej jednokrotnie różniczkowalna względem czasu dla $t > 0$:

W praktyce przy poszukiwaniu rozwiązań przybliżonych rezygnuje się z warunku 3° na rzecz słabszego warunku, a mianowicie różniczkowalności funkcji $T(x^*, t)$ względem czasu w przedziale $t > 0$ poza pewną przeliczalną liczbą chwil.

Przy rozważaniu zagadnień odwrotnych zakłada się, że znany jest rodzaj warunków, panujących na brzegu $S = \partial\Omega$, a w przypadku gdy są to warunki III rodzaju — że znany jest współczynnik $\chi(\xi, t)$. Brzeg $\partial\Omega^*$ obszaru $\Omega^* \subset \Omega$ może mieć część wspólną z brzegiem S . Przy stosowaniu do obliczeń dotyczących tych zagadnień transformacji Laplace'a zakłada się, iż transformaty wyników są odwracalne. To założenie zwykle pociąga za sobą spełnienie warunków 1° i 2°, jak również słabszej postaci warunku 3°, [6].

Rozważmy teraz pewne zagadnienia szczegółowe.

Założmy, że znana jest *WOT*, tzn. że

$$(4.1) \quad T(x^*, t) = \psi^*(x^*, t), \quad x^* \in \partial\Omega^*, \quad \Omega^* \subset \Omega,$$

oraz że na brzegu obszaru panują warunki brzegowe I rodzaju. Niech funkcje $\varphi(x)$ oraz $F(x, t)$ będą funkcjami danymi, ciągłymi i ograniczonymi dla $x \in \Omega$ (założenie to będzie obowiązywać do końca pracy). Funkcją poszukiwaną jest $T(\xi, t)$, $\xi \in \partial\Omega$, opisująca temperaturę brzegu obszaru Ω . Funkcję tę można określić wzorem, wynikającym z (3.2) i (2.6):

$$(4.2) \quad T(\xi, t) = \frac{1}{2} f(\xi, t) - U(\xi, t) + P(\xi, t),$$

gdzie $f(\xi, t)$ jest rozwiązaniem następującego równania całkowego typu Voltery I rodzaju, wynikającego z (3.1):

$$(4.3) \quad \int_0^t \int_S f(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(x^* - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau = P(x^*, t) - \psi^*(x^*, t).$$

Jądro równania (4.3) można traktować jako iloczyn dwóch jąder słabo osobliwych, [9, s. 227]. Wynika stąd możliwość rozwiązania równania (4.3), a co za tym idzie — określenia funkcji $T(\xi, t)$.

Z porównania rozwiązania — czy też postaci całkowej — zagadnienia odwrotnego odpowiadającego I zagadnieniu Fouriera i zewnętrznego I zagadnienia Fouriera, [9, s. 233 - 234], wynika, iż są to problemy różnego typu. Mimo bowiem, iż jądra równań całkowych na gęstości f potencjału warstwy podwójnej różnią się tylko znakiem, to w przypadku I zewnętrznego zagadnienia Fouriera mamy do czynienia z równaniem Voltery II rodzaju, podczas gdy w przypadku zagadnienia odwrotnego odpowiadającego I wewnętrznemu zagadnieniu Fouriera do rozwiązania jest równanie Voltery I rodzaju na tę gęstość. Również wzory opisujące temperaturę punktów $x \in \Omega$ różnią się od siebie. W przypadku zagadnienia odwrotnego temperatura $T(x, t)$ dana jest wzorem (3.1), w którym potencjał warstwy podwójnej wyznaczony jest w oparciu o rozwiązanie równania (3.2), w którym z kolei funkcja $\psi(\xi, t) = T(\xi, t)$ jest dana związkami (4.2). Natomiast w przypadku odpowiedniego zewnętrznego zagadnienia funkcjonuje wzór podany w monografii [9], s. 234, który należy uzupełnić o potencjał objętościowy.

W przypadku jednowymiarowym w miejsce równania całkowego (4.3) otrzymuje się — po wykonaniu transformacji Laplace'a — układ równań na transformaty $\bar{f}_1(0, s)$ i $\bar{f}_1(l, s)$, wynikający z (3.4). Po rozwiązaniu tego układu równań i wstawieniu wyników do przetransformowanego związku (4.2), który w przypadku jednowymiarowym rozбивa się na dwa związki, gdyż $S = \{0, l\}$, otrzymuje się transformaty Laplace'a rozwiązań w postaci

$$(4.4)_1 \quad \bar{T}_1(0, s) = \bar{P}_1(0, s) - \sum_{k=1}^2 \left\{ [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] (-1)^k \times \frac{\sinh\left(x_{3-k} \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)}{\sinh\left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)} \right\}$$

$$(4.4)_2 \quad \bar{T}_1(l, s) = \bar{P}_1(l, s) + \sum_{k=1}^2 \left\{ [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] (-1)^k \times \frac{\sinh\left[(l - x_{3-k}) \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right]}{\sinh\left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right)} \right\},$$

gdzie $x_1, x_2 \in (0, l)$, $\psi_k^*(t) = T_1(x_k, t)$ jest *WOT* w punkcie x_k , $k = 1, 2$, $D = x_2 - x_1$. Transformaty dane wzorami (4.4) można odwrócić metodą podaną w pracy [6]. Metoda ta polega na przejściu do przybliżonego opisu funkcji $\psi_k^*(t)$ i $P_1(x_k, t)$ przy pomocy funkcji schodkowych (które są funkcjami dopuszczalnymi do opisu *WOT*, [6]). W ten sposób ułamki występujące pod sumą można sprowadzić do postaci transformat, spełniających założenia lematu Jordana, [11, s. 186]. Dzieje się tak dzięki przemnożeniu tych ułamków przez transformaty funkcji Heaviside'a występujących w opisie funkcji schodkowych. Po odwróceniu tak otrzymanych transformat dokonuje się ponownie przejścia, tym razem od opisu przybliżonego do ścisłego i w ten sposób otrzymuje się funkcje $T_1(0, t)$ i $T_1(l, t)$. Warto tu nadmienić, że w przypadkach, gdy $x_1 < D$ lub $l - x_2 < D$, niektóre spośród ułamków występujących w transformatach (4.4) od razu spełniają założenia lematu Jordana i kwalifikują się do odwrócenia metodą residuów. Wyniki otrzymane przy odwróceniu bezpośrednim pokrywają się w takim przypadku z wynikami otrzymanymi na opisanej w pracy [6].

Po odwróceniu transformat danych wzorami (4.4), przy wykorzystaniu całki Duhamela (co gwarantują związek (2.9) oraz wzór (4.2) z pracy [14]) i odpowiednich twierdzeń zawartych w monografii [10], s. 364, 367, 361 i 347, otrzymujemy dla $t > 0$

$$(4.5) \quad T_1(0, t) = P_1(0, t) - \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{d}{dt} [\psi_k^*(t) - P_1(x_k, t)] * \\ * \left\{ \frac{x_{3-k}}{D} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\alpha_l} \sin \frac{x_{3-k} \alpha_l}{D} \exp \left(-\alpha_l^2 \cdot \frac{\pi t}{D^2} \right) \right\},$$

$$T_1(l, t) = P_1(l, t) - \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{d}{dt} [\psi_{3-k}^*(t) - P_1(x_{3-k}, t)] * \\ * \left\{ \frac{l-x_k}{D} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\alpha_l} \sin \frac{\alpha_l(l-x_k)}{D} \exp \left(-\alpha_l^2 \cdot \frac{\pi t}{D^2} \right) \right\},$$

przy czym różniczkowanie funkcji P_1 po czasie rozumiane jest w sensie twierdzeń zawartych w monografii [10], s. 360 i 366. Między wzorami (4.5) i (3.6) istnieje pewne podobieństwo w budowie; w przypadku, gdy $x_1 = 0$, $x_2 = l$ wzory (4.5) i odpowiednie związki wynikające z (3.6) są identyczne.

Punktów x_1 i x_2 nie można wybierać dowolnie. Nie można wybierać takich punktów, przy których ułamki x_k/D i $(l-x_k)/D$, $k = 1, 2$, są liczbami całkowitymi. Jeśli bowiem ułamki te przyjmują wartości całkowite, wówczas argumenty sinusów stają się dla każdego $l = 1, 2, \dots$ wielokrotnością π i szeregi nieskończone znikają. Jeśli — dla lepszego zilustrowania sytuacji — przyjmujemy zerowe warunki początkowe i brak funkcji źródła, to przy całkowitych wartościach wspomnianych ułamków wzory (4.5) sprowadzają się do postaci

$$(4.6) \quad T_1(0, t) = \frac{x_2}{D} \psi_1^*(t) - \frac{x_1}{D} \psi_2^*(t),$$

$$T_1(l, t) = \frac{l-x_1}{D} \psi_2^*(t) - \frac{l-x_2}{D} \psi_1^*(t).$$

Wyliczając z układu równań (4.6) funkcje $\psi_1^*(t)$ i $\psi_2^*(t)$ i porównując je z odpowiednimi związkami wynikającymi z (3.6) łatwo zauważa się brak zgodności pomiędzy tymi związkami. Wynika stąd następujący warunek na dobór punktów x_1 i x_2 :

$$(4.7) \quad x_2 > \max\left(2x_1, \frac{l+x_1}{2}\right).$$

Przy spełnionym warunku (4.7) spełnione są następujące nierówności: $x_1/D < 1$, $(l-x_2)/D < 1$, $x_2/D < 2$, $(l-x_1)/D < 2$. Nierówność (4.7) potwierdza jeden z wniosków, wynikających z pracy [6], a mianowicie iż punktów x_1 i x_2 nie można wybierać w sposób zupełnie dowolny. Ponadto, porównując ograniczenia na dobór tych punktów wynikające z prac [6], [12] i nierówność (4.7), dochodzimy do wniosku, iż ograniczenia związane z doбором punktów x_1 i x_2 są zależne od rodzaju warunków panujących na brzegach rozważanego obszaru.

Założmy teraz, że znana jest *WOS*, tzn. że

$$(4.8) \quad q(x^*, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n^*}(x^*, t) = \Psi^*(x^*, t), \quad x^* \in \partial\Omega^*, \quad \Omega^* \subset \Omega,$$

oraz że na brzegu panują warunki I rodzaju. Funkcją poszukiwaną jest więc ponownie $T(\xi, t)$. Określa się ją i w tym wypadku wzorem (4.2), lecz gęstość potencjału cieplnego warstwy podwójnej, $f(\xi, t)$, jest tym razem rozwiązaniem równania całkowego postaci

$$(4.9) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial n^*} \int_0^t \int_S f(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(x^* - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau = \lambda \frac{\partial P}{\partial n^*}(x^*, t) + \Psi^*(x^*, t),$$

gdzie n^* jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega^*$.

Przyjmijmy teraz, że znana jest *WOT* i że jest ona opisana związkami (4.1), zaś na brzegu $S = \partial\Omega$ panują warunki II rodzaju. Funkcją poszukiwaną jest pochodna $\frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t)$, opisująca gradient temperatury na brzegu S . Funkcję tę można określić wzorem wynikającym z (3.8) w przypadku, gdy $\chi = 0$:

$$(4.10) \quad \frac{\partial T}{\partial n_\xi}(\xi, t) = \frac{\partial P}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \frac{1}{2} h(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau.$$

Do wyprowadzenia związku (4.10) wykorzystano wzór (2.7). Funkcja $h(\xi, t)$ jest rozwiązaniem następującego równania całkowego, wynikającego z (3.7):

$$(4.11) \quad \int_0^t \int_S h(\xi, \tau) w(x^* - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau = -P(x^*, t) + \psi^*(x^*, t).$$

Na zakończenie rozważań dotyczących postaci całkowej rozwiązań zagadnień odwrotnych założmy, że znana jest *WOT* i że jest ona postaci (4.1), zaś na brzegu $S = \partial\Omega$ panują mieszane warunki brzegowe, a mianowicie warunki dane związkami (3.10). Funkcjami poszukiwanymi są więc $T(\xi, t)$ dla $\xi \in S_1$ oraz $\Phi(\xi, t)$ dla $\xi \in S_2$. Funkcje te można określić następującymi wzorami:

$$(4.12) \quad T(\xi, t) = P(\xi, t) + V(\xi, t) - U(\xi, t) + \frac{1}{2}f(\xi, t),$$

$$(4.13) \quad \Phi(\xi, t) = \left[\frac{\partial}{\partial n_\xi} + \chi(\xi, t) \right] P(\xi, t) + \frac{1}{2}h(\xi, t) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n_\xi}(\xi, t) + \int_0^t \int_S h(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} w(\xi - \zeta, t - \tau) dS_\zeta d\tau + \\ + \chi(\xi, t)V(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial n_\xi} U(\xi, t) + \frac{1}{2} \chi(\xi, t)f(\xi, t) - \chi(\xi, t)U(\xi, t),$$

przy czym gęstości potencjałów cieplnych f i h spełniają związki (3.12) oraz równanie całkowe postaci

$$(4.14) \quad V(x^*, t) - U(x^*, t) = P(x^*, t) - T(x^*, t).$$

W przypadku jednowymiarowym zagadnienie to można zapisać następująco. Przyjmując, iż warunki brzegowe mają postać (3.14), a poszukiwanymi funkcjami są $\Phi_0(t)$ i $\psi_i(t)$, otrzymuje się — przy przyjęciu, że w punktach x_1 i x_2 określone są WOT — układ równań całkowych na funkcje $f_1(0, t)$, $h_1(l, t)$, $\Phi_0(t)$ i $\psi_i(t)$, składający się z równań (3.16), oraz równań wynikających z (3.15):

$$(4.15) \quad \frac{l-x_k}{2\kappa} \psi_i(t) * \frac{w_1(x_k-l, t)}{t} + \frac{x_k}{2\kappa} f_1(0, t) * \frac{w_1(x_k, t)}{t} - \chi_1(0, t) * w_1(x_k, t) + \\ + h_1(l, t) * w_1(x_k-l, t) + \Phi_0(t) * w_1(x_k, t) = \psi_k^*(t) - P_1(x_k, t), \quad k = 1, 2.$$

Otrzymany układ czterech równań całkowych można rozwiązać w dziedzinie transformat Laplace'a przy założeniu, iż $\chi(0, t) = \text{const} = \chi$. Otrzymujemy transformaty rozwiązań, $\bar{\psi}_i(s)$ i $\bar{\Phi}_0(s)$ w następującej postaci

$$(4.16) \quad \bar{\psi}_i(s) = \bar{P}_1(l, s) + \sum_{k=1}^2 (-1)^k [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] * \frac{\sinh \left[(l-x_{3-k}) \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right]}{\sinh \left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)}, \\ \bar{\Phi}_0(s) = - \sum_{k=1}^2 (-1)^k [\bar{\psi}_k^*(s) - \bar{P}_1(x_k, s)] * \\ * \frac{\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh \left(x_{3-k} \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) + \chi \sinh \left(x_{3-k} \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)}{\sinh \left(D \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)} - \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} - \chi \right) P_1(0, s).$$

Związki (4.16)₁ i (4.4)₂ mają tę samą postać; jest to zgodne z intuicją, gdyż odtwarzana jest tu temperatura na podstawie WOT. Natomiast $\bar{\Phi}_0(s)$ jest nieco bardziej złożona, aczkolwiek również nie następuje większych trudności przy retransformacji metodą podaną na początku tej części pracy.

Zauważmy jeszcze, że gdy $\chi \rightarrow 0$, tzn. gdy warunek brzegowy na brzegu $x = 0$ staje się warunkiem II rodzaju, otrzymujemy (kładąc w miejsce $\bar{\Phi}_0(s)$ transformatę $\bar{\Psi}_0(s)$) transformatę opisującą strumień ciepła na brzegu (z dokładnością do współczynnika λ), zaś przechodząc z do nieskończoności w ten sposób, aby $\bar{\Phi}_0(t)/\chi \rightarrow \psi_0(t)$, otrzymujemy na brzegu $x = 0$ warunek brzegowy I rodzaju, zaś transformata (4.16)₂ przyjmuje postać (4.4)₁.

5. Metoda przybliżonego rozwiązywania równań całkowych Voltery I rodzaju

Równania całkowe na gęstości potencjałów, (4.3), (4.9), (4.11) i inne, które pojawiają się podczas rozważań dotyczących trójwymiarowych zagadnień odwrotnych wymiany ciepła, mają — ogólnie rzecz biorąc — postać równania całkowego typu Voltery I rodzaju,

$$(5.1) \quad \int_S u(\zeta, t) * K(y - \zeta, t) dS_\zeta = v(y, t),$$

przy czym jądro tego równania całkowego, $K(y - x, t - \tau)$; oraz funkcja $v(y, t)$ są znane, zaś funkcją poszukiwaną jest $u(\zeta, t)$. W monografii [9] dowodzi się, że w przypadkach rozważanych w tej pracy jądro to jest iloczynem dwóch jąder słabo osobliwych, co pozwala znaleźć rozwiązanie tego równania metodą iteracji jąder i kolejnych przybliżeń. Metoda ta, aczkolwiek ścisła, jest dosyć mało przydatna w konkretnych obliczeniach. Dlatego pokrótce przedstawiamy metodę przybliżoną, pozwalającą w stosunkowo prosty sposób otrzymać przybliżone rozwiązanie równania (5.1).

Zapiszmy funkcję podcałkową następująco:

$$(5.2) \quad u(\zeta, t) * K(y - \zeta, t) = H(y, \zeta, t).$$

Zakładamy, iż funkcji $u(\zeta, t)$ poszukiwać będziemy w postaci przybliżonej. W związku

z tym przyjmijmy podział przedziału czasu $(0, T)$ na podprzedziały $\left(0, \frac{1}{2}\Delta\right)$, $\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta,$

$\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta\right)$, $i = 1, 2, \dots, I$, gdzie $\left(I + \frac{1}{2}\right)\Delta = T$. Na powierzchni S wybierzemy układ

punktów ζ_l , $l = 1, \dots, L$, stanowiących środki ciężkości elementów σ_l . Elementy skończone σ_l mogą mieć kształty np. trójkątów, [15]. Zakłada się, że są one rozłączne, mają wspólne krawędzie, wierzchołki ich są punktami należącymi do S , a cały zbiór elementów $\{\sigma_l\}_{l=1, \dots, L}$ stanowi powierzchnię Lapunowa, stanowiącą przybliżenie powierzchni S . Natomiast na powierzchni $\partial\Omega^*$ wybierzemy zbiór punktów y_m , $m = 1, \dots, L$, stanowiących środki ciężkości elementów Λ_m , dobranych w sposób analogiczny jak elementy σ_l .

Zakładamy, iż zamiast funkcji $u(\zeta, t)$ poszukiwać będziemy jej przybliżonej postaci $Au(\zeta, t)$, określonej następująco:

$$(5.3) \quad Au(\zeta, t) = \sum_{i=1}^{I+1} [u_i(\zeta) - u_{i-1}(\zeta)] \eta \left(t - \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta \right),$$

gdzie

$$(5.4) \quad u_i(\zeta) = \sum_{l=1}^L u_{il} E_{\sigma, l}(\zeta), \quad i = 1, \dots, I, \quad u_0(\zeta) = \varphi(\zeta),$$

$$u_{I+1}(\zeta) = u_I(\zeta).$$

Funkcję $E_{\sigma, l}(\zeta)$ definiujemy następująco:

$$(5.5) \quad E_{\sigma, l}(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \zeta \notin \sigma_l, \\ 1 & \text{gdy } \zeta \in \sigma_l. \end{cases}$$

Podobnie przybliżamy postać jądra $K(y - \zeta, t)$:

$$(5.6) \quad AK(y - \zeta, t) = \sum_{i=1}^{I+1} [K_i(y, \zeta) - K_{i-1}(y, \zeta)] \eta \left(t - \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta \right),$$

gdzie $K_i(y, \zeta) = K(y - \zeta, i\Delta)$, $i = 1, \dots, I$, $K_0(y, \zeta) = 0$ (por. [10], s. 346), $K_{I+1}(y, \zeta) = K_I(y, \zeta)$.

Przybliżoną postać funkcji $H(y, \zeta, \tau)$ nazwiemy $AH(y, \zeta, t)$.

Podstawiając do równania (5.2) w miejsce występujących tam funkcji ich postaci przybliżone, znajdujemy, iż

$$(5.7) \quad AH(y, \zeta, t) = \sum_{i=1}^{I+1} H_k(y, \zeta) (t - k\Delta)_+,$$

gdzie

$$(5.8) \quad H_k(y, \zeta) = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_i(\zeta) - u_{i-1}(\zeta)] [K_j(y, \zeta) - K_{j-1}(y, \zeta)],$$

oraz $(t - k\Delta)_+ = (t - k\Delta) \eta(t - k\Delta)$. Wprowadzając związki

$$(5.9) \quad H_k(y, \zeta) = \sum_{l=1}^L H_{kl}(y) E_{\sigma, l}(\zeta), \quad \text{oraz}$$

$$\hat{K}_j(y, \zeta) = \sum_{l=1}^L K_{jl}(y) E_{\sigma, l}(\zeta),$$

gdzie $K_{il}(y) = K_j(y, \zeta_l)$, a funkcja \hat{K}_j stanowi pewne przybliżenie funkcji K_j , oraz podstawiając prawe strony wzorów (5.9) w miejsce H_k i K_j do związku (5.8) przy wykorzystaniu (5.4), znajdujemy

$$(5.10) \quad H_{kl}(y) = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_{il} - u_{i-1, l}] [K_{jl}(y) - K_{j-1, l}(y)],$$

$$k = 1, \dots, I+1,$$

$$l = 1, \dots, L.$$

Kładąc ponadto

$$(5.11) \quad H_{kl}(y) = \sum_{m=1}^L H_{klm} E_{\lambda, m}(y),$$

$$\hat{K}_{jl}(y) = \sum_{m=1}^L K_{jlm} E_{\lambda, m}(y),$$

gdzie $K_{jlm} = K_{jl}(y_m)$, a funkcja \hat{K}_{jl} stanowi przybliżenie funkcji K_{jl} , oraz podstawiając prawe strony wzorów (5.11) w miejsce H_{kl} i K_{jl} do związku (5.10), znajdujemy

$$(5.12) \quad H_{klm} = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_{il} - u_{l-1, i}] [K_{jlm} - K_{j-1, lm}],$$

$$k = 1, \dots, I+1$$

$$l, m = 1, \dots, L.$$

Równanie (5.1), które dzięki wprowadzeniu funkcji H można zapisać w postaci

$$(5.13) \quad \int_S H(y, \zeta, t) dS_{\zeta} = v(y, t),$$

zapiszemy teraz w postaci przybliżonej. Wprowadzając funkcję Av , aproksymującą v w sposób następujący:

$$(5.14) \quad Av(y, t) = \sum_{k=1}^{I+1} \sum_{m=1}^L v_{km} (t - k\Delta)_+ E_{\lambda, m}(y),$$

oraz wykorzystując związki (5.9), (5.11), (5.12), (5.13) i wstawiając w (5.13) funkcję Av w miejsce v otrzymuje się ostatecznie następujący układ równań na wielkości u_{il} :

$$(5.15) \quad \sum_{l=1}^L B_l \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \in \{1, \dots, I\}}} [u_{il} - u_{l-1, i}] [K_{jlm} - K_{j-1, lm}] = v_{km},$$

gdzie $B_l = \int_{\sigma_l} d\sigma_l$, $k = 1, 2, \dots, I+1$, $m = 1, 2, \dots, L$. Jest to I układów równań, każdy z L niewiadomymi, którymi są wielkości u_{il} . Wyznaczenie tych wielkości pozwala następnie zbudować funkcję $Au(\xi, \tau)$ wg wzorów (5.3) i (5.4).

Podsumowanie

Wykorzystanie potencjałów cieplnych do budowy całkowitej postaci rozwiązań problemów odwrotnych wymiany ciepła pozwala rozwiązywać zagadnienia odwrotne w przestrzeni trójwymiarowej przy dowolnych kształtach rozpatrywanych ciał. Oznacza to możliwość prognozowania obciążeń termicznych elementów maszyn cieplnych w ten sposób, aby wewnątrz tych elementów panowały temperatury o z góry danym na dowolnej powierzchni zawartej wewnątrz tego elementu, $\partial\Omega^*$, rozkładzie. Możliwość ta może zostać wykorzystana w praktyce np. przy optymalizowaniu czasu rozruchu turbin cieplnych, gdyż

od rozkładu temperatury wewnątrz łopatek zależą powstające w nich naprężenia termiczne, mogące — w przypadkach szczególnie niekorzystnych — spowodować trwałe ich uszkodzenia.

Przedstawiona procedura przybliżonego rozwiązywania równań całkowych na gęstości potencjałów wymaga użycia maszyn cyfrowych. Tym niemniej w dobie szybkiego rozwoju elektronicznej techniki obliczeniowej rozwiązywanie na maszynach cyfrowych układów równań typu (5.15) nie przedstawia większych trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. M. M. LAVRENTIEV, V. G. ROMANOV, V. G. VASILIEV, *Multidimensional inverse problems for differential equations*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
2. A. G. TEMKIN, *Obratnyje metody teploprovodnosti*, Izd. Energia, Moskwa, (1963).
3. M. I. IMANALIEV, *Metody rešenija nelinejnych obratnych zadač i ich prilozhenie*, Izd. Ilim, Frunze, (1977).
4. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, *Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd literatury*, Mech. Teoret. Stos., **18**, 4, 535 - 554 (1980).
5. R. G. HILLS, G. P. MULHOLLAND, *The accuracy and resolving power of one dimensional transient inverse heat conduction theory as applied to discrete and inaccurate measurements*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, 8, 1221 - 1229 (1979).
6. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, H. KAMIŃSKI, *On a certain inverse temperature field problem of the theory of thermal stresses*, Nucl. Eng. Design, **64**, 2, 169 - 184 (1981).
7. M. IMBER, *Temperature extrapolation mechanism for two-dimensional heat flow*, AIAA Journal, **12**, 8, 1089 - 1093 (1974).
8. M. IMBER, *Two-dimensional inverse conduction problem — further observations*, AIAA Journal, **13**, 1, 114 - 115 (1975).
9. A. PISKOREK, *Równania całkowe*, WNT Warszawa, (1971).
10. H. MARCINKOWSKA, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN Warszawa, (1972).
11. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, (1972).
12. M. IMBER, J. KHAN, *Prediction of transit temperature distribution with embedded thermocouples*, AIAA Journal, **10**, 6, 784 - 789, (1972).
13. K. GRYSA, J. J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych, pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos., **16**, 3, 299 - 319 (1978).
14. K. GRYSA, H. KAMIŃSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów trygonometrycznych, występujących w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, ZNPP s. Mechanika, Nr 16, 85 - 97 (1980).
15. J. DECLoux, *Metod konečnych elementov*, Izd. Mir, Moskwa, 1976.

Р е з ю м е

О МЕТОДАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛОВ В РАЗРЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассуждается трехмерную обратную задачу теплопроводности. Используя термические потенциалы получены результаты в виде интегральных уравнений. Для одномерных случаев представлены решения в виде бесконечных рядов. Для интегральных уравнений описывающих обратные задачи в трехмерном случае показана путь определения решений в приближенном виде.

S u m m a r y

ON METHODS OF THE THEORY OF POTENTIALS IN RESOLVING THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

The three-dimensional inverse heat conduction problems are dealt with. Making use of the thermal potentials one obtains the results in the form of the integral equations. For the one-dimensional cases the solutions have been found in a form of the infinite series. For the integral equations describing the inverse problems in the three-dimensional case a way of determining an approximate form of solution is shown.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1982 roku