

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W MECHANICE KONTINUUM AKTUALNE KIERUNKI BADAŃ

MICHAŁ KLEIBER

IPPT PAN

1. Wprowadzenie

W pracy dokonujemy przeglądu aktualnych kierunków badań związanych z zastosowaniami metody elementów skończonych (MES) w mechanice kontinuum. Nacisk położony jest na problematykę nieliniową.

Przegląd niniejszy ma charakter wybitnie subiektywny i nie pretenduje do miana kompletnego opracowania tematu — ze względu na obserwowany aktualnie burzliwy rozwój MES i dziedzin pokrewnych, dokonanie pełnego przeglądu odnośnej problematyki nie wydaje się obecnie w ogóle możliwe.

Gwałtowny rozwój MES zilustrować można przytaczając liczby prac z tego zakresu uwzględnionych w publikowanych kilkakrotnie wykazach zbiorczych:

- rok 1969 — liczba cytowań 775, [1],
- rok 1972 — liczba cytowań 1096, [2],
- rok 1974 — liczba cytowań 2800, [3],
- rok 1975 — liczba cytowań 3800, [4],
- rok 1976 — liczba cytowań 7115, [5].

Trend ten ilustrowany jest także liczbą monografii i podręczników z zakresu MES, wydanych w ostatnich latach na świecie, [6 - 46], oraz dostępnych w języku polskim, [47 - 54].

Można bezpiecznie założyć, że obecnie bibliografia MES liczy kilkadziesiąt tysięcy pozycji — przy zachowaniu obecnego tempa rozwoju liczba ta zwielokrotni się w ciągu najbliższych lat. Zrozumiałe jest więc, że w niniejszej pracy nie podejmujemy beznadziejnego zadania dokonania jakiegokolwiek zbiorczego przeglądu opublikowanych artykułów. Zamiast tego ograniczymy się do wskazania zasadniczych, w odczuciu autora, kierunków rozwoju MES, przytaczając jedynie te pozycje bibliograficzne (monografie i prace szczegółowe o większym znaczeniu), które posłużyć mogą za drogowskazy w ewentualnej samodzielnej pracy.

Aktualną tematykę badań w zakresie podstaw teoretycznych i zastosowań MES w mechanice kontinuum podzielić można na następujące grupy:

- a) Wariacyjne podstawy metody,
- b) Konstruowanie nowych elementów skończonych,

- c) Formułowanie zagadnień brzegowo — początkowych mechaniki w aspekcie stosowania MES,
- d) Algorytmy numeryczne,
- e) Przetwarzanie danych i tworzenie oprogramowania.

Poniżej wyjaśniamy szerzej co rozumiemy pod tymi pojęciami. Zauważmy na razie, że podział powyższy podyktowany został jedynie wygodą prezentacji omawianej tematyki i nie ma w najmniejszym stopniu charakteru zasadniczego. Innymi słowy, wiele istniejących prac nie udałooby się zakwalifikować ściśle do jednej tylko z wymienionych grup, prace te dotyczą bowiem zazwyczaj zagadnień obszerniejszych.

2. Wariacyjne podstawy metody

Rozpatrzmy zagadnienie nieliniowej statyki dla ciała zajmującego w konfiguracji odniesienia obszar Ω o brzegu $\partial\Omega = \partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u$, na którego wyróżnionych częściach zadane są odpowiednio naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe. Przyjmijmy, że wszystkie występujące w rozpatrywanym problemie funkcje parametryzowane są za pomocą monotonicznie rosnącego w procesie deformacji parametru τ , zwanego dalej dla prostoty czasem. Załóżmy dalej, że znamy w pełni przebieg procesu deformacji (tj. rozwiązanie odpowiedniego problemu brzegowego) od chwili początkowej $\tau = t_0$ do chwili „aktualnej” $\tau = t$, poszukujemy zaś rozwiązania dla chwili następnej $t + \Delta t$, niezbyt odległej od chwili t . Takie sformułowanie, zwane przyrostowym, jest bardzo wygodne i powszechnie stosowane w numerycznej analizie problemów nieliniowej mechaniki. Ponieważ chwila t jest chwilą typową (tj. niczym nie wyróżnioną wśród innych wartości parametru τ), sformułowanie przyrostowe umożliwia śledzenie rozwiązania metodą krok — po — kroku w całym interesującym nas przedziale zmienności parametru τ , $\tau \in [t_0, t^*]$.

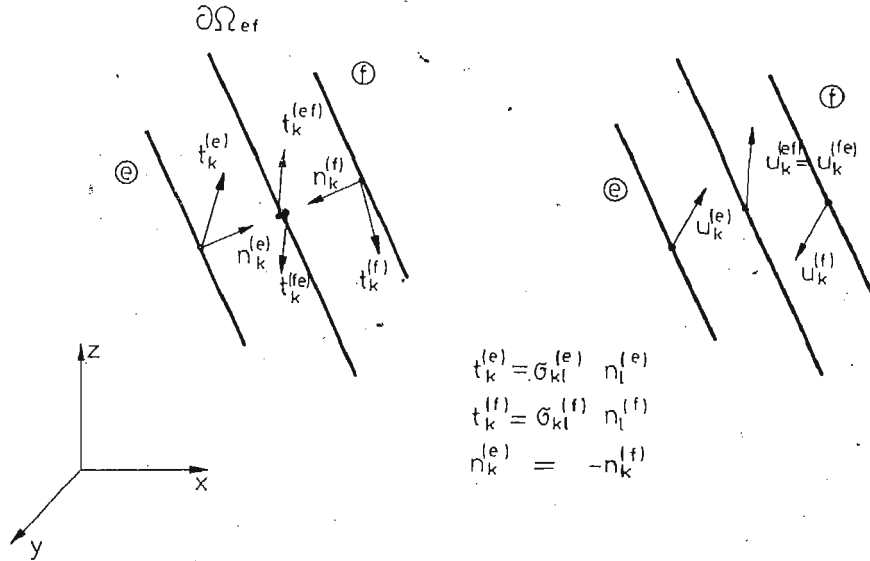
W odniesieniu do stałego w czasie (przynajmniej na rozpatrywanym kroku $t \rightarrow t + \Delta t$) kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych podstawowy układ równań zlinearyzowanego na kroku problemu przyrostowego ma postać, [47]

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{kl,l} + \rho\Delta f_k &= 0, \quad x \in \Omega \\ \Delta\tilde{\sigma}_{kl} &= \frac{\partial W}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}} = C_{klmn}\Delta\varepsilon_{mn}, \quad x \in \Omega, \\ \Delta\varepsilon_{kl} &= \frac{1}{2}(\Delta u_{k,l} + \Delta u_{l,k} + u_{l,k}\Delta u_{l,l} + \Delta u_{l,k}u_{l,l}), \quad x \in \Omega, \\ \Delta\sigma_{kl}n_l &= \Delta\hat{t}_k, \quad x \in \partial\Omega_\sigma, \\ \Delta u_k &= \Delta\hat{u}_k, \quad x \in \partial\Omega_u, \end{aligned}$$

gdzie symbol „ Δ ” oznacza przyrost danej funkcji od chwili t do chwili $t + \Delta t$, σ_{kl} , $\tilde{\sigma}_{kl}$ są składowymi odpowiednio pierwszego (niesymetrycznego) i drugiego (symetrycznego) tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa na konfiguracji odniesienia w chwili $\tau = t_0$, $\rho\Delta f_k$ i $\Delta\hat{t}_k$ są wektorami obciążeń typu masowego i powierzchniowego, W jest przyrostowym potencjałem definiującym rozpatrywany materiał (sprężysty lub niesprężysty), ε_{kl} są składowymi tensora odkształcenia Greena, u_k i Δu_k są składowymi wektorów przemieszczeń

odpowiednio od t_0 do t oraz od t do $t + \Delta t$ zaś n_k oznacza składowe wektora normalnego od brzegu ciała.

• Dzieląc myślowo obszar Ω na E rozłącznych elementów skończonych przyjmujemy dla zapewnienia sobie odpowiedniej ogólności, że na brzegach międzyelementarnych nie są spełnione żadne warunki zgodności dla wektorów przyrostu przemieszczenia Δu_k oraz przyrostu naprężenia $\Delta t_k = \Delta \sigma_{kl} n_l$, gdzie n_k jest teraz wektorem normalnym do rozpatrywanego brzegu międzyelementowego. Zgodnie z rys. 1, na typowym odcinku brzegu



Rys. 1

rozgraniczającego elementy „e” i „f”, $e, f = 1, \dots, E$ rozpatrywać będziemy jako niezależne od siebie funkcje $\Delta u_k^{(e)}$, $\Delta u_k^{(ef)} = \Delta u_k^{(fe)}$, $\Delta u_k^{(f)}$ oraz funkcje $\Delta t_k^{(e)}$, $\Delta t_k^{(ef)}$, $\Delta t_k^{(fe)}$, $\Delta t_k^{(f)}$. Oznaczając dodatkowo symbolem Δt_k przyrost reakcji na brzegu $\partial\Omega_u$ zaś symbolami $\Delta \check{t}_k$, $\Delta \check{u}_k$ zdefiniowane na wszystkich brzegach międzyelementowych wektory przyrostów wzajemnych oddziaływań oraz przemieszczeń (którymi na brzegu między elementami „e” i „f” są $\Delta t_k^{(ef)}$ i $\Delta u_k^{(ef)}$) zapiszmy ogólną postać pewnego funkcjonału wariacyjnego jako

$$(2.2) \quad J[\Delta u_k, \Delta \varepsilon_{kl}, \Delta t_k, \Delta \check{t}_k, \Delta \check{u}_k] = \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{2} C_{klmn} \Delta \varepsilon_{kl} \Delta \varepsilon_{mn} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} - \rho \Delta f_k \Delta u_k - \Delta \check{\sigma}_{kl} \left[\Delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} (\Delta u_{k,i} + \Delta u_{i,k} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + u_{i,k} \Delta u_{l,i} + \Delta u_{l,k} u_{i,l}) \right] \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,\sigma}} \Delta \hat{t}_k \Delta u_k d(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega_{e,u}} \Delta t_k (\Delta u_k - \hat{u}_k) d(\partial\Omega) + \right. \\ \left. - \sum_{f=1}^{E(e)} \int_{\partial\Omega_{ef}} \Delta \check{t}_k (\Delta u_k^{(e)} - \Delta \check{u}_k) d(\partial\Omega) \right\},$$

gdzie Ω_e , $\partial\Omega_{ef}$, $\partial\Omega_{e,\sigma}$, $\partial\Omega_{e,u}$ są danymi w konfiguracji odniesienia odpowiednio obszarem zajmowanym przez element e -ty, brzegiem między elementami „ e ” i „ f ” oraz tymi częściami brzegu $\partial\Omega_e$ elementu e -tego, które są jednocześnie brzegami całego układu $\partial\Omega_\sigma$, $\partial\Omega_u$, zaś $E_{(e)}$ jest liczbą elementów sąsiadujących z elementem e -tym.

Można bez trudu wykazać, że warunki stacjonarności funkcjonału (2.2) (tj. jego równania Eulera) mają postać równań (2.1) oraz, dodatkowo, równań

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Delta t_k &= \Delta \sigma_{ki} n_i, & x \in \partial\Omega_u, \\ \Delta t_k^{(e)} &= \Delta t_k^{(ef)}, & x \in \partial\Omega_{ef}, \\ \Delta t_k^{(ef)} &= -\Delta t_k^{(fe)}, & x \in \partial\Omega_{ef}, \\ \Delta u_k^{(e)} &= \Delta u_k^{(ef)}, & x \in \partial\Omega_{ef}. \end{aligned}$$

Funkcjonał (2.2) stanowi podstawę najogólniejszej zasady wariacyjnej stosowanej do otrzymania dyskretyzowanych modeli mechaniki. Na podstawie różnych przypadków szczególnych tego funkcjonału, otrzymywanych poprzez postulowanie a priori pewnych z równań (2.1), (2.3), otrzymać można wszystkie znane modele MES dla zagadnień nieliniowej statyki. W szczególności, tzw. zgodny model przemieszczeniowy otrzymywany jest na bazie funkcjonału o postaci

$$(2.4) \quad J_P[\Delta u_k] = \sum_{e=1}^E \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} - \rho \Delta f_k \Delta u_k \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega_{e,\sigma}} \Delta t_k \Delta u_k d(\partial\Omega) \right],$$

którego stacjonarność, po wykorzystaniu odpowiednich założeń dyskretyzacyjnych, prowadzi do podstawowego układu równań algebraicznych modelu MES o postaci

$$(2.5) \quad K_{\alpha\beta} \Delta r_\beta = \Delta R_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N,$$

w którym

$$(2.6) \quad K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^{(\text{kon.})} + K_{\alpha\beta}^{(e)} + K_{\alpha\beta}^{(u)}$$

jest macierzą sztywności układu dyskretyzowanego, $K_{\alpha\beta}^{(\text{kon.})}$, $K_{\alpha\beta}^{(e)}$, $K_{\alpha\beta}^{(u)}$ są odpowiednio macierzami sztywności konstytutywnej, początkowych naprężeń oraz początkowych przemieszczeń, zaś Δr_α , ΔR_α są wektorami uogólnionych przemieszczeń węzłów układu i uogólnionych sił zewnętrznych działających na te węzły.

Omówienie innych modeli MES (takich jak modele: mieszany, hybrydowy, przemieszczeniowy I, hybrydowy przemieszczeniowy II, hybrydowy przemieszczeniowy III, równowagi I, równowagi II, hybrydowy naprężeniowy, zmodyfikowany hybrydowy naprężeniowy) zamieszczono np. w monografii [47] oraz w artykułach [56, 57], w których podano obszerne bibliografie zawierające oryginalne prace z zakresu uogólnionych modeli MES.

Dotychczas omawialiśmy wariacyjne aspekty tworzenia modeli MES dla nieliniowych zagadnień statyki kontinuum. W zagadnieniach nieliniowej dynamiki wariacyjne podstawy metod przybliżonego rozwiązywania problemów brzegowo-początkowych są opracowane

równie dobrze, [58, 47, 48]. W szczególności, odpowiednikiem podejścia opartego na funkcjonale J_p jest tzw. zasada Hamiltona o postaci

$$(2.7) \quad \delta \int_{t_0}^{t_0} (T - J_p) d\tau = 0$$

gdzie T jest kinematyczną energią ciała, zaś τ jest czasem rzeczywistym. Wykorzystanie zasady (2.7) oraz standardowych założeń aproksymacyjnych zgodnego, przemieszczeniowego modelu MES prowadzi w ujęciu przyrostowym do przestrzennie dyskretyzowanych równań ruchu o postaci

$$(2.8) \quad M\Delta\ddot{r} + K_t\Delta r = \Delta R,$$

lub, po dodatkowym uwzględnieniu sił tłumienia, do równań ruchu o postaci, [94, 70, 47]

$$(2.9) \quad M\Delta\ddot{r} + C\Delta\dot{r} + K_t\Delta r = \Delta R,$$

gdzie M i C są odpowiednio macierzami masy i tłumienia układu dyskretyzowanego zaś, zgodnie ze stosowaną tu koncepcją opisu

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \Delta\ddot{r} &= \ddot{r}_{t+\Delta t} - \ddot{r}_t, \\ \Delta\dot{r} &= \dot{r}_{t+\Delta t} - \dot{r}_t, \\ \Delta r &= r_{t+\Delta t} - r_t, \end{aligned}$$

przy czym przyjęliśmy tu uproszczoną notację $r_t = r(t)$, itp. Równanie ruchu (2.9) zapisujemy zazwyczaj jako

$$(2.11) \quad M\ddot{r}_{t+\Delta t} + C\dot{r}_{t+\Delta t} + K_t\Delta r = \Delta R + M\dot{r}_t + C\dot{r}_t,$$

lub jako

$$(2.12) \quad M\ddot{r}_{t+\Delta t} + C\dot{r}_{t+\Delta t} + K_t\Delta r = R_{t+\Delta t} - F_t,$$

gdzie F_t jest wektorem tzw. węzłowych sił wewnętrznych w chwili t tj. na początku rozpatrywanego kroku po czasie.

Zauważmy, że otrzymany tu ostateczny układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych (2.12) odpowiada zastosowaniu tzw. przestrzennie dyskretyzowanego modelu MES. Istnieje jednakże alternatywna możliwość zastosowania aproksymacji czaso-przestrzennej, w wyniku której otrzymuje się zamiast (2.12) od razu odpowiednio większy układ równań algebraicznych. Metoda ta, zwana metodą elementów czaso-przestrzennych, opisana została w pracach [60 - 62].

3. Konstruowanie nowych elementów skończonych

Tematyka ta, zasadnicza dla MES z punktu widzenia dokładności uzyskiwanych rozwiązań, jest przedmiotem obszernych rozważań każdego z wymienionych wyżej opracowań książkowych, w szczególności polecić tu można monografie [7, 16, 20, 28, 46]. Jawne postaci macierzy charakteryzujących mechaniczne własności elementów skończonych zależą w ogólności od:

— rodzaju zastosowanego sformułowania wariacyjnego,

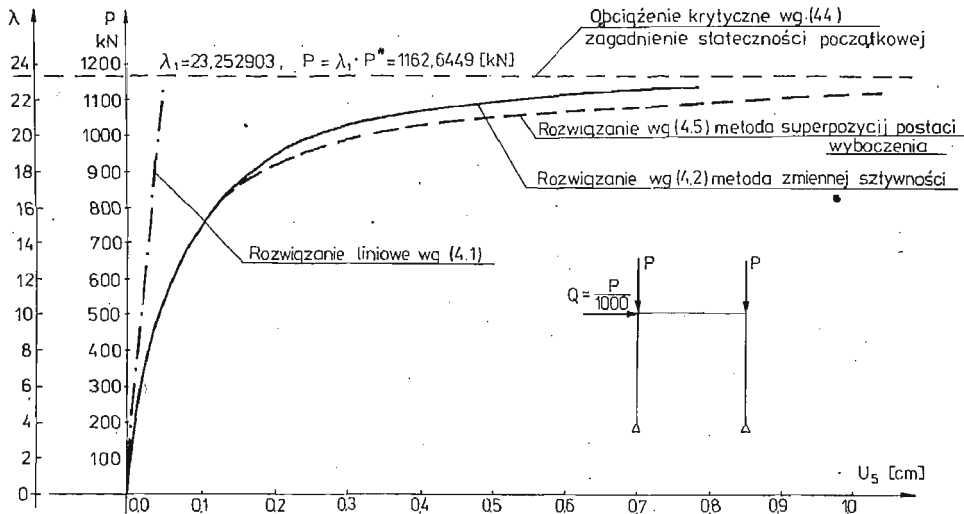
- rodzaju zagadnienia (problemy trójwymiarowe, płyty, belki itp),
- stopnia zastosowanej aproksymacji wielomianowej.

Bardzo istotną rolę odgrywają obecnie elementy skończone o brzegach krzywoliniowych (w szczególności: elementy izoparametryczne), [63]. Wymagają one z zasady stosowania procedur całkowania numerycznego przy obliczaniu macierzy elementowych, są jednak bardzo efektywne i nadają się znakomicie do włączania w całkowicie zautomatyzowany proces obliczeniowy właściwy MES.

Obszerny przegląd opracowanych dotychczas elementów skończonych zawarty jest w pracy [64].

4. Formułowanie zagadnień brzegowo-początkowych mechaniki w aspekcie stosowania MES

Umiejętność konstruowania różnych ogólnych modeli oraz istnienie efektywnych algorytmów numerycznych nie przesądza oczywiście o efektywności odpowiedniego podejścia i istniejących programów w konkretnym problemie praktycznym. Doświadczenia obliczeniowe uzyskane na gruncie rozwiązywania różnorodnych zagadnień mechaniki pozwalają bowiem często na wprowadzenie tak istotnych uproszczeń do ogólnie sformułowanego zadania mechaniki, że może to zasadniczo zmienić rozmiar zadania i koszt dokonania obliczeń. Tę rozległą problematykę zilustrujemy na przykładzie ramy pokazanej na rys. 2, dla której chcemy określić wielkość deformacji (oraz towarzyszące im napręże-



Rys. 2

nia) przy proporcjonalnie narastających obciążeniach statycznych. Przed przystąpieniem do budowy modelu MES zdecydować musimy, czy będzie to model liniowy czy też model nieliniowy. Model liniowy sprowadza problem do rozwiązania układu równań

$$(4.1) \quad K_{\alpha\beta}^{(s)} r_{\beta} = R_{\alpha},$$

przy czym $K_{\alpha\beta}^{(s)}$ jest macierzą sztywności sprężystej ramy, podczas gdy w ramach modelu nieliniowego rozwiązań należy wielokrotnie układać równań

$$(4.2) \quad [K_{\alpha\beta}^{(kon.)} + K_{\alpha\beta}^{(s)} + K_{\alpha\beta}^{(u)}] \Delta r_{\beta} = \Delta R_{\alpha},$$

odpowiadający linearyzacji problemu na kolejnym kroku przyrostowym.

Istnieją jednakże jeszcze inne możliwości otrzymania wyników mogących interesować inżyniera. W ramach podejścia zwanego analizą stateczności zlinearyzowanej rozwiązujemy mianowicie uogólniony problem własny postaci

$$(4.3) \quad \{K_{\alpha\beta}^{(s)} + \lambda[K_{\alpha\beta}^{(s)}(\sigma_y^*) + \bar{K}_{\alpha\beta}^{(u)}(r_{\gamma}^*)]\} v_{\beta} = 0,$$

zaś zagadnienie tzw. stateczności początkowej prowadzi do problemu własnego postaci

$$(4.4) \quad [K_{\alpha\beta}^{(s)} + \lambda K_{\alpha\beta}^{(s)}(\sigma_y^*)] v_{\beta} = 0,$$

gdzie przez σ_y^* , r_{α}^* oznaczyliśmy stan naprężenia i przemieszczenia w ramie odpowiadające „liniowo” pewnemu dowolnemu testowemu obciążeniu R_{α}^* , λ jest parametrem proporcjonalnego obciążenia zewnętrznego, tj. $R_{\alpha} = \lambda R_{\alpha}^*$, $\bar{K}_{\alpha\beta}^{(u)}$ oznacza liniową (względem r_{α}) część macierzy początkowych przemieszczeń $K_{\alpha\beta}^{(u)}$ zaś v_{α} jest wektorem postaci wybojenowej odpowiadającym krytycznej wartości parametru $\lambda = \lambda_{kr}$.

Inną od wszystkich wymienionych wyżej możliwością analizy rozpatrywanej ramy jest podejście, w którym nieliniową zależność przemieszczenia r od parametru obciążenia λ dana jest wzorem [65, 66]

$$(4.5) \quad r_{\alpha}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^K \lambda(\lambda_{\alpha} - \lambda)^{-1} v_{\beta(\alpha)} v_{\alpha(\alpha)}^t R_{\beta}^*,$$

w którym $(\lambda_1, v_{\alpha(1)})$, $(\lambda_2, v_{\alpha(2)})$, ..., $(\lambda_k, v_{\alpha(k)})$ są paroma pierwszymi rozwiązaniami problemu własnego (4.4), zaś wzór (4.5) obowiązuje dla $\lambda < \lambda_1$. Istnieją oczywiście jeszcze inne sposoby analizy rozpatrywanej ramy. Wyniki otrzymane za pomocą niektórych z wymienionych wyżej metod zamieściliśmy na rys. 2.

Widzimy, że sposób sformułowania zagadnienia mechaniki bardzo istotnie wpływa na dobór odpowiedniego modelu MES i właściwej mu techniki numerycznej. Przystępując do przybliżonego rozwiązywania jakiegokolwiek zagadnienia brzegowo-początkowego mechaniki kierujemy się zawsze dwojakim celem: osiągnięciem możliwie wysokiej dokładności uzyskiwanych aproksymacji oraz otrzymaniem rozwiązania we względnie prosty sposób. Wymagania te są jednak przeciwstawne — zadawałamy się więc zazwyczaj rozważaniami umożliwiającymi przynajmniej rozsądne sterowanie prostotą procedur i dokładnością wyników, zależnie od naszych konkretnych potrzeb i możliwości obliczeniowych. Ten wybór modelu dyskretyzowanego stanowi bardzo istotny aspekt zastosowań MES — bardzo wiele prac badawczych skoncentrowanych jest obecnie na analizie modeli MES z uwzględnieniem uproszczeń możliwych do wprowadzenia w wyjściowym modelu układu kontynualnego. Umożliwia to bowiem łączenie posiadanych doświadczeń i wiadomości dotyczących poszukiwanego rozwiązania z automatyczną procedurą dokonującą reszty, tj. wykonującą obliczenia numeryczne. Zapewnia to wysoką efektywność podejścia pozostawiając do zrobienia odpowiednio człowiekowi i maszynie cyfrowej to, co jest im obecnie najbardziej właściwe: niezależne, krytyczne myślenie oraz szybkość wykonywania powtarzalnych, zalgorytmizowanych operacji algebraicznych.

Sposób formułowania problemów brzegowo-początkowych mechaniki wywiera, jak widzimy na powyższym przykładzie, istotny wpływ na wybór odpowiedniej techniki numerycznej. Jednocześnie złożoność (czy prostota) odpowiednich istniejących algorytmów wpływać powinna również na sposób sformułowania problemu mechaniki — niezwykle waga tego wzajemnego sprzężenia zadecydowała o wyróżnieniu tej problematyki w osobnym podrozdziale niniejszego przeglądu.

5. Algorytmy numeryczne

Istotnym czynnikiem oceny przydatności danego modelu MES jest efektywność zastosowanego w zrealizowanym programie algorytmu numerycznego służącego rozwiązywaniu układów równań algebraicznych (2.5) (w przypadku zagadnień statycznych) lub układów równań różniczkowych (2.12) (w przypadku zagadnień dynamicznych).

Wśród metod rozwiązywania problemów dynamiki zasadniczą rolę odgrywają: metoda superpozycji modalnej oraz metody bezpośredniego całkowania.

Metoda superpozycji modalnej w zastosowaniu do zagadnień liniowych ma charakter standardowy, [67] i nie wymaga komentarza. Wbrew pozorom (superpozycja!), metoda ta okazała się przydatna również w zagadnieniach nieliniowych, [68, 69].

Stosując metody bezpośredniego całkowania, polegające na wykorzystaniu w równaniu (2.12) różnicowych aproksymacji wektorów prędkości \dot{r} i przyspieszenia \ddot{r} , otrzymujemy odpowiednie układy równań algebraicznych względem poszukiwanego wektora Δr .

Rozróżniamy dwie zasadnicze grupy metod bezpośredniego całkowania:

— metody jawne, bazujące na wykorzystaniu do obliczenia wektora warunków dynamicznej równowagi układu w chwili t i opisywane w ogólności związkiem

$$(5.1) \quad (\alpha M + \beta C) \Delta r = \Delta R^{(\text{eff.})},$$

oraz

— metody niejawne, bazujące na warunkach dynamicznej równowagi układu w chwilach $\tau = \bar{t}$, „późniejszych” niż t (np. $\bar{t} = t + \Delta t$) i opisywane w ogólności związkiem

$$(5.2) \quad (\gamma M + \delta C + \eta K_{\bar{t}}) \Delta r = \Delta \bar{R}^{(\text{eff.})}.$$

Współczynniki α , β , γ , δ , η jak również wektory obciążenia efektywnego $\Delta R^{(\text{eff.})}$, $\Delta \bar{R}^{(\text{eff.})}$ zależą od zastosowanej różnicowej aproksymacji pochodnych względem czasu. Zauważmy, że metody niejawne, wymagające spełnienia równań równowagi dynamicznej w chwili, dla której nie znamy rozwiązania (a tym samym konfiguracji układu), pociągają za sobą konieczność stosowania procesu iteracyjnego. Zauważmy także, że w przypadku zastosowania diagonalnych macierzy masy i tłumienia algorytmy typu jawnego prowadzą do niezwykle prostej postaci układu równań — poszczególne równania są bowiem od siebie niezależne. Jest to oczywiście olbrzymią zaletą tych metod. Wadą ich jest jednak ich tylko warunkowa stabilność, co powoduje silne ograniczenie długości kroku po czasie i zwiększa koszt rozwiązania.

Obszerna analiza metod rozwiązywania zagadnień nieliniowej dynamiki wraz z analizą stabilności i dokładności odpowiednich algorytmów zawarta jest w pracach [8, 9, 48].

Zauważmy dalej, że dla $M = 0$, $C = 0$ algorytm całkowania niejawnego nadaje się do analizy zagadnień statyki.

Podstawową czynnością, jaką wykonać należy w ramach algorytmu całkowania niejawnego jest rozwiązywanie układu liniowych równań algebraicznych (5.2). Metody te, w kontekście zastosowań MES, opisane są szeroko we wszystkich opracowaniach książkowych wymienionych w Bibliografii. Jak już wspominaliśmy, po rozwiązaniu układu (5.2) należy zastosować odpowiedni proces iteracyjny pozwalający na spełnienie z żadaną dokładnością równań ruchu (5.2) w założonej chwili \bar{t} . Zazwyczaj stosowane są w tym celu różne wersje klasycznej metody iteracji Newtona-Raphsona, które w odniesieniu do równania (2.12), spełnianego przykładowo w chwili $\bar{t} = t + \Delta t$, opisać można związkami

$$(5.3) \quad M\dot{r}_{t+\Delta t}^{(i)} + C r_{t+\Delta t}^{(i)} + K_{t+\Delta t}^{(i)} \delta r^{(i+1)} = R_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t}^{(i)},$$

gdzie (i) oznacza kolejną, typową pętlę iteracyjną zaś „poprawka” rozwiązania $\delta r^{(i+1)}$ służy do akumulacji „prawdziwej” wartości wektora Δr wg wzoru

$$(5.4) \quad \Delta r^{(i+1)} = \Delta r^{(i)} + \delta r^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

przy czym przyjmujemy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \Delta r^{(0)} &= \Delta r \text{ (rozwiązanie układu równań liniowych),} \\ K_{t+\Delta t}^{(0)} &= K_t, \\ F_{t+\Delta t}^{(0)} &= F_t, \end{aligned}$$

Macierz K może być uaktualniana na każdym kroku iteracyjnym (tzw. pełna metoda Newtona-Raphsona) lub rzadziej — jedynie na pierwszej iteracji (tzw. zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona) lub co pewną wybraną liczbę kroków. Inną, bardzo efektywną i często ostatnio wykorzystywaną metodą iteracyjną typu Newtona-Raphsona jest tzw. metoda BFGS, [70, 47].

Wszystkie powyższe metody zawodzą w sytuacjach, gdy macierz rozwiązywanego układu równań staje się osobliwa. Odpowiada to napotkaniu na analizowanej drodze stanów równowagi pewnych punktów osobliwych, wśród których rozróżniamy punkty graniczne (maksimum obciążenia) oraz punkty bifurkacji (rozdwojenia). Zagadnienia związane z rozwiązywaniem zagadnień mechaniki w otoczeniu punktów osobliwych omawiane są szeroko w pracach [47, 71 - 73].

Bardzo efektywnym sposobem analizy złożonych problemów nieliniowej statyki są tzw. metody redukcji bazy, [74]. Aby je krótko omówić przedstawimy układ równań opisujący nieliniowe zagadnienie statyki w postaci

$$(5.6) \quad Kr + G(r) = R$$

przy czym zrezygnowaliśmy tu dla większej przejrzystości z formalizmu przyrostowego zaś wektor $G(r)$ ujmuje symbolicznie wszystkie efekty nieliniowego zachowania się układu. Główną zaletą zastosowanej tu do otrzymania równania (5.6) procedury MES jest łatwość modelowania nawet złożonych kształtów analizowanej konstrukcji, wadą natomiast konieczność rozwiązywania względnie dużego układu N nieliniowych równań algebraicznych. Aby nieco poprawić sytuację założymy, że znamy pewne „globalne” funkcje kształtu opisujące stan przemieszczenia układu tak, że założyć można

$$(5.7) \quad r_{N \times 1} = \Gamma_{N \times K} x_{K \times 1},$$

gdzie $x_{k \times 1}$ jest pewnym „zredukowanym” ($K \ll N$) wektorem uogólnionych współrzędnych zaś

$$(5.8) \quad \Gamma_{N \times K} = [\gamma_{1N \times 1} \gamma_{2N \times 1} \cdots \gamma_{KN \times 1}],$$

pewną zredukowaną bazą w przestrzeni rozwiązań dyskretyzowanych. Wykorzystanie równania (5.7) w związku (5.6) prowadzi do zależności

$$(5.9) \quad \tilde{K}_{K \times K} x_{K \times 1} + \tilde{G}_{K \times 1}(x) = \Gamma_{K \times N}^t R_{N \times 1},$$

gdzie

$$(5.10) \quad \tilde{K}_{K \times K} = \Gamma_{K \times N}^t K_{N \times N} \Gamma_{N \times K}$$

Równanie (5.9) jest wynikiem łącznego zastosowania MES oraz klasycznej metody Raileigha-Ritza, [75]. Korzyść z wykorzystania tego drugiego podejścia wynika ze znacznej redukcji liczby niewiadomych w rozpatrywanym problemie, wadą natomiast jest tu niewątpliwie trudność wyboru wektorów bazy zredukowanej (5.8).

Trudność tę pokonać można poprzez odwołanie się do jeszcze innej metody przybliżonego rozwiązywania nieliniowych układów równań, zwanej metodą statycznej perturbacji [47, 76]. Metoda ta bazuje na koncepcji rozwinięcia funkcji $r(\tau)$ i $R(\tau)$ w szereg Taylora o postaci

$$(5.11) \quad r(\tau) = r(0) + \dot{r}(0)\tau + \ddot{r}(0)\frac{\tau^2}{2!} + \dddot{r}(0)\frac{\tau^3}{3!} + \dots,$$

$$(5.12) \quad R(\tau) = R(0) + \dot{R}(0)\tau + \ddot{R}(0)\frac{\tau^2}{2!} + \dddot{R}(0)\frac{\tau^3}{3!} + \dots,$$

oraz wstawieniu tych rozwinięć do równania (5.6). Przyrównując występujące po obu stronach równania współczynniki przy kolejnych potęgach parametru τ i traktując funkcję $R(\tau)$ jako znaną otrzymujemy w sposób rekurencyjny kolejne wartości $r(0)$, $\dot{r}(0)$, $\ddot{r}(0)$, Ostateczną wartość „nieliniowego” przemieszczenia $r(\tau)$ otrzymujemy na podstawie wzoru (5.11) przy czym długość kroku (tj. maksymalna wartość parametru τ) ograniczona jest warunkiem zbieżności szeregu (5.11). Jest to niewątpliwą wadą metody statycznej perturbacji, jej poważną zaletą natomiast jest możliwość dokonywania za jej pomocą efektywnych obliczeń nawet w otoczeniu punktów osobliwych, [54].

Powróćmy teraz do omawiania metody redukcji bazy przyjmując

$$\Gamma_{N \times K} = \left[\begin{array}{cccc} r(0) & \dot{r}(0) & \ddot{r}(0) & \dots \\ |r(0)| & |\dot{r}(0)| & |\ddot{r}(0)| & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r^{(k-1)}}{|r(0)|} & \frac{\dot{r}^{(k-1)}}{|\dot{r}(0)|} & \frac{\ddot{r}^{(k-1)}}{|\ddot{r}(0)|} & \dots \end{array} \right]_{N \times K},$$

tj. utożsamiając wektory bazy zredukowanej z kolejnymi, unormowanymi wektorami pochodnych przemieszczenia względem parametru drogi τ , (5.11). Jak okazuje się na podstawie rozważań teoretycznych oraz obliczeń testowych [74], tak rozumiane metody redukcji bazy mają wszystkie zalety MES, klasycznej metody Raileigha-Ritza oraz metody statycznej perturbacji tj. odpowiednio:

- łatwość modelowania złożonych kształtów analizowanych ciał,
- względnie niedużą liczbę niawiadomych,
- możliwość prowadzenia efektywnych obliczeń w otoczeniu punktów osobliwych,

nie posiadają natomiast wad właściwych tym metodom takich jak odpowiednio:

- duża liczba niewiadomych,
- trudność doboru globalnych funkcji kształtu,
- kłopoty ze zbieżnością szeregu (5.11).

Inną grupą metod zasługujących z pewnością na wzmiankę w tym przeglądzie są tzw. podejścia analityczno-numeryczne, których przykładem może być nieliniowa analiza układów osiowosymetrycznych poddanych dowolnemu obciążeniu, [77].

6. Przetwarzanie danych i produkcja oprogramowania

Oczywistą przyczyną sukcesu MES w naukach inżynierskich jest powstawanie, równoległe z rozwojem podstaw teoretycznych, olbrzymiej liczby coraz doskonalszych programów komputerowych. Szerokie omawianie prac dotyczących informatycznych podstaw programów MES, ze względu na obszerność i specyfikę tej tematyki, przekraczałoby ramy niniejszego opracowania. Ograniczymy się więc jedynie do przytoczenia paru bardzo reprezentatywnych pozycji literatury w tym zakresie, [78 - 87]. Dalszą ilustracją tej problematyki mogą być także szczegółowe opisy różnych opracowanych na świecie dużych programów z zakresu zastosowań MES w mechanice, takich jak

- ASKA, [88, 89],
- MARC, [90],
- NASTRAN, [91],
- LARSTRAN, [92],
- ANSR, [93],
- ADINA, [94],
- ADINAT, [95].

Literatura cytowana w tekście

1. A. C. SINGHAL, *775 selected references on the finite element method*, Report S-12, Civil Eng. Dept. Laval Univ., Quebec, Jan. 1969, Canada.
2. J. E. AKIN, D. L. FENTON, W. C. T. STODDART, *The finite element method — a bibliography of its theory and application*. Report EM 72 - 1, Dept. Eng. Sciences, Univ. of Tennessee, Knoxville, Febr. 1972, USA.
3. D. H. NORRIE, G. DEVRIES, *A finite element bibliography*, Reports 57, 58, 59, Dept. Mech. Eng., Univ. of Calgary, Alberta, June 1974, Canada.
4. D. H. NORRIE, G. DEVRIES, *A finite element bibliography*, Reports 57, 58, 59, Dept. Mech. Eng., Univ. of Calgary, Alberta, 1975, Canada.
5. D. H. NORRIE, G. DEVRIES, *A finite element bibliography*, Plenum Press, 1976.
6. J. H. ARGYRIS, *Energy theorems and structural analysis*, Butterworth 1960.
7. J. H. ARGYRIS, H. P. MLEJNEK, *Einführung in die Methoden der finiten Elemente*, Vieweg 1982.
8. K. J. BATHE, E. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice—Hall 1976.
9. K. J. BATHE, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice—Hall 1981.
10. C. A. BREBBIA, J. C. CONNOR, *Fundamentals of finite element techniques for structural engineers*, Butterworth 1975.
11. P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North—Holland 1978.

12. Y. K. CHEUNG, M. F. YEO, *A practical introduction to finite element analysis*, Pitman 1979.
13. R. D. COOK, *Concepts and applications of finite element analysis*, Wiley 1974.
14. J. DANKERT, *Numerische Methoden der Mechanik*, Springer 1977.
15. A. J. DAVIES, *The finite element method*, Clarendon 1980.
16. C. S. DESAI, J. P. ABEL, *Introduction to the finite element method*, Van Nostrand Reinhold 1972.
17. C. S. DESAI, *Elementary finite element method*, Prentice—Hall 1979.
18. R. T. FENNER, *Finite element methods for engineers*, Macmillan 1975.
19. I. FRIED, *Numerical solution of differential equations*, Acad. Press 1979.
20. R. H. GALLAGHER, *Finite element analysis: Fundamentals*, Prentice—Hall 1975.
21. H. G. HAHN, *Methode der finiten Elemente in der Festigkeitlehre*, Akad. Verlagsgesellschaft 1975.
22. E. HINTON, D. R. J. OWEN, *Finite element programming*, Academic Press 1977.
23. E. HINTON, D. R. J. OWEN, *An introduction to finite element computations*, Pineridge 1979.
24. K. H. HÜBNER, *Finite element method for engineers*, Wiley 1975.
25. B. M. IRONS, S. AHMAD, *Techniques of finite elements*, Ellis Horwood, 1979.
26. H. C. MARTIN, G. CAREY, *Introduction to finite element analysis*, McGraw—Hill 1973.
27. B. NATH, *Fundamentals of finite elements for engineers*, Athlone Press 1974.
28. D. H. NORRIE, G. DEVRIES, *Finite element method: Fundamentals and applications*, Academic Press 1973.
29. D. H. NORRIE, G. DEVRIES, *An introduction to finite element analysis*, Academic Press 1978.
30. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continuum*, McGraw—Hill 1972.
31. J. T. ODEN, J. N. REDDY, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer 1976.
32. J. T. ODEN, J. N. REDDY, *An introduction to the mathematical theory of finite elements*, Wiley 1978.
33. D. R. J. OWEN, E. HINTON, *Finite elements in plasticity: Theory and practice*, Pineridge 1980.
34. P. M. PRENTER, *Splines and variational methods*, Wiley 1975.
35. J. PRZEMIENTECKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw—Hill 1968.
36. T. H. RICHARDS, *Energy methods in stress analysis*, Wiley 1977.
37. J. ROBINSON, *Integrated theory of finite element methods*, Wiley 1973.
38. K. C. ROCKEY, H. R. EVANS, D. W. GRIFFITHS, D. A. NETHERCOT, *Finite element method — A basic introduction*, Crosby Lockwood 1975.
39. M. F. RUBINSTEIN, *Structural systems: statics, dynamics, stability*, Prentice—Hall 1970.
40. H. R. SCHWARZ, *Methode der finiten Elemente*, Teubner 1980.
41. L. J. SEGERLIND, *Applied finite element analysis*, Wiley 1976.
42. G. STRANG, G. J. FIX, *An analysis of the finite element method*, Prentice—Hall 1973.
43. P. TONG, J. N. ROSSETOS, *Finite element method: Basic technique and implementation*, MIT Press 1977.
44. R. VALID, *Mechanics of continuous media and analysis of structures*, North—Holland 1981.
45. E. L. WACHSPRESS, *A rational finite element basis*, Academic Press 1975.
46. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, McGraw—Hill 1977.
47. M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN 1983.
48. M. KLEIBER, *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*, skrypt, Wyd. Polit. Poznańskiej, 1983.
49. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, F. NAJBAR, S. GRABOWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, 1975.
50. J. PIETRZAK, G. RAKOWSKI, K. WRZEŚNIEWSKI, *Macierzowa analiza konstrukcji*, skrypt, PWN 1979.
51. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady 1973.
52. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*, Arkady 1979.
53. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*, PWN 1980.
54. CZ. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN 1982.
55. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady 1972.
56. T. H. H. PIAN, *Finite element methods by variational principles with relaxed continuity requirements*, w: *Variational methods in engineering*, Univ. of Southampton, 1972, England.
57. G. HORRIGMOE, P. G. BERGAN, *Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems*, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* 7, 201 - 217, 1978.

58. M. GERADIN, *Variational methods of structural dynamics and their finite element implementation*, w: Advanced Structural Dynamics, Appl. Science Publishers Ltd, 1980, s. 1 - 141.
59. K. J. BATHE, *Finite element formulation, modeling and solution of nonlinear dynamic problems*, w: Numerical methods for partial differential equations, Acad. Press 1979, s. 1 - 40.
60. I. FRIED, *Finite element analysis of time dependent phenomena*, AIAA J. **7**, 1170 - 1172, 1969.
61. S. N. ATLURI, *An assumed stress hybrid finite element model for linear elastodynamic analysis*, AIAA J. **11**, 1028 - 1031, 1972.
62. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzemych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd. **22**, 365 - 378, 1978.
63. O. C. ZIENKIEWICZ, *Isoparametric and allied numerically integrated elements — a review*, w: Numerical and computer methods in structural mechanics, Academic Press 1973, s. 13 - 42.
64. B. FREDRIKSON, J. MACKERLE, *Finite element review*, Publication No. AEC-L-003, AEC, Box 3944, Univ. of Linköping, Sweden.
65. D. A. NAGY, *Modal representation of geometrically nonlinear behaviour*, Comp. Struct. **10**, 683 - 688, 1979.
66. M. KLEIBER, M. WIECZOREK, *Przybliżona metoda nieliniowej analizy ram sprężystych*, Rozpr. Inż. **30**, 269 - 281, 1982.
67. R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamics of structures*, McGraw—Hill 1975.
68. R. E. NICKELL, *Nonlinear dynamics by mode superposition*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. **7**, 107 - 129, 1976.
69. N. F. MORRIS, *The use of modal superposition in nonlinear dynamics*, Comp. Struct. **7**, 65 - 72, 1977.
70. K. J. BATHE, A. P. CIMENTO, *Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. **22**, 59 - 85, 1980.
71. Z. WASZCZYŻYN, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*, w: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum 1981, s. 341 - 380.
72. E. RIKS, *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. Sol. Struct. **15**, 529 - 551, 1979.
73. P. G. BERGAN i inni, *Solution techniques for nonlinear finite element problems*, Int. J. Num. Meths. Eng. **12**, 1677 - 1696, 1978.
74. A. K. NOOR, J. M. PETERS, *Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures*, AIAA J. **18**, 455 - 461, 1980.
75. B. O. ALMROTH, F. A. BROGAN, P. STERN, *Automatic choice of global shape functions in structural analysis*, AIAA J. **16**, 683 - 688, 1979.
76. M. KLEIBER, *Perturbation approach to the incremental equations of large deformation elasto-plasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. XXVIII, 75 - 80, 1980.
77. M. KLEIBER, TRAN DUONG HIEN, *Nonlinear dynamics of complex axisymmetric structures under arbitrary loadings*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 1983, (w druku).
78. B. FREDRIKSSON, J. MACKERLE, *Structural mechanics finite element computer programs, surveys and availability*, Publication No. AEC-L-001, AEC, Box 3044, S-58903, Linköping, Sweden.
79. B. FREDRIKSSON, J. MACKERLE, *Structural mechanics pre-and postprocessor programs*, Publication No. AEC-L-003, AEC, Box 3044, S-58903, Linköping, Sweden.
80. *Structural Mechanics Computer Programs: Surveys, Assessments, and Availability*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville 1974, USA.
81. E. SCHREM, *Computer implementation of the finite-element procedure*, w: Numerical and computer methods in structural mechanics, Academic Press 1973, s. 79 - 121.
82. N. SARIGUL, J. MAITAN, H. A. KAMEL, *Solution of nonlinear structural problems using array processors*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. **34**, 939 - 954, 1982.
83. A. K. NOOR, J. J. LAMBIOTTE, *Finite element dynamic analysis on CDC STAR-100 computer*, Comp. Struct. **10**, 7 - 19, 1979.
84. H. F. JORDAN, P. L. SAWYER, *A multi-microprocessor system for finite element structural analysis*, Comp. Struct. **10**, 21 - 32, 1979.
85. C. A. FELIPPA, *Database management in scientific computing — I. General description*, Comp. Struct. **10**, 53 - 61, 1979.

86. H. A. KAMEL, M. W. MCCABE, P. G. DESHAZO, *Optimum design of finite element software subject of core restrictions*, Comp. Struct. **10**, 63 - 80, 1979.
87. A. K. NOOR, C. M. ANDERSEN, *Computerized symbolic manipulation in structural mechanics — Progress and potential*, Comp. Struct. 95 - 118, 1979.
88. E. SCHREM, *Development and maintenance of large finite element systems*, w: Structural mechanics computer programs, Univ. Press of Virginia, USA, 1974, s. 669 - 686.
89. E. SCHREM, *A short description of ASKA*, w: Finite element linear and nonlinear analysis, University Extension Program, Univ. of Milano, Italy, 1975.
90. MARC-CDC, *Non-linear finite element analysis program, User information manual*, Publ. No. 17309500, Control Data Corp., Minneapolis, Minn., USA.
91. R. H. MACNEAL, *The NASTRAN theoretical manual*, NASA SP-221(01), National Aer. and Space Administration, April 1972.
92. *LARSTRAN user's manual*, ISD-Report No. 231, Univ. of Stuttgart, West Germany, 1978.
93. D. P. MONDKAR, G. H. POWELL, *ANSR-II, Analysis of nonlinear structural response, User's manual*, Report No. UCB/EERC-79/17, Univ. of California, Berkeley, July 1979, USA.
94. K. J. BATHE, *ADINA — a finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis*, Report No. 82448-1, MIT, Mass., Sept. 1977, USA.
95. K. J. BATHE, *ADINAT — a finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis of temperatures*, Report No. 82448-5, MIT, Mass., May 1977, USA.

Praca została złożona w Redakcji 30 marca 1983 roku.
