

METODY STOCHASTYCZNE W MECHANICE: STAN I TENDENCJE ROZWOJOWE

KAZIMIERZ SOB CZYK

IPPT PAN

I. Wstęp

W ostatnim ćwierćwieczu teoretyczne metody mechaniki zostały istotnie wzbogacone przez podejście oparte na opisywaniu i analizowaniu zjawisk mechaniki przy pomocy pojęć i metod teorii prawdopodobieństwa, w szczególności — teorii procesów stochastycznych. Jak wiadomo, metodologia ta okazała się wcześniej bardzo użyteczna w wyjaśnianiu szeregu zjawisk fizyki (por. [5]). Fizyka wskazała też drogę tym metodom do mechaniki, głównie poprzez rozwój fizyki lub mechaniki statystycznej — dziedziny badającej prawidłowości w zakresie zjawisk molekularnych w oparciu o pojęcia rachunku prawdopodobieństwa.

Teoria turbulentnych przepływów cieczy była pierwszą gałęzią mechaniki zjawisk makroskopowych, w której podejście stochastyczne nie tylko odniosło sukcesy, ale także (ze względu na charakter zjawisk) niemal całkowicie ukierunkowało jej rozwój (por. [30]). W mechanice konstrukcji metody stochastyczne są najbardziej niezbędne w takich dziedzinach jak: astronautyka i aerotechnika ale zyskały one też akceptację i rozwój niemal we wszystkich tradycyjnych jej działach, takich jak: mechanika maszyn, geotechnika, mechanika budowli i w innych.

Obecnie, podejście stochastyczne — ujmujące nieregularność i przypadkowość zjawisk w terminach zdarzeń, prawdopodobieństw i wartości średnich — stanowi jeden z istotnych nurtów współczesnej mechaniki.

Rozwój metod stochastycznych w różnych dziedzinach mechaniki nastąpił głównie w ostatnim dwudziestopięcioleciu. W okresie tym zostało opublikowanych setki prac, wiele monografii, odbyło się szereg międzynarodowych konferencji naukowych, a w wielu czołowych ośrodkach naukowych świata istnieją zespoły badaczy pracujących nad różnymi stochastycznymi problemami mechaniki i innych nauk praktycznych. Prace dotyczące metod stochastycznych w mechanice ukazują się we wszystkich periodykach naukowych poświęconych mechanice i matematyce stosowanej. Są to w szczególności: *International Journal of Solids and Structures*, *International Journal of Engineering Sciences*, *International Journal of Non-linear Mechanics*, *Journal of Applied Mechanics*, *Journal of Sound and Vibration*, *Journal of Fluid Mechanics*, *Przykładnaja Matematika i Mieczanika*, *Przykładnaja Mieczanika*, *Mieczanika Twierdowo Tiała* i inne. W ostatnich latach

powstały jednak nowe periodyki w całości poświęcone zastosowaniom metod probabilistycznych. Oto one: *Journal of Applied Probability* (Anglia, Vol. I-1963), *Advances in Applied Probability* (Anglia, Vol. I-1968), *Stochastic Processes and Their Applications* (USA, Vol. I-1970), *Stochastica* (USA, Vol. I-1976), *Stochastica* (Hiszpania, w języku angielskim, Vol. I-1976) oraz nowy: *Probability and Statistics in Engineering* (USA, w przygotowaniu).

W celu bardziej szczegółowego przedstawienia tendencji rozwojowych metod stochastycznych w mechanice podzielimy tutaj mechanikę umownie na mechanikę konstrukcji i mechanikę ośrodków.

2. Metody stochastyczne w mechanice konstrukcji

2.1. Obliczenia normowe i teoria niezawodności. Różne działy mechaniki konstrukcji (np. mechanika budowli) umożliwiają inżynierowi wyznaczenie naprężeń i odkształceń powstających w konstrukcjach znajdujących się pod działaniem sił. Na tym jednak nie kończy się inżynierska analiza projektowanej konstrukcji. Podstawowym jej celem jest bowiem odpowiedź na pytanie: czy konstrukcja może służyć wystarczająco niezawodnie w czasie ustalonego okresu eksploatacji? Znajomość naprężeń i odkształceń jest konieczna po to aby wydać sąd o niezawodności i trwałości konstrukcji. W ten sposób mechanika konstrukcji łączy się, na końcowym etapie analizy inżynierskiej z teorią niezawodności. Przez niezawodność rozumie się zdolność układu technicznego (w szczególności — konstrukcji) do wypełniania jego (przewidzianych projektem) funkcji w danych warunkach eksploatacji. Zaprzestanie wypełniania chociażby jednej z tych funkcji nazywa się w teorii niezawodności awarią.

Tradycyjne metody obliczeń konstrukcji „uwzględniają” ten niezawodnościowy etap analizy poprzez wprowadzanie różnych warunków bezpieczeństwa mających na celu zapewnienie, że w czasie eksploatacji konstrukcji nie wystąpi żaden z niedopuszczalnych stanów granicznych. Jeśli stany graniczne odnosić do wytrzymałości to jak wiadomo, warunek wytrzymałości ma postać: $S \leq R$, gdzie w zależności od metodyki obliczeń, S jest obciążeniem działającym na konstrukcję lub naprężeniem w elemencie konstrukcji, zaś R jest nośnością graniczną. Częściej zastępuje się powyższy warunek przez żądanie następujące: $S_N \leq kR_N$, gdzie S_N jest obciążeniem obliczeniowym (normowym), R_N — obliczeniową nośnością graniczną, zaś k — tzw. współczynnikiem bezpieczeństwa. Obliczeniowe wartości naprężeń i nośności granicznej w tym warunku są wielkościami w pełni określonymi, zdeterminowanymi.

Jest jednak oczywiste, że zarówno warunki zewnętrzne eksploatacji jak i parametry konstrukcji mają — ogólnie mówiąc — charakter przypadkowy. Dlatego też awaria jest zdarzeniem losowym a niezawodność (lub, w tradycyjnej terminologii budowlanej — bezpieczeństwo) — charakterystyką probabilistyczną konstrukcji. Pierwsze prace poświęcone krytyce klasycznej koncepcji warunku wytrzymałości i zastosowania metod teorii prawdopodobieństwa do obliczeń konstrukcji budowlanych pochodzą z lat dwudziestych i trzydziestych naszego wieku (z polskich prac z tego zakresu należy wymienić pracę [21]). W latach powojennych prace te były szeroko rozwijane i dzisiaj istnieje w tej dziedzinie

bogata literatura (por. np. [4], [8], [11], [28]). Idea statystycznego uzasadnienia obliczeń normowych zrodzona w analizie konstrukcji budowlanych zaczęła szybko przenikać do budowy maszyn i konstrukcji lotniczych aby tam zyskać właściwe metodyczne rozwinięcie. Problematyka ta jest jednak ciągle ważna i aktualna.

Należy podkreślić, że problemy mechanicznej niezawodności konstrukcji są bardziej złożone niż problemy rozpatrywane w ogólnej lub formalnej teorii niezawodności rozwiniętej w związku z potrzebami radioelektroniki. W ogólnej teorii niezawodności rozważa się bowiem układy składające się z dużej liczby jednorodnych elementów pracujących w jednorodnych warunkach a zmianę niezawodności elementów w czasie postulują się zwykle w postaci pewnych hipotez, które następnie powinny podlegać weryfikacji doświadczalnej. W problemach niezawodności układów mechanicznych najczęściej mamy do czynienia z układami ciągłymi dla których zmiana warunków zewnętrznych (np. obciążeń i temperatury) odgrywa rolę pierwszoplanową i wobec czego istotne jest badanie wszystkich tych zjawisk (natury mechanicznej, chemicznej, fizycznej) które są przyczyną awarii. Ten kierunek badań — w chwili obecnej niewystarczająco jeszcze rozwinięty — wiąże się z klasyfikacją i probabilistycznym modelowaniem awarii mających pochodzenie mechaniczne, a w szczególności z poszukiwaniem właściwych probabilistycznych modeli zniszczenia kruchej, zniszczenia zmęczeniowego itp.

2.2. Drgania stochastyczne i zagadnienia pokrewne. Potrzeba użycia metod stochastycznych w mechanice konstrukcji staje się szczególnie ważna w analizie problemów dynamicznych; wynika ona bowiem w sposób naturalny i konieczny z faktu, iż wymuszenia zewnętrzne działające na realne maszyny, budowle czy statki (powietrzne czy morskie) mają często na tyle nieregularny i przypadkowy przebieg w czasie, że modele i teorie deterministyczne stają się bezradne. Przykładem takich wymuszeń są: działanie porywistego wiatru i silnego promieniowania akustycznego (generowanego przez silniki odrzutowe) na budowle, obciążenie konstrukcji statków morskich przez fale morskie, wymuszenie powłok samolotowych przez strumień turbulentny, działanie nieregularnych nierówności nawierzchni drogowych na konstrukcje pojazdów samochodowych itd.

Jedyne właściwe podejście do opisu i analizy drgań konstrukcji przy tego rodzaju wymuszeniach to podejście oparte na zastosowaniu teorii procesów stochastycznych. Prowadzi to do teorii drgań stochastycznych.

Drgania stochastyczne układów o dyskretnym jak o i ciągłym rozkładzie masy były badane bardzo intensywnie w latach sześćdziesiątych. Badania te znalazły odzwierciedlenie w dziesiątkach artykułów a także w monografiach (por. [6], [10], [13], [19]). Zbadane zostały problemy charakteryzacji drgań wymuszanych stochastycznie, drgań parametrycznych i rezonansów stochastycznych oraz problemy stochastycznej stabilności ruchu (por. [14], [15]). Przedmiotem analizy były zarówno układy sprężyste liniowe i nieliniowe, a także — w mniejszym zakresie, konstrukcje o cechach plastycznych (por. [7], [31]). W chwili obecnej istniejące metody i rezultaty dynamiki statystycznej dają możliwość wyznaczania podstawowych charakterystyk probabilistycznych reakcji dla szerokiej klasy układów i obciążeń stochastycznych.

Problemy dotyczące niezawodności stochastycznie drgających konstrukcji nie są jeszcze wystarczająco zbadane i wydają się być na obecnym etapie szczególnie aktualne.

Ogólną ideę niezawodnościowej analizy konstrukcji opartą na przedstawieniu za-

chowania się konstrukcji w postaci procesu stochastycznego a' stanu granicznego — w postaci wyjścia tego procesu z obszarów stanów dopuszczalnych podał W. W. BOŁOTIN w pracy [24]; idea ta rozwinięta następnie szerzej w monografii [26] — może być ciągle osnową dla interesujących rezultatów. Analiza niezawodnościowa powinna też (a także przede wszystkim) obejmować badanie skutków wywoływanych przez drgania stochastyczne. Prowadzi to do problemów probabilistycznego modelowania zniszczenia zmęczeniowego elementów poddanych drganiom stochastycznym (por. [16]). Badania takie są w ostatnich latach podejmowane coraz częściej w różnych krajach (por. np. prace [25], [3], [9], [17]). Pozwalają one uzyskać informację o trwałości konstrukcji i w ten sposób rezultaty analizy stochastycznej doprowadzić do użytku inżynierów. Badania w tym kierunku są godne rozwijania, przy czym byłoby ważne aby probabilistyczne modele teoretyczne mogły być uzupełniane i weryfikowane doświadczalnie.

2.3. Optymalizacja i identyfikacja. Inna grupa zagadnień, którą w stochastycznej analizie konstrukcji zasługuje na podkreślenie to problemy optymalizacji i identyfikacji parametrów konstrukcji na które działają wymuszenia losowe. Problemy te wiążą się w sposób istotny z matematyczną i numeryczną analizą stochastycznych równań różniczkowych opisujących zachowanie się konstrukcji. Zagadnienia identyfikacji lub estymacji parametrów układów poddanych losowym wymuszeniom mogą być formułowane jako zagadnienia odwrotne dla odpowiednich równań stochastycznych a przy tym prowadzą do interesujących problemów statystyki matematycznej. Zagadnienia stochastycznej optymalizacji konstrukcji oraz identyfikacja parametrów układów drgających stochastycznie są nowe a w ich badaniu stawiane są zaledwie pierwsze kroki. Ze względu na ich znaczenie ogólnopoznawcze i praktyczne będą one bez wątpienia przedmiotem badań w najbliższej przyszłości.

3. Metody stochastyczne w mechanice ośrodków (i materiałów)

Potrzeba podejścia stochastycznego do analizy ośrodków materialnych stała się oczywista już stosunkowo dawno. Obserwacja struktury i własności różnych ośrodków materialnych i materiałów konstrukcyjnych doprowadziła do przekonania, że modele i rozwiązania teorii klasycznych stanowią zbyt dużą idealizację i nie odzwierciedlają skomplikowanej i niejednorodnej struktury oraz złożoności procesu deformacji szeregu ośrodków rzeczywistych. Należy przede wszystkim wymienić przypadek cieczy znajdującej się w ruchu turbulentnym; ale również przy laminarnym ruchu cieczy obserwuje się zmienność jej własności spowodowaną, na przykład, fluktuacjami termicznymi. Ciała stałe są często mieszaniną różnych substancji czy ziaren o nieznannej i skomplikowanej geometrii. Przykładem mogą być ważne w praktyce materiały kompozytowe, a także grunty, skały, ośrodki biologiczne, ceramiki, betony itp. Adekwatne podejście do analizy deformacji i zniszczenia tego rodzaju ośrodków wymaga podejścia, które pozwoliłoby uwzględnić tę skomplikowaną i przypadkową strukturę. Podejście takie to modele i metody stochastyczne.

3.1. Modele stochastyczne w mechanice płynów. Jeśli chodzi o hydromechanikę to podejście stochastyczne zostało ugruntowane i rozwinięte w teorii turbulencji. Począwszy od funda-

mentalnych prac Kołmogorowa teoria turbulencji stała się, przynajmniej w jej zasadniczym nurcie, teorią losowych pól hydrodynamicznych, a jej rozwój wpłynął w istotny sposób na dzisiejszy kształt matematycznej teorii pól losowych (por. prace Kołmogorowa, Kampé de Fériét, G. Birkhoffa, Jagłoma i innych). Teoria turbulencji miała też inspirujący wpływ na prace dotyczące zjawisk w stochastycznych ośrodkach stałych. Jest to w chwili obecnej dziedzina zaawansowana o bardzo istotnych implikacjach poznawczych i praktycznych; świadczą o tym istniejące monografie, a przede wszystkim dwutomowe dzieło MONINA i JAGŁOMA [30]. Mimo swego zaawansowania teoria turbulencji jest i bez wątpienia nadal pozostanie ważną i aktualną dziedziną dla badań opartych na modelach i metodach stochastycznych. Aktualny kierunek rozwoju statystycznej teorii turbulencji dotyczy równań stochastycznych i miar w przestrzeniach nieskończenie wiele wymiarowych i w związku z tym bardziej należy do współczesnej matematyki niż do mechaniki w jej tradycyjnym rozumieniu (por. [27]).

Poza teorią turbulencji istnieje w obrębie mechaniki płynów szereg innych problemów, których badanie wymaga użycia metod stochastycznych; np. wpływów losowych fluktuacji termicznych, uwzględnienie losowej chropowatości ścian kanałów w których odbywa się przepływ laminarny, dyfuzja w strumieniu cieczy itp. Osobne miejsce stanowi probabilistyczne podejście do teorii zawieszin rozwijane w różnych ośrodkach naukowych (por. [1]).

3.2. Metody stochastyczne w mechanice ciała stałego. Przechodząc do mechaniki ośrodków stałych należy przede wszystkim wymienić problem który stanowi podstawowe zagadnienie nauki o materiałach. Jest to mianowicie problem stworzenia ogólnej statystycznej teorii deformacji i zniszczenia ciał stałych, która pozwoliłaby z jednego punktu widzenia opisać procesy deformacji, zniszczenia, plastyczności, pełzania itp. Taka teoria statystyczna odgrywałaby dla nauki o materiałach podobną rolę jak fizyka statystyczna dla nauki o zjawiskach molekularnych i cieplnych. Z wielu podstawowych przyczyn stworzenie takiej konsystentnej teorii jest trudne i zależy od postępów w innych dziedzinach nauki. Czynione są jednak próby tworzenia modeli i teorii częściowych. Na przykład znane są najprostsze modele statystyczne opisujące deformację plastyczną w warunkach jednoosiowego stanu naprężenia. Duże postępy osiągnięto w modelowaniu zniszczenia krucho w oparciu o założenie, że współdziałanie elementów pierwotnych w ciele stałym można pominąć w związku z czym wytrzymałość ciała jako całości jest określona przez wytrzymałość najsłabszego elementu; takie podejście zostało na początku lat czterdziestych zaproponowane przez Weibulla oraz Frankiela i Kontorową. Ważne rezultaty otrzymano też w probabilistycznym modelowaniu zniszczenia zmęczeniowego (por. np. [9], [16], [17]) oraz w analizie wpływu losowego rozkładu defektów na proces deformacji i zniszczenia.

Problematyka o której tutaj mówimy obejmuje także wszystkie te wysiłki badawcze, których celem jest rozszerzenie metod fizyki statystycznej na mikroskopowe zjawiska w ciałach stałych (por. [23]). Z literatury w zakresie teorii dyslokacji i z obecnego stanu tej dziedziny wynika, że bardzo istotne są i będą w najbliższej przyszłości wszystkie prace stawiające sobie za cel oparcie kinetycznej teorii ruchu dyslokacji o dobre podstawy geometrii i analizy stochastycznej (por. [12]). Metody fizyki statystycznej mogą być też użyteczne dla opisanie i wyjaśnienia procesów polimeryzacji, pamięci kształtu itp.

Inna obszerna grupa zagadnień mechaniki ośrodka stałego i nauki o materiałach których badanie wymaga podejścia stochastycznego to modelowanie i analiza deformacji ośrodków o skomplikowanej i niejednorodnej strukturze, a więc takich jak różnego rodzaju kompozyty, grunty, ośrodki biologiczne itp. Jest to problematyka ważna zarówno jeśli mieć na uwadze podstawy mechaniki jak i potrzeby praktyki inżynierskiej; świadczy o tym między innymi stale wzrastająca liczba prac, monografii i konferencji naukowych (por. [2], [20], [29]).

Problemy mechaniki nieregularnych lub stochastycznych kompozytów były w ostatnich 15 - 20 latach badane bardzo intensywnie i dzisiaj istnieje bogata literatura dotycząca głównie wyznaczania tzw. stałych efektywnych (por. np. [2], [20]). Analiza stochastyczna kompozytów nie ma jednak jeszcze właściwych podstaw matematycznych. Wydaje się, że tworzenie takich podstaw oparte na pojęciach i rezultatach teorii pól losowych i geometrii stochastycznej będzie przedmiotem badań w najbliższej przyszłości. Oprócz metod teoretycznych właściwy rozwój mechaniki kompozytów stochastycznych wymaga odpowiednich badań doświadczalnych. Te zaś łączą się ściśle ze statystyką pól losowych i ze stereologią (por. [22]).

3.3. Stochastyczna analiza fal (akustycznych). W mechanice ośrodków (zarówno płynnych jak i stałych) ważne miejsce zajmują zagadnienia propagacji fal. Zjawisko ruchu falowego łączy też mechanikę z akustyką — dziedziną której podstawowym celem jest badanie praw rozchodzenia się zaburzeń (deformacji) w ośrodkach materialnych. Wskutek istnienia wielu różnorodnych i przypadkowych czynników determinujących realne ruchy falowe (np. turbulencja atmosfery, niejednorodność szeregu ośrodków stałych) bardziej adekwatny jest często opis fal w języku procesów stochastycznych. Prowadzi to do analizy fal stochastycznych. Szczególne miejsce zajmuje analiza fal rozprzestrzeniających się w ośrodkach stochastycznych (stochastycznie niejednorodnych).

Zjawiska związane z rozprzestrzenianiem się fal w ośrodkach stochastycznych i metody ich badania są bardzo różnorodne. Zależą one od charakteru i sposobu opisu losowych niejednorodności od informacji jaką posiadamy o strukturze ośrodka przenoszącego ruch falowy itp. Należy jednak podkreślić, że niezależnie od różnic powodowanych specyfiką rozważanego problemu, propagacja fal w ośrodku stochastycznym związana jest zawsze ze zjawiskiem rozpraszania. Rozpraszanie staje się z kolei przyczyną szeregu zjawisk i efektów interesujących z fizycznego punktu widzenia i ważnych w zastosowaniach. Przede wszystkim fale rozproszone nakładają się na falę pierwotną (padającą) i powodują przestrzenne i czasowe fluktuacje pola sumarycznego. W rezultacie obserwuje się tłumienie (zanikanie amplitudy) fali oraz jej opóźnienie (zmianę prędkości propagacji) a także szereg innych zjawisk. Dostarczenie ilościowych i jakościowych informacji o tych zjawiskach jest celem analizy fal w ośrodkach stochastycznych (por. [18], [20], [32]).

Ze względu na potrzeby praktyki (propagacja dźwięku w morzu i w turbulentnej atmosferze, rozprzestrzenianie się deformacji sprężystych (np. sejsmicznych) w skorupie ziemskiej oraz propagacja fal elektromagnetycznych (np. radiowych) w atmosferze) w ostatnim trzydziestoleciu nastąpił bardzo intensywny rozwój badań nad propagacją fal stochastycznych. W chwili obecnej istnieje bardzo bogata literatura dotycząca tego przedmiotu (por. spis literatury w monografii [20]).

Mimo zaawansowania badań brak jest jednak ciągle ogólnej i jednolitej teorii fal

stochastycznych. Istniejące metody korzystają z metod przybliżonych i oparte są na pewnych założeniach upraszczających i hipotezach fizycznych. Poza tym stochastyczne równania różniczkowe cząstkowe będące najczęściej matematycznym modelem fal stochastycznych nie mają jeszcze zadowalającej teorii. Opracowywanie ścisłych matematycznych metod analizy stochastycznych równań falowych jest i będzie w najbliższej przyszłości jednym z ważnych kierunków w tej dziedzinie. Zadanie to wiąże się, podobnie jak w przypadku teorii turbulencji, z rozwijaniem i stosowaniem zaawansowanego aparatu współczesnej analizy funkcjonalnej i teorii miary. Inna klasa zagadnień związana z propagacją fal stochastycznych to identyfikacja parametrów ośrodków stochastycznych na podstawie obserwacji pola falowego rozproszonego (przez ośrodek). Szereg takich zagadnień można matematycznie formułować jako problemy odwrotne dla odpowiednich stochastycznych równań różniczkowych falowych. Na tej drodze stawiane są zaledwie pierwsze kroki. Oczywiście, oprócz przytoczonych tutaj problemów natury matematycznej istnieje stała potrzeba uzupełniania i weryfikowania rezultatów teoretycznych na drodze doświadczalnej.

Literatura cytowana w tekście

1. G. K. BATCHELOR, *Sedimentation in a dilute dispersion of spheres*, J. Fluid Mech., 52, 245 - 268, 1972; Transport properties of two-phase materials with random structure; Ann. Rev. Fluid Mech., 6, 227 - 255, 1974.
2. M. J., BERAN, *Statistical continuum theories*, Interscience Publ., New York, 1968.
3. L. J. BOGDANOFF, *A new cumulative damage model*, J. Appl. Mech., 45, 246, 1978.
4. W. W. BOLOTIN, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Warszawa, Arkady, 1968.
5. S. CHANDRASEKHAR, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Mod. Phys., 15, nr 1, 1 - 89, 1943.
6. S. H. CRANDALL, W. D. MARK, *Random vibration in mechanical systems*, Academic Press, N. York, 1963.
7. K. DOLIŃSKI, *Stochastyczna analiza konstrukcji sztywnoplastycznych*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 1977.
8. A. M. FREUDENTHAL, M. SHINOZUKA, I. KONISHI, T. KONAZAWA (Editors), *Reliability approach in structural engineering*, Proc. of Japan-USA Joint Seminar, Maruzen CO. Ltd. Tokyo, 1975.
9. F. KOZIN, J. L. BOGDANOFF, *A critical analysis of some probabilistic models of fatigue crack growth*, Eng. Fracture Mechanics, 14, nr 1, 1981.
10. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw Hill Comp., 1967.
11. J. MURZEWSKI, *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*, Arkady, Warszawa, 1970.
12. W. L. NICHOLSON (Editor), *Proceedings of the Symposium on Statistical and Probabilistic Problems in Metalurgy*, Seattle, Washington, 1971, Special Suppl. to Adv. in Appl. Probability. Dec. 1972.
13. K. PISZCZEK, *Metody stochastyczne w teorii drgań nieliniowych układów mechanicznych*, PWN, Warszawa, 1981.
14. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stabilność układów dynamicznych*, Warszawa, PWN, 1973.
15. K. SOB CZYK, *Stochastyczna stabilność ruchu*, Mech. Teor. i Stos., tom. 8, z. 4, 1970.
16. K. SOB CZYK, *Drgania konstrukcji i stochastyczne modele uszkodzeń*, Mech. Teor. i Stos., tom 18, z. 2, 1980.
17. K. SOB CZYK, *On the Markovian models for fatigue accumulation*, J. Mech. Theor. Appl., Numéro Special, 1982, str. 147 - 160.
18. K. SOB CZYK, *Elastic wave propagation in a discrete random medium*, Acta Mechanica, 25, 13 - 28, 1976.

19. K. SOBCZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, Warszawa, PWN, 1973.
20. K. SOBCZYK, *Fale stochastyczne*, Warszawa, PWN, 1982.
21. W. WIERZBIŃSKI, *Bezpieczeństwo budowy jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegląd Techniczny, 1936.
22. E. E. UNDERWOOD, *Stereology or the quantitative evaluation of microstructures*, Journal of Microscopy, 89, 161 - 180, 1969.
23. H. ZORSKI, *Statistical theory of dislocations*, Intern. J. Solids Struct., tom. 4, nr 10, 1968.
24. В. В. Болотин, *Теория надежности механических систем с конечным числом степеней свободы*, Мех. Тв. Тела, В. 5, 1969,
25. В. В. Болотин, *Некоторые математические и экспериментальные модели процессов разрушения*, Проблемы прочности, № 2, 1971.
26. В. В. Болотин, *Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений*, Москва, Изд. Литер. по Строительству, 1971.
27. М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики*, Наука, Москва, 1980.
28. С. Д. Волков, *Статистическая теория прочности*, Машгиз, Москва 1960.
29. В. А. Ломакин, *Статистические задачи твердых деформируемых тел*, Изд. Наука, Москва, 1970.
30. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Изд. Наука, Москва; часть I—1965, часть II—1967.
31. В. А. Пальмов, *Колебания упруго-пластических тел*, Изд. Наука, Москва, 1976.
32. K. Sobczyk, *Распространение волн в стохастических средах*, Сб. переводов Механика, 6(148), 1974.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1983 roku.