

ZDERZENIE W UKŁADZIE O WIELU STOPNIACH SWOBODY

WIESŁAW GRZESIKIEWICZ

Politechnika Warszawska

ANDRZEJ WAKULICZ

Instytut Matematyczny PAN

1. Wstęp

Rozważany jest układ mechaniczny złożony z nieodkształcalnych ciał, skrzepowanych geometrycznymi stacjonarnymi więzami jednostronnymi. Położenie układu opisuje wektor $x \in R^N$, a więzy mają postać

$$f_i(x) \geq 0,$$

jeśli

$$f_i \in C^1(R^N), \quad i = 1, \dots, n \leq N.$$

Rozpatrywana jest chwila czasu t , w której układ zajmuje położenie takie, że

$$f_i(x(t)) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n,$$

natomiast prędkości układu są takie, że istnieje co najmniej jeden więź, na przykład o numerze k ($1 \leq k \leq n$) taki, że

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} G_k^T \dot{x}(\tau) < 0,$$

gdzie

$$G_k := \text{grad} f_k(x(t)) = \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_N} \right]^T.$$

W opisanej sytuacji następuje równoczesne zderzenie układu z kilkoma więzami. Zgodnie z teorią zderzenia ciał sztywnych w efekcie zderzenia nastąpi skokowa zmiana prędkości, którą spowodują popędy reakcji więzów.

Jeżeli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są nieujemnymi liczbami charakteryzującymi popędy reakcji odpowiednich więzów, zaś

$$\dot{x}(t \pm 0) := \lim_{\tau \rightarrow t \pm 0} \dot{x}(\tau),$$

to prawo zmienności pędu układu dane jest przez następujący związek

$$(1) \quad M[\dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0)] = G\lambda,$$

gdzie

$\lambda := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T \in R^N$ — nieujemny wektor charakteryzujący wartości popędów reakcji więzów

$G := [G_1, \dots, G_n] \in R^{N \times n}$ — macierz prostokątna rzędu n , to znaczy że wektory G_1, \dots, G_n są liniowo niezależne;

$M \in R^{N \times N}$ — macierz symetryczna dodatnio określona, charakteryzująca bezwładność układu.

Wektor prędkości układu po zderzeniu $\dot{x}(t+0)$ powinien spełniać następujący oczywisty warunek

$$(2) \quad G^T \dot{x}(t+0) \geq 0,$$

który wynika z równań więzów.

Jednakże warunki (1) i (2) nie wystarczają do jednoznacznego wyznaczenia $\dot{x}(t+0)$. Aby uniknąć tej niejednoznaczności w przypadku skalaru, to znaczy gdy $n = 1$, uzupełnia się warunki (1) i (2) następującą hipotezą [1], [3], [4].

W zjawisku zderzenia występują dwie fazy. W pierwszej fazie następuje nałożenie więzu, a w drugiej oswobodzenie z tego z więzu; oswobodzenie z więzu następuje pod wpływem impulsu siły, którego wartość — zgodnie z hipotezą Poissona [3] — jest proporcjonalna do wartości popędu reakcji więzu nałożonego w pierwszej fazie.

2. Model zderzenia

Przedstawiona wyżej hipoteza, która dotyczy zderzenia dwóch ciał, nie wystarcza do analizowania równoczesnego zderzenia w układzie, w którym $n \geq 2$. W tym przypadku proponujemy rozważyć następujący model zderzenia.

W pierwszej fazie następuje nałożenie więzów (zderzenie plastyczne), a w wyniku tego powstają reakcje wynoszące $R = G\lambda_I$, które powodują zmianę początkowej prędkości układu $\dot{x}(t-0)$ na prędkość V_0 .

Pierwszą fazę zderzenia opisują relacje

$$(3) \quad M[V_0 - \dot{x}(t-0)] = G\lambda_I,$$

$$(4) \quad \lambda_I \geq 0,$$

$$(5) \quad G^T V_0 \geq 0,$$

$$(6) \quad (e_i^T G^T V_0)(e_i^T \lambda_I) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

jeśli

$$e_i^T := [\delta_{i,1} \dots, \delta_{i,n}],$$

gdzie: $\delta_{i,j}$ — symbol Kroneckera.

W drugiej fazie zderzenia następuje oswobodzenie układu z więzów pod wpływem impulsów $G\lambda_{II}$, jeśli

$$\lambda_{II} = \varepsilon \lambda_I,$$

gdzie:

ε — współczynnik restytucji zderzenia taki, że

$$0 \leq \varepsilon \leq 1;$$

zatem druga faza zderzenia opisana jest związkami

$$(7) \quad M[\dot{x}(t+0) - V_0] = \varepsilon G \lambda_1.$$

Model zderzenia opisany relacjami (3) - (7) pozwala na jednoznaczne wyznaczenie wektora $\dot{x}(t+0)$. Fakt ten wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Jeżeli $F: R^N \rightarrow R^1$ jest funkcjonałem określonym następująco:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T M x,$$

to V_0 spełnia relacje (3) - (6) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(8) \quad F(V_0 - \dot{x}(t-0)) = \min [F(z - \dot{x}(t-0)) | Gz \geq 0]$$

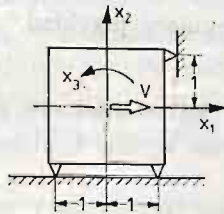
Dowód. Jeśli V_0 jest rozwiązaniem zadania (8), to na mocy twierdzenia Kuhna-Tuckera spełnia relacje (3) - (6) (porównaj [5]). Z drugiej strony, na mocy założenia symetrii i dodatniej określoności macierzy M funkcjonał F jest ściśle wypukły i różniczkowalny zatem warunki (3) - (6) pociągają za sobą (8) (porównaj [5]). ■

Ponieważ funkcjonał F jest ściśle wypukły, ciągły i koercywny ($\lim F(u) = \infty \Rightarrow \lim \|u\| = \infty$), to na mocy znanego twierdzenia [2] zadanie (8) posiada jednoznaczne rozwiązanie, a na mocy twierdzenia 1 wzory (3) - (7) wyznaczają jednoznacznie λ_1 oraz $\dot{x}(t+0)$. Prędkości układu po zderzeniu w kierunkach więzów wynoszą

$$G^T \dot{x}(t+0) = (1 + \varepsilon) G^T V_0 - \varepsilon G^T \dot{x}(t-0)$$

Przykład 1:

Należy wyznaczyć prędkości bryły sztywnej po zderzeniu idealnie sprężystym z więzami jednostronnymi; schemat bryły i więzów pokazano na rys. 1, gdzie zaznaczono również współrzędne x_1, x_2, x_3 , opisując położenie bryły. Masa i moment bezwładności



Rys. 1

bryły są równe jedności, to znaczy że

$$M = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

prędkości bryły przed zderzeniem są takie, że

$$\dot{x}(t-0) = [V, 0, 0]^T, \quad V > 0$$

równania i macierze więzów, wynikające z rys. 1 mają postać

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &\geq 0 \\ x_2 - x_3 &\geq 0; \\ x_2 + x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad G = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ prędkości bryły w kierunkach więzów wynoszą

$$G^T \dot{x}(t-0) = V \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

to nastąpi zderzenie bryły z więzami.

Na podstawie relacji (3) - (6) otrzymujemy

$$\lambda = V \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_0 = V \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

a ze wzoru (7) otrzymujemy prędkości bryły po zderzeniu ($\varepsilon = 1$)

$$\dot{x}(t+0) = V \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix};$$

Stąd mamy prędkości bryły w kierunkach więzów po zderzeniu

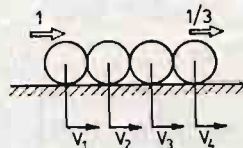
$$G^T \dot{x}(t+0) = V \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4/3 \end{bmatrix},$$

które spełniają warunek (2).

Niestety, zaproponowany tu model zderzenia, który opisują relacje (3) - (7) nie zawsze ma własność (2) co pokazuje następujący przykład.

Przykład 2:

Rozpatrywane jest jednoczesne proste środkowe zderzenie czterech idealnie sprężystych ciał (rys. 2). Masa każdego ciała wynosi 1, a prędkości tych ciał przed zderzeniem są równe $v(t-0) = [1, 0, 0, 1/3]^T$



Rys. 2

Macierz więzów, która wynika z rysunku 2, ma postać

$$G = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedynym wektorem v_0 spełniającym relacje (3 - 6) jest

$$v_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]^T,$$

wtedy

$$\lambda = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right]^T,$$

a ze wzoru (7), jeśli $\varepsilon = 1$, otrzymuje się prędkości kul po zderzeniu

$$v(t+0) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right]^T,$$

a stąd prędkości kul w kierunkach więzów

$$G^T v(t+0) = \left[1, 0, -\frac{1}{3} \right]^T.$$

Powyższy wektor nie spełnia warunku (2).

Przytoczony przykład wskazuje na to, że w modelu (3) - (7) mogą powstać prędkości $\dot{x}(t+0)$, które w dalszym ciągu powodują zderzenie z więzami, to znaczy że nie spełniają warunku więzów (2). Dlatego też zaproponowany model jednoczesnego zderzenia układu z więzami powinien być skorygowany, tak aby prędkości po zderzeniu $\dot{x}(t+0)$ spełniały warunek więzów (2).

3. Rozszerzony model zderzenia

Proponujemy następujący rozszerzony model jednoczesnego zderzenia.

Proces jednoczesnego zderzenia w układzie o wielu stopniach swobody można podzielić na etapy, składające się z dwóch faz. W pierwszej fazie każdego etapu następuje nałożenie więzów (zderzenie plastyczne), a w drugiej oswobodzenie z więzów. Jeżeli po oswobodzeniu z więzów prędkości układu nie spełniają warunków więzów, to następuje kolejny etap zderzenia.

Jeżeli przez $y_k \in R^N$ oznaczymy wektor prędkości układu na początku k -tego etapu zderzenia lub po zakończeniu $(k-1)$ -tego etapu, a przez w_k wektor prędkości układu po zakończeniu pierwszej fazy k -tego etapu zderzenia, to opis matematyczny zaproponowanego wyżej modelu zderzenia jest następujący

$$(9) \quad y_0 := \dot{x}(t-0),$$

$$(10) \quad M(w_k - y_k) = G\lambda^{(k)},$$

$$(11) \quad \lambda^{(k)} \geq 0,$$

$$(12) \quad G^T w_k \geq 0,$$

$$(13) \quad (e_i^T G^T w_k)(e_i^T \lambda^{(k)}) = 0; \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(14) \quad M(y_{k+1} - w_k) = \varepsilon G\lambda^{(k)},$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Jeżeli powtórzymy rozumowanie prowadzone dla relacji (3) - (7), to zauważymy, że ciągi $\{y_k\}$ i $\{w_k\}$ są jednoznacznie wyznaczone. Zachodzi przeto następujące twierdzenie

Twierdzenie 2. Jeżeli ciągi $\{y_k\}$, $\{w_k\}$ są wyznaczone relacjami (9) - (14), to są one zbieżne, przy czym

$$(15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k := y = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k, \\ G_y^T \geq 0;$$

szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}$ jest zbieżny, to znaczy

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)} := \lambda < \infty$$

oraz

$$(16) \quad M(y - y_0) = (1 + \varepsilon)G\lambda.$$

Dowód. Na wstępie pokażemy, że ciąg $\{y_k\}$ jest ograniczony w normie.

Ponieważ macierz M jest nieosobliwa zatem związki (10) i (14) dają

$$(17) \quad y_{k+1} = (1 + \varepsilon)w_k - \varepsilon y_k,$$

a stąd w oparciu o definicję funkcjonału F mamy

$$(18) \quad F(y_{k+1}) = (1 + \varepsilon)^2 F(w_k) + \varepsilon^2 F(y_k) - \varepsilon(1 + \varepsilon)w_k^T M y_k.$$

Dla funkcjonału F zachodzi tożsamość

$$(19) \quad F(w_k - y_k) = F(w_k) + F(y_k) - w_k^T M y_k.$$

Z drugiej strony, korzystając z wzorów (10) i (13) mamy

$$(20) \quad 2F(w_k - y_k) = 2F(y_k) - w_k^T M y_k.$$

Z wzorów (19) i (20) wynika, że

$$(21) \quad F(w_k - y_k) = F(y_k) - F(w_k),$$

zaś z (18), (19) i (21)

$$(22) \quad F(y_{k+1}) = (1 - \varepsilon^2)F(w_k) + \varepsilon^2 F(y_k).$$

Ponieważ funkcjonal F przyjmuje jedynie wartości nieujemne zatem z (21) wynika

$$F(w_k) \leq F(y_k),$$

co pociąga za sobą na mocy (22)

$$(23) \quad F(y_{k+1}) \leq F(y_k),$$

gdyż: $\varepsilon \in [0, 1]$.

Niech α_0, α_1 ($0 < \alpha_0 \leq \alpha_1$) będą odpowiednio najmniejszą i największą wartością własną macierzy M . Wtedy z definicji funkcjonału F wynika, że

$$\frac{1}{2} \alpha_0 \|z\|_2^2 \leq F(z) \leq \frac{1}{2} \alpha_1 \|z\|_2^2,$$

dla każdego $z \in R^N$.

Z nierówności (23), która zachodzi dla $k = 0, 1, 2 \dots$ otrzymujemy zatem

$$\|y_k\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha_0} F(y_k) \leq \frac{2}{\alpha_0} F(y_0) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \|y_0\|_2^2$$

co dowodzi, że ciąg $\{y_k\}$ jest ograniczony w normie.

Dalszym etapem dowodu będzie pokazanie, że ciąg $\{G^T y_k\}_{k=0}^\infty$ jest zbieżny.

Niech

$$\eta_k := G^T y_k \in R^n,$$

$$\xi_k := (G^T M^{-1} G)^{-1} \eta_k \in R^n,$$

dla $k = 1, 2, \dots$

Ciąg $\{\xi_k\}$ jest dobrze określony, gdyż macierz $G^T M^{-1} G$ jest nieosobliwa (rząd $G = n$).

Z wzorów (10) i (14) mamy

$$(24) \quad M(y_{k+1} - y_k) = (1 + \varepsilon) G \lambda^{(k)},$$

a stąd

$$(25) \quad \xi_{k+1} - \xi_k = (1 + \varepsilon) \lambda^{(k)},$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Zatem na skutek nieujemności $\lambda^{(k)}$

$$\xi_{k+1} \geq \xi_k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

ponadto

$$\|\xi_k\|_{L_2(R^n)} \leq \|(G^T M^{-1} G)^{-1} G^T\|_{L(L_2(R^n), L_2(R^n))} \|y_k\|_{L_2(R^n)} < \infty$$

Zatem ciąg $\{\xi_k\}$ jako rosnący i ograniczony posiada granicę, a więc ciąg $\{\eta_k\}$ posiada również granicę

$$\eta := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k.$$

Wprowadźmy ciąg pomocniczy $\{\zeta_k\}_{k=0}^\infty$

$$(26) \quad \zeta_k := y_k - M^{-1} G \xi_k \in R^N.$$

Udowodnimy, że

$$(27) \quad \zeta_k = \zeta_0 = y_0 - M^{-1} G (G^T M^{-1} G)^{-1} G^T y_0.$$

Istotnie z równości (24) i (26) otrzymujemy

$$M(\zeta_{k+1} - \zeta_k) + G(\xi_{k+1} - \xi_k) = (1 + \varepsilon) \lambda^{(k)},$$

zaś z (25)

$$G(\xi_{k+1} - \xi_k) = (1 + \varepsilon) \lambda^{(k)},$$

co na skutek nieosobliwości macierzy M dowodzi wzoru (27). W ten sposób pokazujemy, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = M^{-1} G (G^T M^{-1} G)^{-1} (\eta - G^T y_0) + y_0.$$

oznaczając

$$y := M^{-1} G (G^T M^{-1} G)^{-1} (\eta - G^T y_0) + y_0,$$

otrzymujemy pierwszą część tezy.

Ze wzoru (17) mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = y$$

i na mocy (12)

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} G^T w_k = G^T y.$$

Ze wzoru (25) wynika, że

$$\lambda := (G^T M^{-1} G)^{-1} (\eta - \eta_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\xi_{p+1} - \xi_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^p (\xi_{j+1} - \xi_j) = \lim_{p \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^p \lambda^{(j)},$$

co dowodzi zbieżności szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}.$$

Ostatnia zależność w tezie (16) wynika bezpośrednio z definicji λ oraz wzoru (24). W ten sposób twierdzenie 2 zostało udowodnione. ■

Udowodnione powyżej twierdzenie 2 ma kluczowe znaczenie, albowiem pozwala w sposób jednoznaczny wyznaczyć popędy reakcji więzów wywołane zderzeniem oraz prędkości układu po zderzeniu. Zmianę prędkości układu, wywołaną jednoczesnym zderzeniem układu z kilkoma więzami, określa następujący wzór

$$(28) \quad \dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - y_0),$$

zaś popędy reakcji więzów wynoszą:

$$(29) \quad G\lambda$$

gdzie

$$\lambda := (1 + \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}.$$

Ciągi wektorów $\{y_k\}$, $\{\lambda^{(k)}\}$ określone są jednoznacznie wzorami (9) - (14).

W wielu przypadkach proces zderzenia kończy się po $K \geq 1$ etapach, wówczas ciągi te mają postać taką, że

$$\lambda^{(K-1+m)} = 0,$$

$$y_{K+m} = y_K,$$

jeśli

$$m = 1, \dots, \infty.$$

Przykład 3:

Przedstawiony model zderzenia wykorzystamy do wyznaczenia popędów reakcji więzów oraz prędkości ciał po zderzeniu, które opisano w przykładzie 2.

W rozpatrywanym przypadku zderzenie kończy się po dwóch etapach ($K = 2$). Na podstawie relacji (9) - (14) można wyznaczyć pierwsze wyrazy ciągów $\{y_k\}_{k=0}^K$, $\{w_k\}_{k=0}^{K-1}$, $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$, opisujące prędkości układu i popędy reakcji więzów, powstające w trakcie

zderzenia

$$\{y_k\} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 4/9 \\ 0 & 2/3 & 4/9 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 7/9 \end{array} \right\};$$

$$\{w_k\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 5/9 \\ 1/3 & 5/9 \\ \hline 1/3 & 5/9 \end{array} \right\};$$

$$\{\lambda^{(k)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/9 \\ 0 & 2/9 \end{array} \right\}.$$

Prędkości ciał po zakończeniu zderzenia wynoszą:

$$v(t+0) = y_2 = [-1/3, 4/9, 4/9, 7/9]^T,$$

a prędkości kul w kierunkach więzów

$$G^T v(t+0) = [7/9, 0, 1/3]^T,$$

spełniają warunek (2).

Według wzoru (29) można obliczyć popędy reakcji więzów, które wynoszą ($\varepsilon = 1$)

$$\lambda = [4/3, 8/9, 4/9]^T,$$

Pokażemy teraz, że zaproponowany model zderzenia spełnia zasadę zachowania energii. W tym celu wyznaczmy zmianę energii kinetycznej układu w czasie zderzenia.

Zgodnie z twierdzeniem Kelvina zmiana energii kinetycznej układu w poszczególnych fazach każdego etapu zderzenia wynosi:

$$(30) \quad \begin{aligned} \Delta T_I^{(k)} &= -\frac{1}{2} (G\lambda^{(k)})^T (w_k + y_k), \\ \Delta T_{II}^{(k)} &= \frac{\varepsilon}{2} (G\lambda^{(k)})^T (y_{k+1} + w_k), \end{aligned}$$

gdzie:

$\Delta T_I^{(k)}$ — zmniejszenie energii kinetycznej układu w pierwszej fazie etapu;

$\Delta T_{II}^{(k)}$ — przyrost energii kinetycznej układu w drugiej fazie etapu.

Po wykonaniu przekształceń otrzymuje się wzory, stanowiące uogólnioną postać wzorów Carnota na zmianę energii kinetycznej układu

$$(31) \quad \begin{aligned} \Delta T_I^{(k)} &= -\frac{1}{2} (w_k - y_k)^T M (w_k - y_k), \\ \Delta T_{II}^{(k)} &= \frac{1}{2} (y_{k+1} - w_k)^T M (y_{k+1} - w_k), \end{aligned}$$

lub

$$(32) \quad \begin{aligned} \Delta T_I^{(k)} &= -\frac{1}{2} (G\lambda^{(k)})^T M^{-1} (G\lambda^{(k)}), \\ \Delta T_{II}^{(k)} &= \frac{\varepsilon^2}{2} (G\lambda^{(k)})^T M^{-1} (G\lambda^{(k)}). \end{aligned}$$

Całkowita zmiana energii kinetycznej układu po K etapach zderzenia wynosi

$$(33) \quad \Delta T = \sum_{k=0}^{K-1} (\Delta T_I^{(k)} + \Delta T_{II}^{(k)}),$$

a stąd po podstawieniu wzorów (31) lub (32) mamy

$$(34) \quad \Delta T = -\frac{1}{2} y_0^T M y_0 + \frac{1}{2} y_K^T M y_K,$$

lub

$$(35) \quad \Delta T = -\frac{1-\varepsilon^2}{2} \sum_{k=0}^{K-1} (G\lambda^{(k)})^T M^{-1} (G\lambda^{(k)}).$$

Ze wzoru (35) wynika, że w przypadku zderzenia niesprężystego ($0 \leq \varepsilon < 1$) energia kinetyczna zmniejsza się, a w przypadku zderzenia sprężystego ($\varepsilon = 1$) energia kinetyczna nie zmienia się. Oznacza to, że model zderzenia spełnia zasadę zachowania energii.

4. Rodzina modeli zderzenia

Przedstawiony w rozdziale 3 model zderzenia jest jednym z wielu możliwych modeli które wynikają z następujących relacji

$$(36) \quad \frac{1}{2} \dot{x}^T(t+0) M \dot{x}(t+0) = \eta \frac{1}{2} \dot{x}^T(t-0) M \dot{x}(t-0),$$

$$(37) \quad M[\dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0)] = G\lambda,$$

$$(38) \quad G^T \dot{x}(t+0) \geq 0,$$

$$(39) \quad \lambda \geq 0,$$

gdzie:

η — wskaźnik strat energii taki, że $0 \leq \eta \leq 1$, przy czym w przypadku zderzenia sprężystego $\eta = 1$.

Relacje (36) - (39) opisują prawo zachowania energii (36), prawo zachowania pędu (37), warunek zgodności więzów i prędkości układu po zderzeniu (38) oraz warunek zgodności więzów i reakcji więzów (39). Na podstawie tych relacji nie można jednoznacznie wyznaczyć prędkości układu po zderzeniu, to znaczy że relacje te opisują rodzinę modeli zderzenia, a model zaproponowany w rozdziale 3 jest jednym z wielu możliwych modeli. Dla zilustrowania tej tezy rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 4:

W dwie stojące i stykające się kule uderza kula trzecia z prędkością równą 1; kule są jednakowe, a masa każdej jest równa m . Należy wyznaczyć wszystkie prędkości kul po zderzeniu oraz reakcje więzów, które spełniają relacje (36) - (39), przy założeniu $\eta = 1$.

Z założeń zadania wynika, że

$$M = m \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(t-0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poszukiwane są wektory

$$\dot{x}(t+0) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

spełniające relacje (36) - (39). Wektory te dane są wzorami

$$\lambda = m\mu,$$

$$\dot{x}(t+0) = \dot{x}(t-0) + G\mu,$$

o ile tylko $\mu = [\mu_1, \mu_2]^T$ spełnia następujące relacje

$$\mu \geq 0,$$

$$(40) \quad 2\dot{x}^T(t-0)G\mu + \mu^T G^T G\mu = 0,$$

$$G^T \dot{x}(t-0) + G^T G\mu \geq 0.$$

Po rozpisaniu relacji (40) otrzymujemy

$$(41) \quad \begin{aligned} \mu_1 &\geq 0, & \mu_2 &\geq 0, \\ -1 + 2\mu_1 - \mu_2 &\geq 0, \\ -\mu_1 + 2\mu_2 &\geq 0, \\ -\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z wzorów (41) wynika, że $\mu_1 \geq \frac{1}{2}$. Zatem każde rozwiązanie (41) jest postaci

$$\mu_1 = \frac{1}{1-s},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1-s} t,$$

przy czym t oraz s spełniają związki

$$(42) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} &\leq s < 1, \\ \frac{1}{2} &\leq t \leq 1+s, \\ t^2 - t + s &= 0. \end{aligned}$$

Łatwo wyliczyć, że zbiór wszystkich rozwiązań (42) jest dany przez

$$t = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-4s}), \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4}.$$

Stąd wniosek, że zbiór dopuszczalnych rozwiązań (36) - (39) dany jest wzorami

$$1 \leq z \leq \frac{4}{3},$$

$$\lambda = m \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2} (z + \sqrt{4z - 3z^2}) \end{bmatrix}.$$

$$\dot{x}(t+0) = \begin{bmatrix} 1-z \\ \frac{1}{2} (z - \sqrt{4z-3z^2}) \\ \frac{1}{2} (z + \sqrt{4z-3z^2}) \end{bmatrix}.$$

W przypadku, gdy $z = \frac{4}{3}$ oraz $m = 1$ otrzymujemy

$$\lambda = \left[\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right]^T, \quad \dot{x}(t+0) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]^T.$$

Identyczny rezultat można otrzymać na podstawie zaproponowanego modelu zderzenia, który opisują relacje (3) - (7) przy założeniu $\varepsilon = 1$.

5. Zakończenie

Przedstawiony model jednoczesnego uderzenia w układzie o wielu stopniach swobody został wykorzystany do analizy ruchów wzdłużnych wagonów, wchodzących w skład długiego pociągu towarowego. Podczas rozruchu i hamowania takiego pociągu w urządzeniach sprzęgających wagony powstają duże siły i bardzo często dochodzi do całkowitego ściśnięcia amortyzatorów, znajdujących się między wagonami tak, że dalsze oddziaływanie między wagonami odbywa się poprzez sztywne korpusy amortyzatorów. Opisany tu model zderzenia ciał sztywnych został użyty do wyznaczania gwałtownych zmian prędkości wagonów, które powstają w okresie całkowitego ściśnięcia amortyzatorów.

Literatura cytowana w tekście

1. R. GRYBOŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969 r.
2. J. EKELAND, R. TEMAM, *Courex-analysis and variational problems*, North-Holland, 1976
3. J. LEYKO, *Dynamika układów materialnych*, PWN, Warszawa 1959 r.
4. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960 r.
5. W. I. ZANGWILL, *Programowanie nieliniowe*, WNT, Warszawa 1974 r.

Р е з ю м е

СОУДАРЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В СИСТЕМАХ С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В статье рассматриваются вопросы теории одновременных соударений между абсолютно твердыми телами. Предложено метод определения скоростей тел после удара и импульсивных реакций односторонних связей. Для определения неизвестных послесударных скоростей использовано гипотезу Пуассона о коэффициенте восстановления.

Summary

SOLID BODIES IMPACTS WITH MULTI-DEGREES OF FREEDOM SYSTEMS

Problems of the theory of simultaneous impacts between ideal solid bodies are considered. A method for evaluating of postshock velocities of bodies and reactions of unilateral constraints is presented. Poisson's restitution coefficient principle is used for postshock velocities evaluation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1983 roku