

## METODA WYZNACZANIA MOMENTÓW SKUPIONYCH DZIAŁAJĄCYCH NA TYCZKĘ PODCZAS SKOKU

JAN PIETRAŁA

*Instytut Sportu  
Warszawa*

### Wstęp

Dotychczasowe badania naukowe w dyscyplinie sportowej skoku o tyczce miały na uwadze dwa cele:

- poznawczy, w którym chodziło o zrozumienie zjawisk mechanicznych i biomechanicznych zachodzących w trakcie skoku, oraz
- wdrożeniowy, gdzie chodziło o ulepszenie istniejących lub opracowanie nowych technik wykonywania skoku i sprzętu.

Skok o Tyczce jest procesem, który zachodzi w układzie SKOCZEK-TYCZKA od fazy rozbiegu począwszy do przekroczenia płaszczyzny poprzeczki, ustawionej na żądanej wysokości.

Budowano, dla wymienionych celów, różne modele Skoczka i modele Tyczki [5, 2, 3]. Śledząc zjawisko pojawiania się modeli Skoczka dostrzega się wyraźnie ich ewolucję, od modeli prostych [5] począwszy, w których skoczka przedstawia się jako punkt materialny lub wahadło fizyczne, po bardziej złożone [3], w których w układzie brył sztywnych modelujących skoczka uwzględnia się działanie momentów napędowych, czyli elementy biomechaniki człowieka.

Model Tyczki stanowi zwykle pręt sprężysty, bezmasowy, na który działają siły i momenty skupione [5, 2, 3].

Opisana niżej metoda służy do wyznaczania momentów skupionych, działających na tyczkę podczas skoku, na podstawie analizy kształtu tyczki w różnych fazach skoku, przy różnych postaciach odkształconej tyczki, poczynając od tyczki nieodkształconej. Momenty skupione modelują działanie na tyczkę pary sił, pochodzącej od rąk zawodnika trzymającego tyczkę.

Przedmiotem analizy jest tyczka, której zmienna postać została zarejestrowana na kadrze filmu-16 mm podczas skoku, zaś jej kształt został zdjęty za pomocą analizatora filmów 16 mm NAC. W trakcie analizy porównuje się pomierzony kształt tyczki z kształtem obliczonym na podstawie zaproponowanego niżej modelu matematycznego tyczki. W wyniku otrzymuje się wartość momentu skupionego działającego na tyczkę w danej fazie skoku.

Opisana niżej metoda może służyć do weryfikacji modeli dynamiki skoku o tyczce oraz, perspektywicznie, do otrzymywania wytycznych do treningu sportowego skoku o tyczce.

#### Opis metody

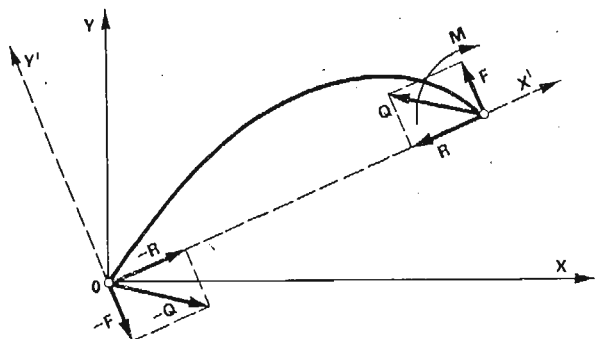
Materiałem do analizy są pojedyncze kadry filmu 16 mm przedstawiające poszczególne fazy skoku o tyczce, podczas którego zawodnik jest fotografowany. Wymaga się, aby płaszczyzna kadru była równoległa do płaszczyzny tyczki i w takich warunkach przeprowadzono rejestrację skoku. Za pomocą analizatora filmu zdejmuje się kształt tyczki w danym kadrze w postaci ciągu punktów  $(x, y)_i$ ,  $(i = 1, \dots, N)$  w ustalonym układzie współrzędnych  $OXY$  i zapisuje się do zbiorów danych, których nośnikiem są dyski elastyczne (floppy discs). Zbiory te stanowią dane wejściowe do programu na maszynie cyfrową napisanego w języku FORTRAN IV i realizującego opisaną niżej metodę wyznaczania momentów skupionych.

W poniższych rozważaniach przyjęto następujące założenia odnośnie tyczki:

- tyczka zachowuje się jako ciało doskonale i liniowo sprężyste w obszarach małych i dużych odkształceń, chociaż z różnymi współczynnikami sprężystości w obu obszarach, co jest zgodne z pomiarami przeprowadzonymi w Instytucie Sportu i podanymi w raporcie naukowym MINS/PNT/8/77,
- pomija się masę tyczki ze względu na dużą, w porównaniu z nią, masę skoczka,
- pomija się drgania tyczki,
- obserwowany doświadczalnie kształt tyczki jest wynikiem superpozycji siły działającej na swobodny koniec tyczki i momentu skupionego pochodzącego od pary sił działających w miejscach uchwytu tyczki przez zawodnika. Siła powoduje duże odkształcenia tyczki, a moment skupiony — małe, co potwierdziły dane doświadczalne.

Rys. 1. przedstawia przykładowo kształt tyczki w analizowanej fazie skoku. Od strony zawodnika na tyczkę działają:

- siła  $Q$ , zaczepiona w przybliżeniu na swobodnym końcu tyczki,
- siły reakcji  $-R$  i  $-F$  będące składowymi siły  $Q$  i działające na podparty koniec tyczki,
- moment skupiony  $M$  wywołany parą sił w miejscach uchwytu tyczki przez zawodnika i przyłożony w ich środku.



Rys. 1. Siły i momenty działające na tyczkę w analizowanej fazie skoku

Przeprowadźmy obliczenia w układzie tyczki  $OXY'$  prostokątnym, w którym oś  $X'$  jest skierowana wzdłuż cięciwy łączącej oba końce tyczki. Jak wynika z [2, 7], kształt tyczki w danym momencie czasu zależy od wartości siły  $R$  i momentu skupionego  $M$ .

Istota metody, wymienionej w tytule, polega na wyznaczeniu różnicy między kształtem obserwowanym tyczki, a kształtem obliczonym, który tyczka przyjmuje tyłko pod działaniem siły  $R$  działającej wzdłuż cięciwy łączącej oba końce tyczki. Kształt tyczki pod działaniem siły  $R$  oblicza się na podstawie modelu Love'a [4] załącznik 1. W wyniku dostaje się funkcję

$$y = f(s) \quad \text{dla } 0 \leq s \leq L, \quad (1)$$

w układzie współrzędnych  $OSY$  gdzie  $s$  — długość mierzona wzdłuż tyczki o kształcie wyliczonym z modelu Love'a.

Przyjmuje się, że  $f(s)$  opisuje kształt pochodzący wyłącznie od działania na tyczkę pary sił o momencie skupionym  $M$ .

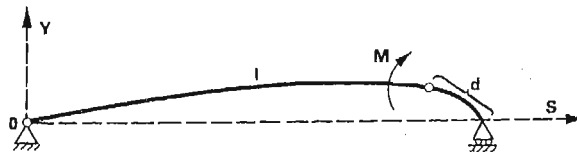
Następnie z kształtu  $y = f(s)$  tyczki oblicza się wartość momentu skupionego  $M$ . Do tego celu przyjmuje się założenie, że tyczkę można przedstawić w postaci belki swobodnej podpartej na podporach przegubowych: nieprzesuwnej (koniec podparty tyczki) i przesuwnej (koniec swobodny tyczki) — rys. 2.

Jak wiadomo z teorii sprężystości i wytrzymałości materiałów [7] belka tak podparta, pod działaniem momentu skupionego  $M$  przyłożonego w odległości  $d$  od końca umocowanego na podporze przesuwnej, przyjmuje kształt opisany równaniami:

$$y = -\frac{M}{6L \cdot E \cdot J} s^3 + As + B \quad \text{w obszarze } 0 \leq s \leq L-d, \quad (2)$$

$$y = -\frac{M}{6L \cdot E \cdot J} s^3 + Cs^2 + Ds + E \quad \text{w obszarze } L-d \leq s \leq L \quad (3)$$

gdzie stała  $A, B, C, D, E$  wyznacza się z warunków brzegowych układu i warunku ciągłości rozwiązań na brzegach obszarów.



Rys. 2. Kształt tyczki pod działaniem momentu skupionego

Jak widać, współczynniki przy 3-ciej potęgce  $s$  w obu wyrażeniach (2 - 3) zależą wyłącznie od wartości momentu skupionego  $M$  i parametrów tyczki:  $L, E, J$ , gdzie:

- $L$  — długość tyczki,
- $E$  — moduł Younga tyczki w zakresie niewielkich odkształceń,
- $J$  — moment bezwładności przekroju poprzecznego tyczki.

Wartość współczynników przy 3-ciej potęgce zmiennej  $s$  oblicza się aproksymując otrzymany wcześniej kształt  $y = f(s)$  wielomianem 3-go stopnia:

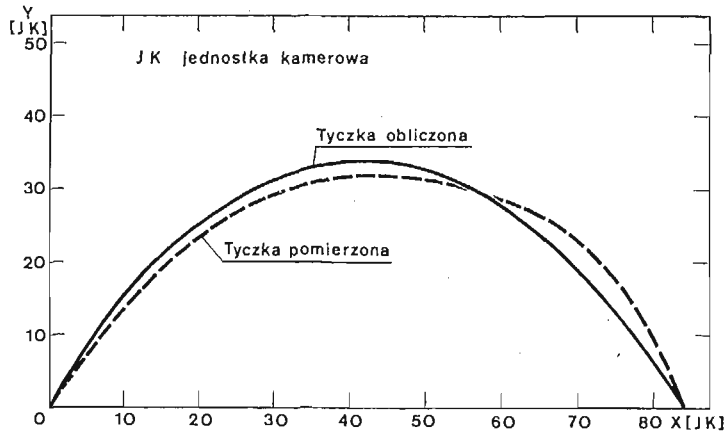
$$y = as^3 + bs^2 + cs + d. \quad (4)$$

Porównując, dla kształtu  $y = f(s)$ , współczynnik  $a$  ze współczynnikiem przy 3-ciej potędze zmiennej  $s$  w wyrażeniach (2-3) otrzymuje się następującą wartość momentu skupionego:

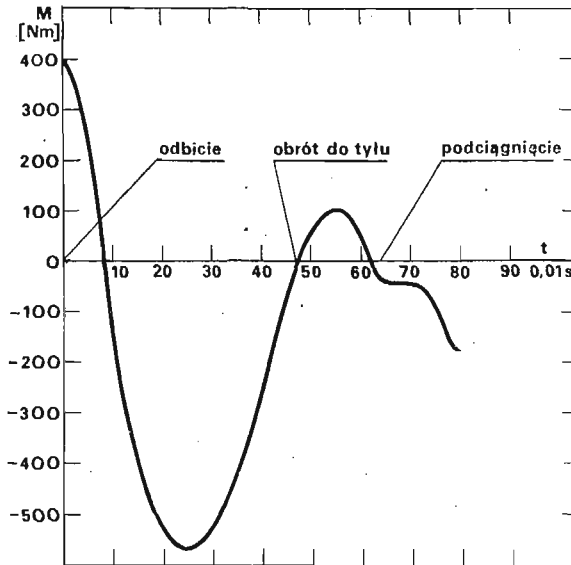
$$M = -6L \cdot E \cdot J \cdot a. \quad (5)$$

#### Przykład wyników

Dla tyczki o parametrach  $L = 5,03$  m,  $E = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ,  $J = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ , której kształty: pomierzony i obliczony (bez działania momentu skupionego), pokazuje rys. 3. obliczono współczynnik  $a$ . Wynosi on  $a = 1,2 \cdot 10^{-2}$ , stąd  $M = 500$  Nm. Jest to analiza jednego kadru filmowego.



Rys. 3. Kształty tyczek: pomierzony i obliczony w układzie tyczki



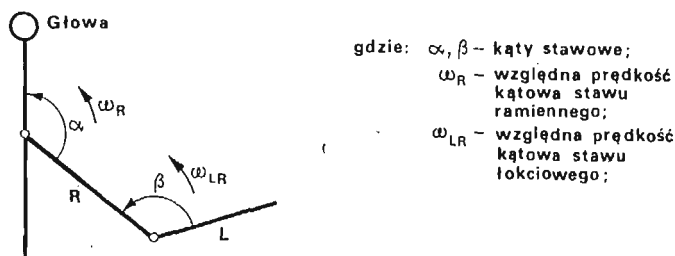
Rys. 4. Zmiana momentu skupionego działającego na tyczkę w czasie skoku

Rys. 4 przedstawia wyniki analizy całego skoku, dla wybranego zawodnika, od fazy odbicia począwszy (chwila  $t = 0$ ) przez fazę lotu, do chwili odłączenia tyczki od zawodnika. Skok na wysokość 555 cm był udany. Analizowano co czwartą klatkę filmu.

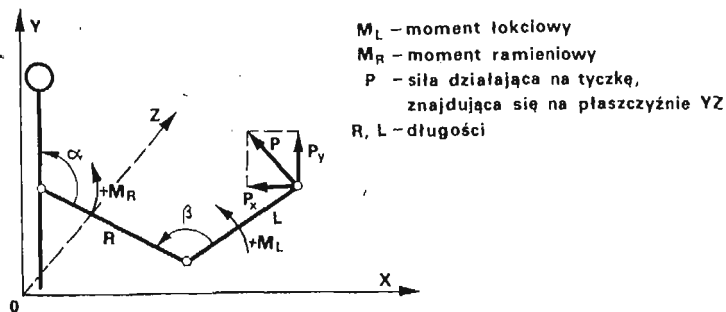
### Dyskusja wyników

Obliczmy poniżej, jakiego rzędu maksymalne momenty mogą być rozwijane przez zawodnika, co posłuży nam do weryfikacji wyników uzyskanych za pomocą omówionej powyżej metody.

Rozważmy przypadek gdy jedno ramię zawodnika jest unieruchomione, a drugie jest w ruchu — jak na rys. 5:



Rys. 5. Przypadek zginania ręki w stawie ramiennym i zginania w stawie łokciowym zawodnika. Ręka ruchoma. Płaszczyzna strzałkowa



Rys. 6. Siły i momenty napędowe dla ramienia ruchomego

W tym przypadku działają siły i momenty napędowe jak na rys. 6. Interesuje nas siła  $P$ , jedna z pary, którą zawodnik działa na tyczkę, oraz jej składowe: pionowa  $P_y$  i pozioma  $P_x$ . Obliczenia przeprowadzone dla przypadku  $ZR + ZL$  (zginanie ramieniowe + zginanie łokciowe) dają:

$$P_x = - \left[ \frac{M_R(\alpha)}{R} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} + \frac{M_L(\beta)}{L} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha + \beta)} \right], \quad (6)$$

$$P_y = \frac{M_R(\alpha)}{R} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} - \frac{M_L(\beta)}{L} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin(2\alpha + \beta)}, \quad (7)$$

a dla przypadku  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ :

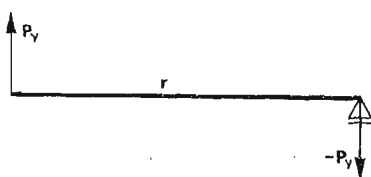
$$P_x = \frac{M_L(\beta = 90^\circ)}{L}, \quad (8)$$

$$P_y = \frac{M_R(\alpha = 90^\circ)}{R}. \quad (9)$$

Biorąc maksymalną wartość momentów, dostajemy dla  $P_y$ :

$$P_y = \frac{M_{R\max}}{R}. \quad (10)$$

Para sił  $P_y, -P_y$  powoduje odkształcenie całej tyczki w płaszczyźnie  $YZ$ , w której obserwuje się kształt tyczki.



Rys. 7. Para sił działających na tyczkę

Moment skupiony  $M$  pochodzący od pary sił  $P_y, -P_y$  osiąga wartość maksymalną w sytuacji jak na rys. 7, gdy można założyć, że na odcinku chwytu  $r$  tyczka jest nieodkształcona, chwyt leży w płaszczyźnie  $YZ$ , a siły  $P_y$  i  $-P_y$  są do niego prostopadłe. Wtedy maksymalny moment skupiony  $M_{\max}$ , który wywiera zawodnik przy opisanym układzie rąk: jedna wyprostowana, druga — z kątami ugięć  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ , wynosi:

$$M_{\max} = \frac{M_{R\max}}{R} \cdot r \quad (11)$$

Dla wartości  $M_{R\max} = 190 \text{ Nm}$  (według pomiarów przeprowadzonych w Instytucie Sportu w Warszawie),  $R = 0,21 \text{ m}$  i długości chwytu  $r = 0,60 \text{ m}$  otrzymuje się  $M_{\max} = 540 \text{ Nm}$ .

Wartość momentu skupionego, obliczona na podstawie kształtu tyczki jest więc tego samego rzędu, co obliczona na podstawie analizy zmian kątów stawowych zawodnika. Sugeruje to prawdziwość założeń poczynionych w modelu tyczki i poprawność wyników uzyskiwanych opisaną metodą.

#### Zastosowania

Przedstawiona metoda pozwala obliczać przebieg momentu skupionego w czasie  $t$  skoku na atakowaną wysokość  $h_{at}$ :  $M(h_{at}; t)$  i — dzięki programowi komputerowemu — robić to szybko i automatycznie. Może ona służyć do weryfikacji modeli skoku o tyczce, w których uwzględnia się oddziaływanie zawodnika na tyczkę przez parę sił działających w miejscach uchwytu.

Bezpośrednim efektem praktycznym może być informacja dla trenera o wartości różnicy między momentem wybieranym przez skoczka na tyczkę w danej fazie lotu, a momentem wymaganym (wzorcowym) dla pokonania atakowanej wysokości:

$$\Delta M = M(h_{at}; t) - M_{wz}(h_{at}; t) \quad (12)$$

gdzie:

$M(h_{at}; t)$  — moment skupiony wywierany obliczony opisaną metodą

$M_{wz}(h_{at}; t)$  — moment skupiony wymaganym (wzorcowym).

Obecnie otwartą jest kwestia, skąd wziąć funkcję  $M_{wz}(h_{at}; t)$ , czyli przebieg wymaganego momentu skupionego w czasie skoku na atakowaną wysokość. Istnieją dwie drogi jej uzyskania:

- pierwsza: budowa modelu skoku o tyczce, uwzględniającego działanie momentów mięśniowych zawodnika na tyczkę i wyznaczenie w eksperymencie modelowym funkcji  $M_{wz}(h_{at}; t)$ , lub
- druga: adaptacja istniejących modeli, spełniających powyższe wymagania. W literaturze [3], w której omawia się model skoku o tyczce (gdzie zawodnika modeluje się jako układ brył sztywnych, w których działają momenty napędowe, a tyczkę jak w niniejszej pracy) sugeruje się, że możliwa jest optymalizacja funkcji  $M_{wz}(h_{at}; t)$ .

Jako dane wejściowe do tego modelu służą parametry antropologiczne skoczka, parametry mechaniczne tyczki i warunki początkowe skoku.

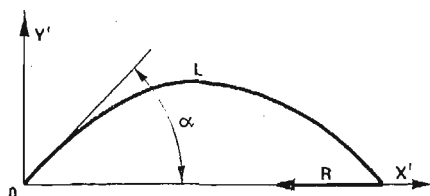
Obie drogi wymagają kontynuacji prac badawczych.

#### Wniosek

Przedstawiona metoda wyliczania momentów skupionych wytwarzanych przez parę sił pochodzących od działania zawodnika na tyczkę może być skutecznym narzędziem weryfikacji modeli matematycznych uwzględniających wymieniony efekt biomechaniczny, a w perspektywie — źródłem danych do treningu skoku o tyczce.

#### Załącznik 1

Pręt sprężysty o długości  $L$ , bezmasowy, umocowany jednym końcem na podporze przegubowej nieprzesuwnej, a na którego koniec swobodny działa siła  $R$ , skierowana wzdłuż cięciwy łączącej oba końce, przyjmuje kształt, który w układzie współrzędnych  $OX'Y'$  można zapisać [4] w postaci parametrycznej (rys. 8):



Rys. 8. Działanie siły  $R$  na pręt sprężysty bezmasowy

$$x = \sqrt{\frac{B}{R}} [-u + 2 \{E \operatorname{am}(u + K) = E \operatorname{am} K\}] \quad (\text{z.1})$$

$$y = -2k \sqrt{\frac{B}{R}} \operatorname{cn}[u + K] \quad (\text{z.2})$$

$$\sqrt{\frac{B}{R}} = \frac{L}{2K(k)} \quad (\text{z.3})$$

gdzie:

$L$  — długość pręta,

$B$  — sztywność pręta,

$R$  — siła działająca na swobodny koniec pręta wzdłuż cięciwy łączącej oba końce pręta,

$u$  — bezwymiarowa długość pręta związana z długością  $s$  pręta, mierzona wzdłuż linii jego ugięcia, zależnością

$$u = s \sqrt{\frac{R}{B}} \quad (\text{z.4})$$

$k$  — moduł, związany z kątem nachylenia stycznej do tyczki w punkcie zamocowania, zależnością

$$k = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{z.5})$$

$K = K(k)$  — całka eliptyczna zupełna pierwszego rodzaju [7],

$E = E(\varphi, k)$  — całka eliptyczna niezupełna drugiego rodzaju,

$\operatorname{am}(u, k)$  — funkcja — amplituda Jacobiego,

$\operatorname{cn} u$  — cosinus eliptyczny Jacobiego.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. ANTONIEWICZ, *Tablice funkcji dla inżynierów*, Warszawa, PWN, 1980.
2. M. HUBBARD, *An iterative numerical solution for the elastica with casually mixed inputs*; Trans. of ASME, Vol. 47, March 1980.
3. M. HUBBARD, *Dynamics of the pole vault*; J. Biomechanics, Vol. 13, G. B. 1980.
4. A. G. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, N. Y., Dover Publ. 1944.
5. J. MORAWSKI, M. BUCZEK, K. WIKLIK, T. ŚLIWIŃSKI, *Badania modelowe skoku o tyczce*, Raport Instytutu Sportu, Warszawa, 1977.
6. R. V. SOUTHWELL, *An introduction to the theory of elasticity*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1941.
7. J. WALCZAK, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, t. I, Warszawa, PWN, 1978.

#### Резюме

#### МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МОМЕНТОВ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ШЕСТЬ ВО ВРЕМЯ ПРЫЖКА С ШЕСТОМ

В статье представлен метод определения сосредоточенных моментов действующих на шест во время прыжка спортсмена, на основании анализа форм шеста в различных фазах прыжка для различных видов его деформации начиная с момента отсутствия деформации. Принимается,



что наблюдаемый вид шеста, известный по кинематографическому анализу прыжка, является результатом наложения двух воздействий: действия на свободный конец шеста только сосредоточенной силы, действующей вдоль дуги соединяющей оба конца шеста (модель ЛОВА(4)), — действия на шест только сосредоточенного момента, являющегося результатом пары сил возбужденных спортсменом в точках захвата. Сравнивая наблюдаемую форму шеста с формой рассчитанной по модели ЛОВА определяется вид шеста как результат действия на шест одного сосредоточенного момента. Исходя из полученной формы шеста определяется значение сосредоточенного момента действующего на шест в данный момент времени. Представлен пример измерения сосредоточенного момента во время прыжка и проведена предварительная проверка предлагаемого метода. Предложенный метод может служить проверке моделей прыжка с шестом, в которых принимается во внимание воздействие спортсмена на шест как пары сил действующих в точках захвата.

#### Summary

#### THE METHOD OF EVALUATING THE MOMENTS APPLIED TO THE POLE DURING THE POLE-VAULT.

The paper presents the method of evaluating moments applied to the pole during pole-vault. The method is based on the analysis of the pole shape during different phases of vault, starting from the phase when the pole is not deflected. It is assumed that the pole shape, obtained by means of kinematographic analysis, is the effect of superposition of two phenomena. Firstly, the force applied to the free end of the pole, acting in the direction of the chord joining both ends (Love's model [4]). Secondly, the moment originated from the couple of forces applied to the pole by the vaulter's grip, acting on non-deflected pole. Comparing the pole shape observed and the shape evaluated basing on Love's model, the shape resulting from the moment action only can be obtained. Then, the value of moment acting on the pole with respect to time can be determined. An example of the moment transient during the vault is presented. A method of analysis of the pole-vault models, that take into account the action of vaulter, is then proposed.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 marca 1982 roku*

---