

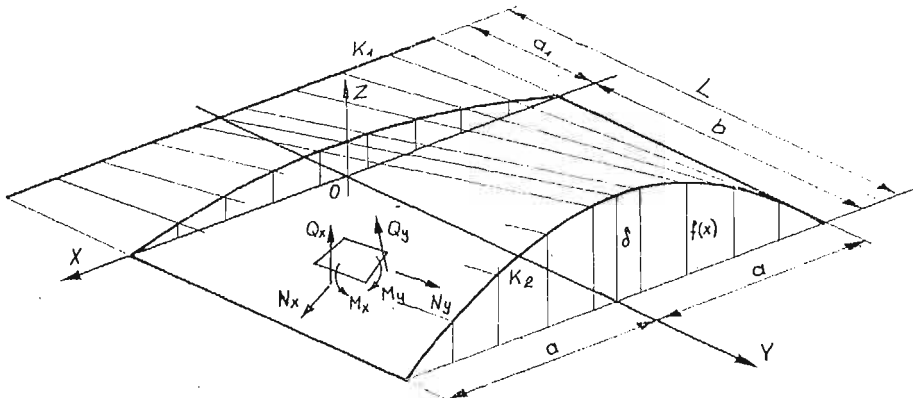
ZGINANIE POWŁOKI KONOIDALNEJ

JAKUB MARCINOWSKI

Wrocław

1. Wstęp

Powierznię konoidalną (Rys. 1) zakreśla w przestrzeni prosta tworząca poruszająca się równoległe do płaszczyzny prowadzącej (OYZ na rys. 1) po kierownicach K_1 i K_2 . Kierownice te leżą w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny OXZ i kierownica K_1 jest odcinkiem prostym (rozważa się też konoidy z dwiema kierownicami zakrzy-



Rys. 1

wionymi). Konoida jest powierzchnią prostokreślną, zwichrowaną. Tu rozpatrywać się będzie konoidę paraboliczną (kierownica K_2 jest parabolą), mało wyniosłą, to znaczy, że stosunek jej wyniosłości δ do boku b jest mniejszy od $1/5$ ($1/3 \div 1/8$). Powłoki konoidalne posiadają wiele zalet. Znalazły zastosowanie do przekryć dużych hal przemysłowych i widowiskowych. Stosuje się je także do budowy zapór wodnych. Z łatwością można się ich doszukać w elementach poszycia aparatów latających i sprzętu pływającego.

2. Różniczkowe równania równowagi powłok mało wyniosłych

Przyjęcie założenia małej wyniosłości pozwala na zastosowanie równań technicznej teorii powłok WŁASOWA [1].

Dla powłok mało wyniosłych, o równaniu powierzchni środkowej: $z = z(x, y)$, wygodnie jest wprowadzić jako współrzędne krzywoliniowe linie: $x = \text{const}$ $y = \text{const}$. Dla

dowolnej powierzchni nie będą to linie krzywizn głównych, a warunek ortogonalności będą spełniały jedynie w przybliżeniu.

Podstawowe związki geometryczne dla tak opisanej powierzchni przyjmą postać następującą [3]:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &\approx \alpha_2 \approx 1, \\
 \vec{i}_x &= \vec{i}_x + z_{,x} \vec{i}_z, \\
 \vec{i}_y &= \vec{i}_y + z_{,y} \vec{i}_z, \\
 \vec{n} &= -z_{,x} \vec{i}_x - z_{,y} \vec{i}_y + \vec{i}_z, \\
 k_{xx} &= z_{,xx}, \quad k_{yy} = z_{,yy}, \\
 k_{xy} &= z_{,xy}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie:

α_1, α_2 — współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni,

$\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{n}$ — wektory bazowe powierzchni,

k_{xx}, k_{yy}, k_{xy} — krzywizny linii współrzędnych i skręcenie powierzchni (odpowiednio).

Związki między odkształceniami a składowymi wektora przemieszczenia można zapisać w następującej postaci [2]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= u_{,x} - z_{,xx} w, \\
 \varepsilon_y &= v_{,y} - z_{,yy} w, \\
 \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - 2z_{,xy} w, \\
 \kappa_x &= -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Założenie małej grubości i ortogonalności wybranych kierunków pozwala przyjąć związki fizyczne w najprostszej postaci [1]:

$$\begin{aligned}
 N_x &= B(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \\
 N_y &= B(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\
 N_{xy} = N_{yx} = S &= \frac{B \cdot (1 - \mu)}{2} \cdot \gamma_{xy}, \\
 M_x &= D \cdot (\kappa_x + \mu \kappa_y), \\
 M_y &= D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \\
 M_{xy} = M_{yx} = H &= D \cdot (1 - \mu) \kappa_{xy}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie:

$$B = \frac{E \cdot h}{1 - \mu^2}, \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)},$$

E — moduł Younga,

h — grubość powłoki,

μ — współczynnik Poissona.

Równania równowagi mają postać następującą [1]:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + S_{y,y} + P_x &= 0, \\ S_{x,x} + N_{y,y} + P_y &= 0, \\ Q_{y,y} + Q_{x,x} + N_x \cdot k_{xx} + N_y \cdot k_{yy} + 2S \cdot k_{xy} + P_z &= 0, \\ M_{y,y} + H_{x,x} - Q_y &= 0, \\ M_{x,x} + H_{y,y} - Q_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie:

P_x, P_y, P_z — składowe obciążenia zewnętrznego,

Q_x, Q_y — siły poprzeczne.

Wprowadźmy wielkości bezwymiarowe z „falał”, zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P \cdot a^4}{D} \cdot \frac{\delta}{a}, & v &= \tilde{v} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P \cdot a^4}{D} \cdot \frac{\delta}{a}, \\ w &= \tilde{w} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P \cdot a^4}{D}, & z &= \tilde{z} \cdot \delta, \\ x &= \tilde{x} \cdot a, & y &= \tilde{y} \cdot b, & \lambda &= \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie:

δ — wyniosłość powłoki,

a — wymiar planu powłoki w kierunku osi X ,

b — wymiar planu powłoki w kierunku osi Y ,

$P = P_z$ — składowa pionowa obciążenia.

Przyjmijmy:

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = P = \text{const}$$

Jeśli do równań (2.4) podstawimy zależności (2.3) i (2.2) oraz wykorzystamy związki (2.5), to otrzymamy następujący układ równań na poszukiwane przemieszczenia bezwymiarowe (wszystkie wielkości tu występujące są bezwymiarowe choć pominięto w nich „faleł”):

$$\begin{aligned} \Delta^2 \lambda \cdot u_{xx} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\Delta^2}{\lambda} u_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \Delta^2 \cdot v_{xy} + \\ - \lambda \cdot w_x \cdot (r + \mu t) - w \cdot (\lambda r_x + s_y) - (1-\mu) \cdot w_y \cdot s = 0, \\ \frac{\delta^2}{\lambda} v_{yy} + \frac{1-\mu}{2} \delta^2 \cdot \lambda \cdot v_{xx} + \frac{1+\mu}{2} \Delta^2 \cdot u_{xy} - (t + \mu \cdot r) \cdot w_y \\ - (t_y + \lambda \cdot s_x) \cdot w - \lambda \cdot s(1-\mu) \cdot w_x = 0, \\ \lambda \cdot \omega \cdot w_{xxxx} + \frac{2}{\lambda} \cdot \omega \cdot w_{xxyy} + \frac{\omega}{\lambda^3} w_{yyyy} + 12 \cdot \Delta^2 \cdot \lambda [r^2 + \\ + t^2 + 2(1-\mu)s^2 + 2\mu r t] \cdot w + 12 \cdot [(r + \mu t) \cdot \lambda \cdot u_x + \\ + (t + \mu r) \cdot v_y + (1-\mu) \cdot s \cdot (\lambda v_x + u_y)] - 10^4 \cdot \lambda \cdot \omega = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie:

$$r = \frac{\delta^2}{a^2} z_{xx}, \quad s = \frac{\delta^2}{ab} z_{xy}, \quad t = \frac{\delta^2}{b^2} z_{yy},$$

$$\Delta = \frac{\delta}{a}, \quad \omega = \frac{h^2}{a^2}, \quad (\cdot)_x = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \quad (\cdot)_y = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}.$$

Do rozważań wprowadza się następujące sposoby zamocowania krawędzi powłoki:

1) Krawędź sztywno zamocowana:

(dla krawędzi o normalnej zewnętrznej — X)

$$u = v = w = 0, \quad w_{,x} = 0.$$

2) Krawędź zamocowana przegubowo:

$$u = v = w = 0, \quad M_x = 0.$$

3) Krawędź swobodna:

$$N_x = 0, \quad S = 0, \quad Q_x + H_{,y} = 0, \quad M_x = 0.$$

Warunki te można zapisać w przemieszczeniach korzystając ze związków (2.3) i (2.2).

Po rozwiązaniu układu (2.6), przy odpowiednich warunkach brzegowych, ze związków (2.2) wyznaczmy składowe odkształcenia, a następnie z równań (2.3) znajdziemy siły przekrojowe w powłoce.

3. Rozwiązanie

Układ równań (2.6) rozwiążemy zastępując operatory tego układu operatorami różnicowymi, zapisując te ostatnie za pomocą schematów różnicowych centralnych. Równania te zapisuje się dla wszystkich wewnętrznych węzłów siatki różnic skończonych. Wielkości przemieszczeń węzłów zewnętrznych, pojawiające się w układzie, eliminuje się za pomocą odpowiednich warunków brzegowych.

Równanie powierzchni środkowej parabolicznej powłoki konoidalnej (Rys. 1) ma następującą postać:

$$z(x, y) = \delta(y + a_1) \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 \cdot L}, \quad (2.7)$$

Zatem:

$$z_{,xx} = -\frac{2\delta}{a^2} \cdot \frac{y + a_1}{L},$$

$$z_{,yy} = 0, \quad (2.8)$$

$$z_{,xy} = -\frac{2 \cdot \delta}{a^2} \cdot \frac{x}{L}.$$

Wielkości występujące w równaniach (2.6), w tym przypadku przyjmują postać następującą:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= -\frac{A}{a}(\tilde{y}b + a_1), \\ \tilde{s} &= -A \cdot \tilde{x}, \quad \tilde{t} = 0, \\ \tilde{s}, \tilde{x} &= -A, \quad \tilde{s}, \tilde{y} = \tilde{r}, \tilde{x} = 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

gdzie:

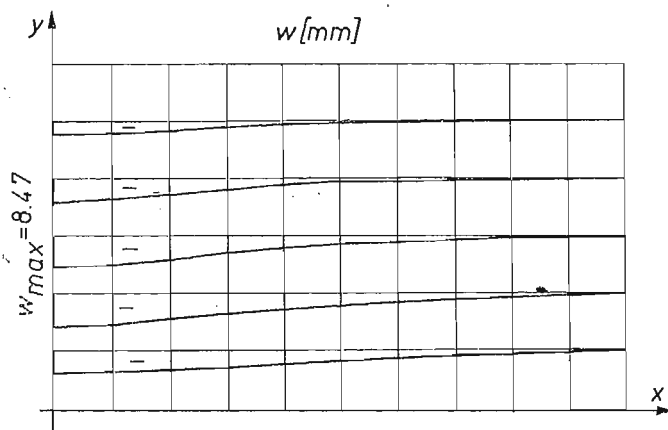
$$A = \frac{2 \cdot \delta^2}{a \cdot L}.$$

Rozwiązano powłokę żelbetową ($\mu = 0,167$, $E = 3,0 \cdot 10^{10}$ N/m²) o następujących wymiarach: $a = 15,0$ m, $b = 9,0$ m, $L = 12$, Om, $\delta = 3,0$ m, $h = 0,10$ m. Powłoka jest obciążona równomiernym obciążeniem $P_z = P = -4$ kN/m².

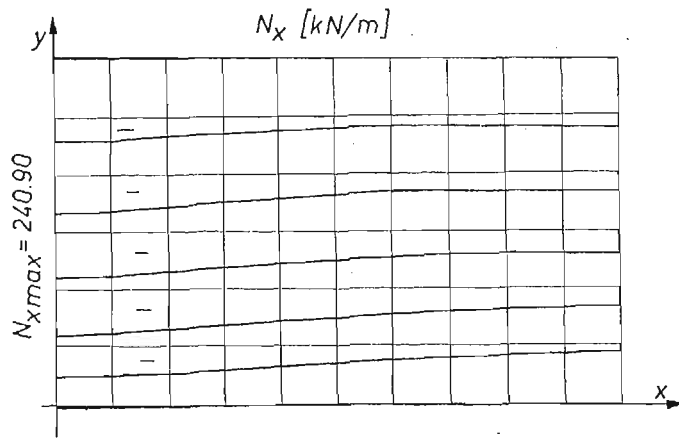
4. Wyniki

Rysunki 2, 3, 4 przedstawiają ugięcia i wybrane siły przekrojowe w powłoce podpartej zawiasowo wzdłuż wszystkich czterech krawędzi. Rysunki 5, 6, 7 przedstawiają te same wielkości dla powłoki o czterech krawędziach sztywno zamocowanych. Kolejne rysunki (8, 9, 10) dotyczą powłoki podpartej jedynie wzdłuż krawędzi prostoliniowych (łuki — swobodne), przy czym, krawędzie podparcia są sztywno zamocowane. Ostatnie trzy rysunki przedstawiają charakterystyczne wielkości dla powłoki podpartej zawiasowo wzdłuż dwóch krawędzi prostoliniowych.

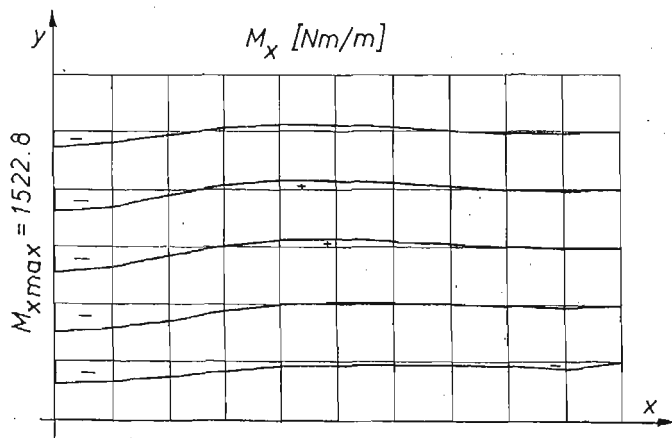
Wszystkie prezentowane wyniki dotyczą takiego podziału powłoki, że nieznanne wartości składowych przemieszczeń wyznacza się w 50-ciu punktach co odpowiada 150-ciu stopniom swobody (5 węzłów w kierunku osi X i 10 — w kierunku osi Y), przy czym wykorzystano symetrię powłoki. Przeprowadzono kontrolę zbieżności otrzymanych rozwiązań. Rys. 14 przedstawia zależność ugięcia w środku powłoki od zmiany gęstości podziału



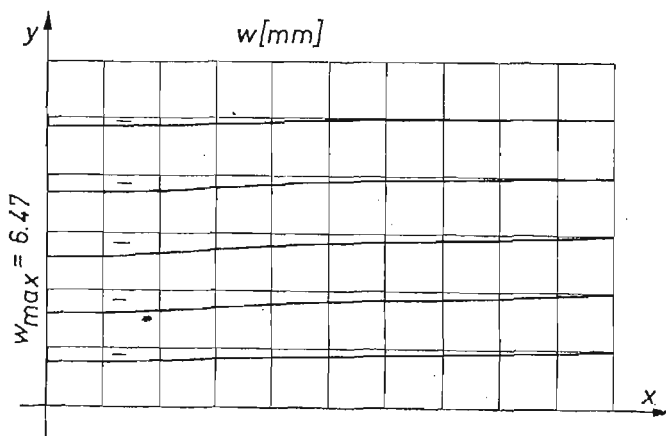
Rys. 2



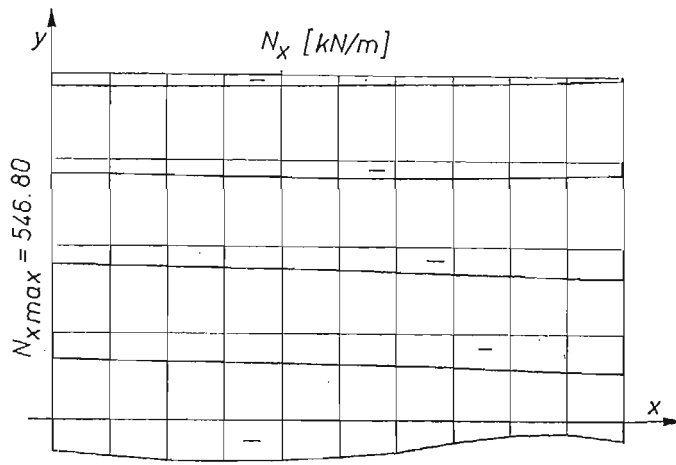
Rys. 3



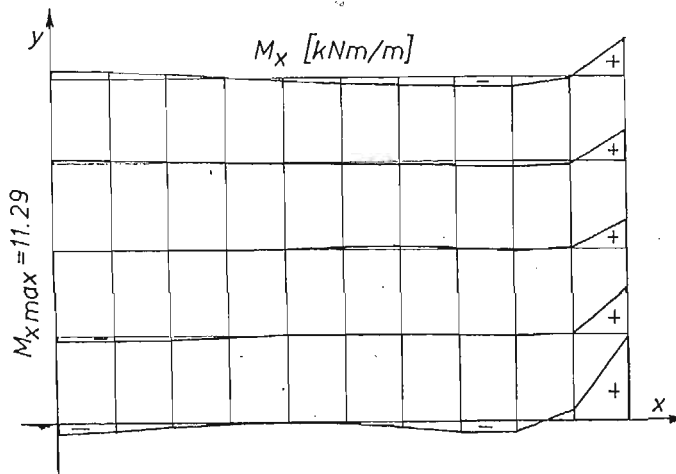
Rys. 4



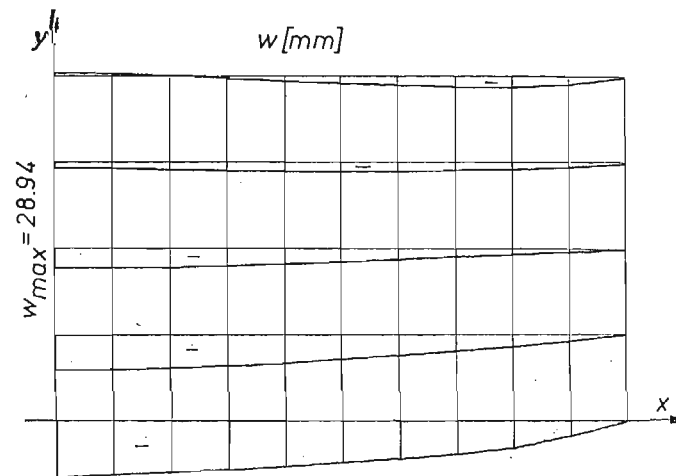
Rys. 5



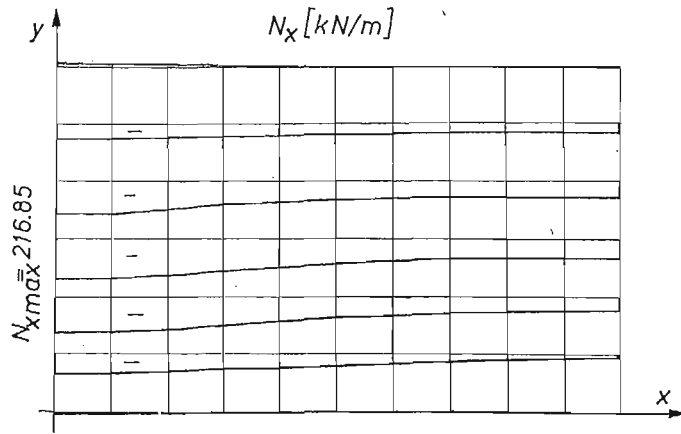
Rys. 9



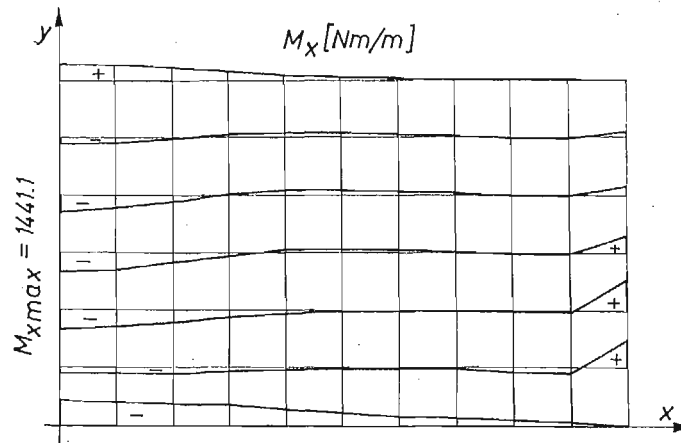
Rys. 10



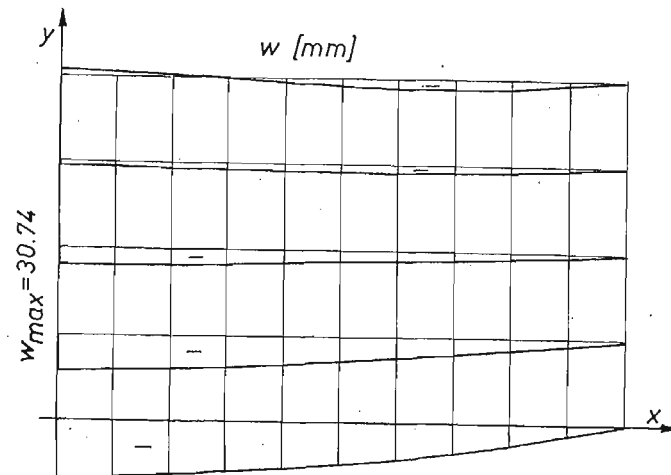
Rys. 11



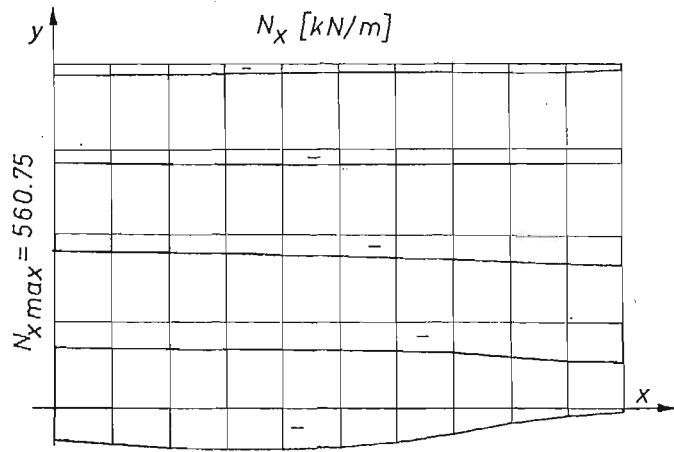
Rys. 6



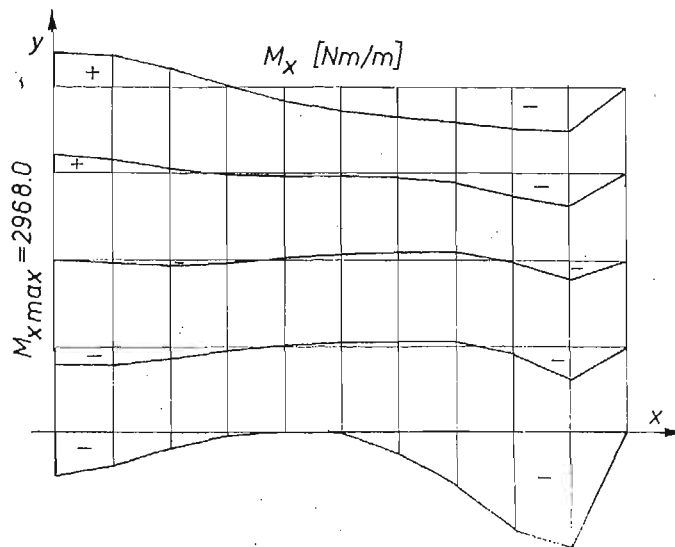
Rys. 7



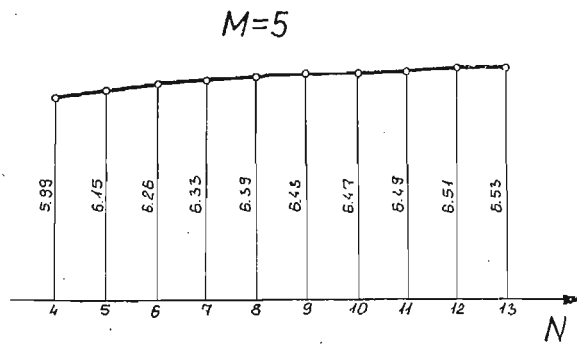
Rys. 8



Rys. 12

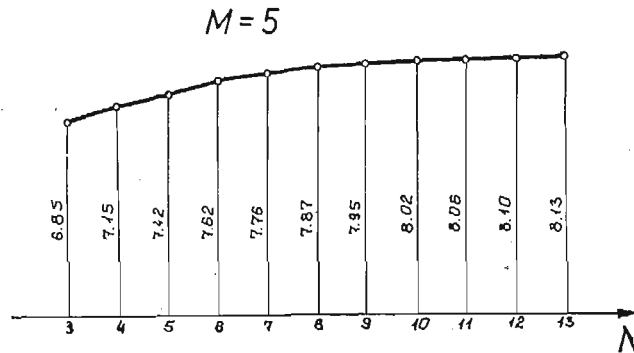


Rys. 13



Rys. 14

siatki w kierunku osi X (podział w kierunku osi Y stały i równy $M = 5$) dla powłoki podpartej przegubowo wzdłuż wszystkich czterech krawędzi. Wykres przedstawiony na rys. 15 dotyczy powłoki sztywno zamocowanej na wszystkich krawędziach. Oba wykresy potwierdzają zbieżność rozwiązania dla przemieszczeń. W przypadku dwóch pozostałych wariantów



Rys. 15

tów podparcia, tj. podparcia przegubowego wzdłuż krawędzi prostoliniowych oraz sztywnego zamocowania tych krawędzi, uzyskane wyniki nie wykazują tak dobrej zbieżności. Aby uzyskać rozwiązanie bardziej dokładne należałoby zastosować bardziej gęsty podział, co z kolei wymagałoby wykorzystania w obliczeniach pamięci zewnętrznych MC (w obliczeniach, których wyniki tu przedstawiono, wykorzystano jedynie pamięć operacyjną MC ODRA 1305).

Znane autorowi prace [4÷8] zawierające rozwiązania stanu zgięciowego powłoki konoidalnej dotyczą innych warunków podparcia niż te przedstawione wyżej. Praca stanowi więc istotne uzupełnienie znanych rozwiązań o kilka nowych, nie bez znaczenia praktycznego, przypadków.

5. Uwagi końcowe

Z przedstawionych wyników wynika, że powłoka konoidalna (nawet o tak dużej rozpiętości), mimo swej niewielkiej grubości, z powodzeniem przenosi znaczne obciążenia. Wyraźnie zaznacza się sklepieniowy charakter pracy powłoki, a sposób zamocowania ma wpływ na wielkość sił przekrojowych głównie w pobliżu krawędzi podparcia. Naprężenia w powłoce wywołane siłami osiowymi znacznie przekraczają część naprężeń od momentów zginających i momentu skręcającego.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. NOWOŻIŁOW, *Teoria tonkich obłoczek*, Sudpromgiz, Leningrad 1951.
2. A. A. NAZAROW, *Osnovy teorii i metody raschieta pologich obłoczek*, Strojizdat, Leningrad 1966.
3. C. BREBBIA, J. CONNOR, *Geometrically nonlinear finite-element analysis*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM2, Apr. 1969 pp. 463 - 483.

4. R. W. CLOUGH, C. P. JOHNSON, *A finite element approximation for the analysis of thin shells*, Int. J. Solids Struct., 1968, Vol. 4, pp. 43 - 60.
5. C. B. WILBY, H. N. NAQUI, *Structural analysis of conoidal shells*, Structural Engineer, 50, 1972, No. 5, pp. 197 - 201.
6. A. P. NIKOŁAJEW, N. G. BANDURIN, *K rasczetu oboloczek metodom koniecznego elementa*, Stroit. Mech. i Rasczet Sooruz., No. 5, 1980, s. 21 - 25.
7. A. JU. OSTROWSKI, *Pribliznonyj rasczet konoidalnoj oboloczki*, Stroit. Mech. i Rasczet Sooruz., No. 4, s. 13 - 18, 1970.
8. W. D. GAJZER, *Rasczet pokrytij iz oboloczek otriciatelnoj kriwizny*, Stroit. Mech. i Rasczet Sooruz. No. 4, 1970, s. 9 - 13.

Резюме

ИЗГИБ КОНОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе решается задача изгиба пологой, коноидальной оболочки. Решение получено из системы дифференциальных уравнений в частных производных для перемещений с учетом упрощений Власова. Статический изгиб оболочки решено методом конечных разностей. Рассматриваются разные случаи опор оболочки. Составлены графики перемещений и внутренних сил образующихся в равномерно нагруженной оболочке.

Summary

BENDING OF A CONOIDAL SHELL

Bending of a shallow conoidal shell is discussed in the paper. The solution has been obtained from a system of partial differential equations of the linear theory of shells in the form simplified according to that of Vlasov's. The static bending of the shell has been solved by finite difference method. Various cases of support are considered. The diagrams of displacements and internal forces for uniformly loaded shell have been presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1981 roku
