

OSIOWO SYMETRYCZNE ZAGADNIENIA MIKROPOLARNEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI

MONIKA WĄGROWSKA (WARSZAWA)

*Institut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

1. Wstęp

W pracy tej rozpatrujemy mikropolarny ośrodek sprężysto-plastyczny, który może przenosić naprężenia zarówno siłowe, jak i momentowe. Ośrodek taki może być matematycznym modelem np. kompozytów o strukturze ziarnistej. Wyróżniamy ośrodki ze związanymi obrotami i ze swobodnymi obrotami. Jeżeli ośrodek jest ze związanymi obrotami, to ziarenka mogą się obracać o tyle, na ile pozwala im pole przemieszczeń. Z kolei, gdy na ziarna działają momenty, ich obrót określa zmianę przemieszczeń. Uplastycznienie takiego ośrodka podobne jest do uplastycznienia ośrodka klasycznego, z tym, że należy uwzględnić wpływ naprężeń momentowych. Warunki uplastycznienia dla ośrodków ze związanymi obrotami badali M. Miścicu [5] i A. Sawczuk [7].

Jeżeli ośrodek charakteryzuje się swobodnymi obrotami, jego zachowanie nie daje się sprowadzić do ośrodka klasycznego. W tym przypadku obroty ziarenek kompozytu mogą spowodować zarówno zmiany w polu przemieszczeń w macierzy jak i być niezależne od odkształceń, czy przemieszczeń macierzy. Zgodnie z założeniami teorii sprężystości, po zdjęciu obciążeń, przemieszczenia i obroty powrócą do położenia początkowych, czyli stanu naturalnego. W przypadku przekroczenia określonych wartości naprężeń siłowych bądź (oraz) momentowych, pewien obszar rozpatrywanego ciała lub w przypadku szczególnym całe ciało może ulec uplastycznieniu. Dla ośrodków ze swobodnymi obrotami będziemy mogli wyróżnić niezależne przekroczenie granicy sprężystości ze względu na przemieszczenia, jak to ma miejsce w teorii klasycznej, jak i ze względu na obroty. Wyróżnimy więc dwa niezależne sposoby uplastycznienia częściowego i skonstruujemy dwa kryteria uplastycznienia, a mianowicie kryterium uplastycznienia poślizgowego, gdy po zdjęciu obciążeń nie znika symetryczna część tensora odkształcenia, oraz rotacyjnego związanego z nieznikaniem tensora skręcenia i antysymetrycznej części tensora odkształcenia. Podobszar ośrodka będzie ulegał uplastycznieniu całkowitemu, gdy równocześnie zostaną przekroczone wartości obu kryteriów.

W strefie sprężystej przyjmiemy jako model matematyczny takiego ciała ośrodek typu Cosseratów, centrosymetryczny, izotropowy i jednorodny. Następnie wprowadzimy odpowiednie kryteria uplastycznienia częściowego i całkowitego i wyprowadzimy odpowiednie równania konstytutywne w zakresach plastycznych. Należy wspomnieć, że ośro-

dek plastyczny typu Cosseratów rozpatrywał H. Lippmann [6], nie specyfikując liczby kryteriów uplastycznienia; mogła się ona zmieniać od 1 do 18. W przykładzie przyjęto 2 warunki. Szczegółowo rozpatrzmy zagadnienia osiowo symetryczne, pokażemy wpływ naprężeń momentowych na powstawanie i zasięg strefy uplastycznienia poślizgowego.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia [1]: $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \beta, \varepsilon$ — stałe materiałowe, $\sigma, \mu, \gamma, \kappa, \mathbf{1}$ — tensory, odpowiednio, naprężeń siłowych, naprężeń momentowych, odkształcenia, skręcenia i jednostkowy, $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ij}, \delta_{ij}$ — składowe powyższych tensorów, odpowiednio, w układzie współrzędnych x^i ($i = 1, 2, 3$).

2. Kryteria uplastycznienia

Rozpatrzmy ośrodek mikropolarny, centrosymetryczny, izotropowy i jednorodny. W tym przypadku poczwórna wartość gęstości energii sprężystej przyjmuje postać następującą:

$$4U = \frac{1}{\mu} \sigma_{(ij)} \sigma_{(ij)} + \frac{1}{\alpha} \sigma_{\langle ij \rangle} \sigma_{\langle ij \rangle} - \frac{\lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \sigma_{ii} \sigma_{kk} + \frac{1}{\gamma} \mu_{(ij)} \mu_{(ij)} + \frac{1}{\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{\beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)} \mu_{ii} \mu_{kk}. \quad (2.1)$$

Energia ta jest sumą energii objętościowej oraz drugiego składnika, który jest uogólnieniem energii odkształcenia postaciowego

$$U = U_v + U_p, \quad (2.2)$$

gdzie

$$4U_p = \frac{1}{\mu} s_{(ij)} s_{(ij)} + \frac{1}{\alpha} s_{\langle ij \rangle} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{\gamma} m_{(ij)} m_{(ij)} + \frac{1}{\varepsilon} m_{\langle ij \rangle} m_{\langle ij \rangle} + \frac{2}{3(2\gamma + 3\beta)} \mu_{ii} \mu_{kk}, \quad (2.3)$$

$t_{(ij)}, t_{\langle ij \rangle}$ — odpowiednio symetryczna i antysymetryczna część tensora o składowych t_{ij}, s_{ij} — składowe dewiatora tensora naprężeń siłowych, m_{ij} — składowe dewiatora tensora naprężeń momentowych. Dokonajmy rozkładu U_p na dwa składniki

$$U_p = U_{p1} + U_{p2}, \quad (2.4)$$

gdzie

$$4U_{p1} = \frac{1}{\mu} s_{(ij)} s_{(ij)}, \quad (2.5)$$

jest gęstością energii odkształcenia postaciowego poślizgowego oraz

$$4U_{p2} = \frac{1}{\alpha} s_{\langle ij \rangle} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{\gamma} m_{(ij)} m_{(ij)} + \frac{1}{\varepsilon} m_{\langle ij \rangle} m_{\langle ij \rangle} + \frac{2}{3(2\gamma + 3\beta)} \mu_{ii} \mu_{kk}, \quad (2.6)$$

jest gęstością energii odkształcenia postaciowego rotacyjnego. Przyjmujemy warunki uplastycznienia w następującej postaci:

kryterium uplastycznienia poślizgowego

$$U_{p1} = k_0^2 \wedge U_{p2} < I_0^2, \quad (2.7)$$

kryterium uplastycznienia rotacyjnego

$$U_{p1} < k_0^2 \wedge U_{p2} = l_0^2, \quad (2.8)$$

oraz kryterium uplastycznienia całkowitego

$$U_{p1} = k_0^2 \wedge U_{p2} = l_0^2. \quad (2.9)$$

Powyższe kryteria spełniają wszystkie warunki wynikające z teorii niezmienników.

W ośrodkach mikroplarnych, centrosymetrycznych w przypadku modelu sprężysto plastycznego mogą wystąpić pod wpływem działających obciążeń następujące strefy:

a) strefa sprężysta, b) strefa sprężysta i uplastycznienia poślizgowego, c) strefa uplastycznienia poślizgowego, d) strefa sprężysta i uplastycznienia rotacyjnego, e) strefa uplastycznienia rotacyjnego, f) strefa sprężysta i uplastycznienia poślizgowego oraz rotacyjnego o pustym przecięciu stref uplastycznienia, g) strefa sprężysta i uplastycznienia poślizgowego i rotacyjnego o niepustym przecięciu; wtedy pojawia się strefa uplastycznienia całkowitego, h) strefa sprężysta i wyłącznie całkowitego uplastycznienia, i) strefa całkowitego uplastycznienia.

3. Równania konstytutywne teorii plastyczności odkształceniowej

W dalszym ciągu pracy będziemy rozpatrywać zagadnienia szczegółowe, w których wykorzystamy teorię odkształceniową. Dlatego nie będziemy tu rozpatrywać równań konstytutywnych teorii płynięcia, a sformułujemy równania konstytutywne teorii odkształceniowej, w poszczególnych strefach uplastycznienia.

Zakładamy brak wzmocnienia, izotropowość, centrosymetrię i jednorodność w strefie sprężystej. Odkształcenia objętościowe są tylko sprężyste.

3.1. Strefa uplastycznienia poślizgowego. Zakładamy tu, że dewiator symetrycznej części tensora odkształcenia jest proporcjonalny do odpowiadającego mu dewiatora symetrycznej części tensora naprężenia siłowego. Odkształcenia skręcenia i antysymetryczna część odkształcenia są sprężyste. Przy tych założeniach otrzymujemy następujące stowarzyszone równania konstytutywne w ośrodku uplastycznionym poślizgowo:

$$\begin{aligned} 2\mu\Gamma_{\langle IJ \rangle} &= (1 + \varphi_1)s_{\langle IJ \rangle}, \quad 2\alpha\Gamma_{\langle IJ \rangle} = s_{\langle IJ \rangle}, \\ (2\mu + 3\lambda)\gamma_{kk} &= \sigma_{kk}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$2\kappa_{IJ} = \frac{1}{\gamma}\mu_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{\varepsilon}\mu_{\langle IJ \rangle} - \frac{\beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)}\mu_{kk}\delta_{IJ},$$

lub w postaci równoważnej

$$\Gamma_{\langle IJ \rangle} + \Gamma_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{3}\gamma_{kk}\delta_{IJ} = \gamma_{IJ} = \frac{1 + \varphi_1}{2\mu}s_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{2\alpha}s_{\langle IJ \rangle} + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{kk}\delta_{IJ}, \quad (3.2)$$

oraz (3.1)₄ bez zmiany.

Γ_{IJ} są składowymi dewiatora tensora odkształcenia γ , $\frac{1 + \varphi_1}{2\mu}$ jest współczynnikiem materiałowym ośrodka uplastycznionego; należy go wyznaczyć dla każdego ośrodka oddzielnie. $\varphi_1 \rightarrow 0$, gdy przechodzimy do ośrodka sprężystego, Również równania (3.2) stają się wtedy równaniami konstytutywnymi ośrodka Cosseratów.

3.2. Strefa uplastycznienia rotacyjnego

dotatkowe postulaty:

— równania konstytutywne w ramach symetrycznej części tensora odkształcenia są analogiczne jak w ramach strefy sprężystej,

— antysymetryczna część tensora odkształcenia oraz tensor skrętno-giętny będą powiązane z tensorami opisującymi stan naprężenia nowymi zależnościami

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\alpha} s_{\langle ij \rangle} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1+\varphi_z}{2\gamma} \mu_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_z}{2\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{(1+\varphi_z)\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu_{kk} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (3.3)$$

gdzie: $1+\varphi_z$ jest wielkością bezwymiarową, która wpływa na modyfikację równań konstytutywnych. Należy ją wyznaczyć dla każdego ośrodka oddzielnie. $\varphi_z \rightarrow 0$, gdy przechodzimy od strefy uplastycznienia rotacyjnego do strefy sprężystej.

3.3. Strefa całkowitego uplastycznienia. W obszarze uplastycznionym całkowicie przestały być sprężyste zarówno przemieszczenia, jak i obroty; została zaburzona całkowicie struktura materiału. W strefie uplastycznienia całkowitego obowiązują jednocześnie wszystkie postulaty dotyczące stref uplastycznienia poślizgowego i rotacyjnego, tzn.:

— odkształcenia objętościowe są sprężyste,

— dewiator symetrycznej części tensora odkształcenia jest proporcjonalny do dewiatora symetrycznej części tensora naprężenia,

— antysymetryczna część tensora odkształcenia jest proporcjonalna do antysymetrycznej części tensora naprężenia,

— odpowiednie części tensora skręcenia są proporcjonalne do odpowiednich części tensora naprężeń momentowych.

Przy tych założeniach równania konstytutywne dla obszaru ośrodka uplastycznionego całkowicie przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij} &= \frac{1+\varphi_1}{2\mu} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_1}{2\alpha} s_{\langle ij \rangle}, \\ \gamma_{kk} &= \frac{1}{2\mu+3\lambda} \sigma_{kk}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1+\varphi_2}{2\gamma} \mu_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{(1+\varphi_2)\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu_{kk} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (3.4)$$

Równania te możemy przedstawić w równoważnej postaci:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1+\varphi_1}{2\mu} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\alpha} s_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{3(2\mu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1+\varphi_2}{2\gamma} \mu_{\langle ij \rangle} + \frac{1+\varphi_2}{2\varepsilon} \mu_{\langle ij \rangle} - \frac{(1+\varphi_2)\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu_{kk} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (3.5)$$

$\varphi_1(\cdot)$ i $\varphi_2(\cdot)$ są funkcjami bezwymiarowymi, które z chwilą przejścia do granicy tej strefy ze strefą: sprężystą — dążą jednocześnie do zera, ze strefą uplastycznienia poślizgowego $\varphi_2 \rightarrow 0$, ze strefą uplastycznienia rotacyjnego $\varphi_1 \rightarrow 0$. Proponowane równania łączą

bezpośrednio stan naprężenia ze stanem odkształcenia w postaci skończonych związków — spełniają one zasadę obiektywności materiałowej oraz inne zasady, które powinny spełniać równania konstytutywne (spełnienie tych zasad od razu wynika z postaci równań — różnią się one od równań w strefie sprężystej tylko współczynnikami).

Zespół równań równowagi w połączeniu ze związkami geometrycznej zgodności wraz z odpowiednim dla danej strefy kryterium uplastycznienia oraz równaniami konstytutywnymi stanowi zamknięty układ równań, z którego przy odpowiednich warunkach brzegowych jesteśmy w stanie wyznaczyć naprężenia, odkształcenia oraz zasięg danej strefy uplastycznienia.

Dla ośrodków mikropolarnych uplastycznionych jesteśmy w stanie podać również postać równań konstytutywnych w ramach teorii plastycznego płynięcia [4].

4. Zagadnienia osiowo symetryczne

W przypadku zagadnień dwuwymiarowych i osiowej symetrii odkształcenia ciała są funkcjami tylko promienia i opisane są przez wektory $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, 0)$, $\boldsymbol{\varphi} = (0, 0, \varphi_z)$ i ich pochodne. Równania równowagi w każdej ze stref przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r &= 0, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} + X_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r} + \mu_{rz,r} + \frac{\mu_{rz}}{r} + Y_z = 0.$$

Układ równań geometrycznej zgodności redukuje się w naszym przypadku do postaci

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} - \gamma_{\theta\theta} &= r\gamma_{\theta\theta,r}, \\ r\gamma_{r\theta,r} - r\kappa_{rz} &= -(\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

W ramach strefy sprężystej równania równowagi można zredukować do postaci, która jest uogólnieniem równań Naviera klasycznej teorii sprężystości [1]:

$$\begin{aligned} (2\mu + \alpha) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_r + X_r &= 0, \\ (\mu + \alpha) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_\theta - 2\alpha \frac{d\varphi_z}{dr} + X_\theta &= 0, \\ \gamma + \varepsilon \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \varphi_z - 4\alpha\varphi_z + \frac{2\alpha}{r} (ru_{\theta,r} + u_\theta) + Y_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Z takim stanem przemieszczeń i obrotów związany jest następujący stan naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu_{rz} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (2\mu + \lambda)u_{r,r} + \frac{\lambda}{r}u_r, & \sigma_{\theta\theta} &= (2\mu + \lambda)\frac{1}{r}u_r + \lambda u_{r,r}, \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\left(u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r\right), & \sigma_{r\theta} &= \mu\left(u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \alpha\left(u_{\theta,r} + \frac{u_\theta}{r}\right) - 2\alpha\varphi_z, \\
 \sigma_{\theta r} &= \mu\left(u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right) - \alpha\left(u_{\theta,r} + \frac{1}{r}u_\theta\right) + 2\alpha\varphi_z, \\
 \kappa_{zr} &= (\gamma - \varepsilon)\varphi_{z,r}, & \kappa_{rz} &= (\gamma + \varepsilon)\varphi_{z,r}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Obszar ośrodka ulegnie uplastycznieniu, gdy spełniony zostanie jeden z warunków uplastycznienia:

a) poślizgowego

$$\frac{1}{3}(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}) + \frac{1}{4}(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2 = 2\mu k^2, \tag{4.6}$$

b) rotacyjnego

$$\frac{1}{\gamma}(\mu_{rz} + \mu_{zr})^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\mu_{rz} - \mu_{zr})^2 = 8l^2, \tag{4.7}$$

c) całkowitego, gdy równocześnie są spełnione warunki (4.6) i (4.7).

Stowarzyszone związki konstytutywne w ramach teorii plastyczności odkształceniowej przyjmą postać

a) w strefie uplastycznienia poślizgowego

$$(\gamma + \varepsilon)\kappa_{rz} = \mu_{rz}, \quad \kappa_{zr} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\theta r} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu}\sigma_{\langle\theta r\rangle} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{\langle\theta r\rangle}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu}\sigma_{\langle r\theta\rangle} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{\langle r\theta\rangle}, \\
 \gamma_{rr} &= \frac{1 + \varphi_I}{6\mu}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1 + \varphi_I}{6\mu}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 \gamma_{zz} &= \frac{1 + \varphi_I}{6\mu}(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

b) w strefie uplastycznej rotacyjnie otrzymamy

$$\begin{aligned}
 2\mu\gamma_{rr} &= \sigma_{rr} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 2\mu\gamma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 2\mu\gamma_{zz} &= \sigma_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\
 2\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{\mu}\sigma_{\langle r\theta\rangle} + \frac{1 + \varphi_2}{\alpha}\sigma_{\langle r\theta\rangle},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$2\gamma_{\theta r} = \frac{1}{\mu} \sigma_{(\theta r)} + \frac{1 + \varphi_2}{\alpha} \sigma_{\langle \theta r \rangle}, \quad (4.9)$$

[cd.]

$$2\kappa_{rz} = \frac{1 + \varphi_2}{\gamma} \mu_{(rz)} + \frac{1 + \varphi_2}{\varepsilon} \mu_{\langle rz \rangle}, \quad \kappa_{zr} = 0,$$

c) w strefie całkowitego uplastycznienia

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \frac{1}{3} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{6\mu} (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{zz} &= \frac{1 + \varphi_1}{6\mu} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{3(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(r\theta)} + \frac{1 + \varphi_2}{2\alpha} \sigma_{\langle r\theta \rangle}, \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(\theta r)} + \frac{1 + \varphi_2}{2\alpha} \sigma_{\langle \theta r \rangle}, \\ \kappa_{rz} &= \frac{1 + \varphi_2}{2\gamma} \mu_{(rz)} + \frac{1 + \varphi_2}{2\varepsilon} \mu_{\langle rz \rangle}, \quad \kappa_{zr} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

5. Wpływ naprężeń momentowych na powstanie strefy uplastycznienia poślizgowego

Rozpatrzmy grubościenny nieskończony cylinder znajdujący się w pewnym polu mikropolarnych momentów objętościowych $\mathbf{Y} = (0, 0, \gamma_2)$ przy jednoczesnym braku sił objętościowych działających na niego oraz wszelkich obciążeń działających na jego wewnętrznej poboczniczy. Przyjmując do opisu walcowy układ współrzędnych przy dodatkowym założeniu o niezależności przyczyn od kąta θ i zmiennej z otrzymujemy, że cylinder będzie znajdował się w płaskim stanie odkształcenia przy dodatkowej osiowej symetrii. Przyjmując γ_z w postaci $Hlu \frac{b}{r}$ zespół przyczyn możemy przedstawić w postaci:

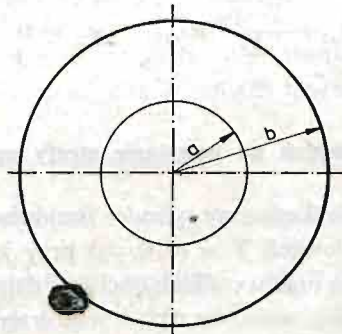
$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a) &= 0, & \sigma_{rr}(b) &= 0, \\ \mu_{rz}(a) &= 0, & \mu_{rz}(b) &= 0, \\ \sigma_{r\theta}(a) &= 0, & u_\theta(b) &= 0, \\ X &= (0, 0, 0), & Y &= (0, 0, Y_z), \end{aligned} \quad (5.1)$$

W strefie sprężystej wektory przemieszczenia i obrotu wyrażają się następująco $\mathbf{u} = (0, u_\theta, 0)$, $\varphi = (0, 0, \varphi_z)$, gdzie

$$\begin{aligned} u_\theta &= A_2 r + \frac{1}{r} B_2 + \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)\eta^2} \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{2} r \left(\ln \eta r - \frac{1}{H} \right) \right], \\ \varphi_z &= \frac{1}{\eta} A_1 I_0(\eta r) - \frac{1}{\eta} B_1 K_0(\eta r) - \frac{H}{(\gamma + \varepsilon)\eta^2} \ln \eta r + \frac{1}{4\alpha} (4\alpha A_2 - H \ln \eta b), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$A_i, B_i (i = 1, 2)$ są stałymi, które wyznaczamy z warunków brzegowych, $\eta^2 = \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}$, $I_0(\cdot), I_1(\cdot)$ są funkcjami Bessela urojonego argumentu, zerowego i pierwszego rzędu, $K_0(\cdot)$ i $K_1(\cdot)$ funkcjami MacDonalda. Powyższym wektorom przemieszczenia i obrotu odpowiada następujący stan naprężeń siłowych i momentowych:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= -2B_2 \frac{\mu}{r^2} - (\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - \frac{H}{4} + \frac{H}{2} \ln(\eta^2 r b), \\ \sigma_{\theta r} &= -2B_2 \frac{\mu}{r^2} - \frac{\gamma + \varepsilon}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] + \\ &\quad + \frac{4\alpha}{(\mu + \alpha)\eta} [A_1 I_0(\eta r) - B_1 K_0(\eta r)] - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln(\eta^2 r b) \right), \\ \mu_{rz} &= (\gamma + \varepsilon) [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - \frac{H}{r(\gamma + \varepsilon)\eta^2} J, \\ \mu_{zr} &= (\gamma - \varepsilon) [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - \frac{H}{r(\gamma + \varepsilon)\eta^2} J. \end{aligned} \quad (5.3)$$



Rys. 1

Przyjmując konkretne wartości stałych materiałowych oraz promieni wewnętrznej i zewnętrznej pobocznic walca $a = 0,3$, i $b = 1,0$

$$\lambda = 0,3, \quad E = 2 \cdot 10^6, \quad \alpha = 0,1, \quad \xi = 0,2, \quad \vartheta = 2 \cdot 10^3, \quad \varepsilon = 0,1,$$

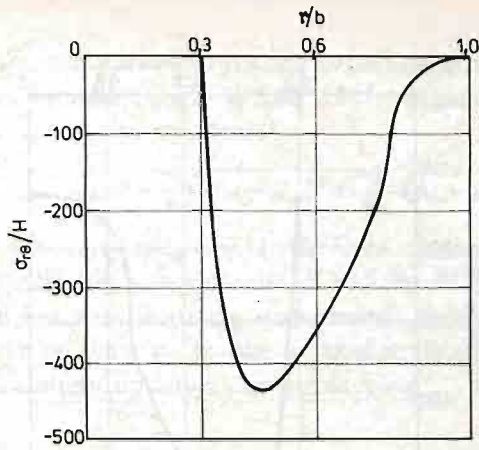
gdzie

$$\vartheta = \frac{\gamma(2\gamma + 3\beta)}{\gamma + \beta}, \quad \xi = \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)},$$

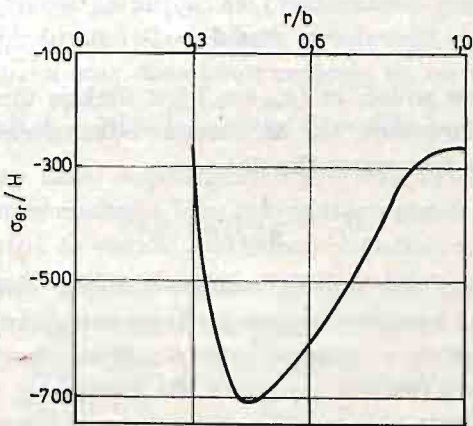
otrzymujemy następujące wartości liczbowe dla pozostałych stałych materiałowych i stałych całkowania:

$$\begin{aligned} \gamma &= 833,3, \quad \eta^2 = 4,79 \cdot 10^{-4}, \quad \mu = 7,69, \\ A_1 &= -15,07, \quad B_1 = 0,0587, \quad B_2 = 135,46. \end{aligned}$$

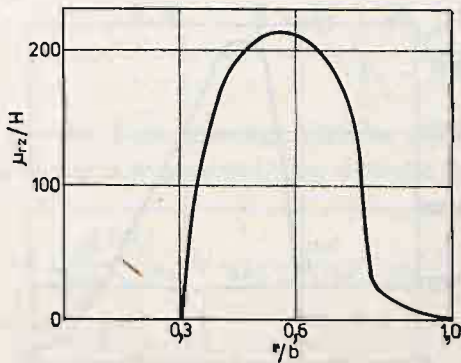
Wykresy naprężeń siłowych i momentowych dla $a = 0,3$, $b = 1,0$ pokazano na rysunkach 2 - 5.



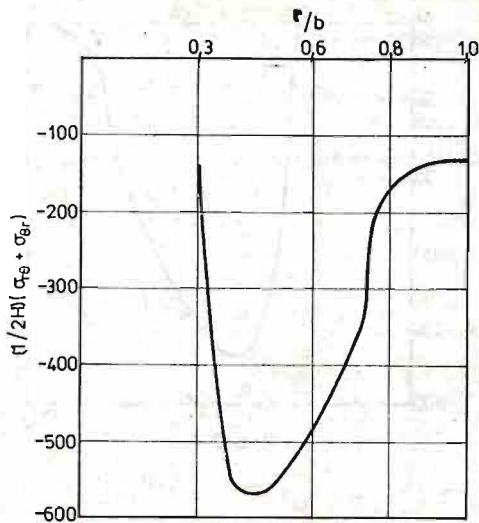
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



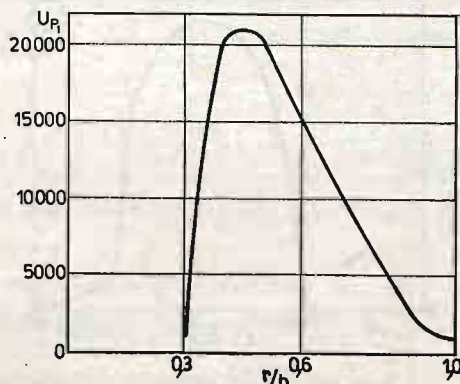
Rys. 5

Z uzyskanych wyników widać, że $(\sigma_{r0} + \sigma_{0r})$ jest funkcją ujemną osiągającą dla $\varrho \in (0,3, 1,0)$ minimum. Powoduje to, że energia odkształcenia postaciowego poślizgowego redukująca się w tym przypadku do:

$$U_{p1} = \frac{1}{8\mu} (\sigma_{r0} + \sigma_{0r})^2 \quad (4.14)$$

w ramach strefy sprężystej jest funkcją rosnąco-malejącą, osiągającą maksimum dla $r = \varrho$. Oznacza to, zgodnie z przyjętym przez nas kryterium uplastycznienia poślizgowego, że jeśli wcześniej nie pojawi się w cylindrze uplastycznienie rotacyjne, to dla odpowiednio dużej wartości H dla $r = \varrho$ (wartość promienia dla którego u_{p1} osiąga maksimum) pojawi się strefa uplastycznienia poślizgowego, która wraz ze wzrostem wartości H będzie rozwijała się w kierunku wewnętrznej i zewnętrznej poboczniczy cylindra. Przyjmując

$k = \frac{2}{10^2 \sqrt{\sigma\mu}}$, $l = \frac{2}{100}$ uzyskamy, że dla $H = 2,06 \cdot 10^{-5}$ energia odkształcenia posta-



Rys. 6

ciowego poślizgowego osiągnie wartość krytyczną oznaczającą pojawienie się strefy uplastycznienia poślizgowego, natomiast dla $H \leq 2,06 \cdot 10^{-5}$ energia odkształcenia rotacyjnego redukująca się w tym przypadku do wyrażenia:

$$\frac{1}{8\alpha} (\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r})^2 + \frac{1}{8\sigma} (\mu_{rz} + \mu_{zr})^2 + \frac{1}{8\varepsilon} (\mu_{rz} - \mu_{zr})^2 \quad (4.15)$$

nie osiągnie nigdy wartości krytycznej $l_0 = 2 \cdot 10^{-2}$, co oznacza niemożność powstania w ośrodku strefy uplastycznionej rotacyjnie dla $H = 2,06 \cdot 10^{-5}$.

Taki zespół obciążeń jest więc ilustracją stwierdzenia, że w wyniku działających obciążeń typu momentowego możemy w ośrodku uzyskać strefę uplastycznioną poślizgowo, przy jednoczesnym braku strefy uplastycznionej rotacyjnie.

6. Wpływ mikropolarnych momentów objętościowych na zasięg strefy uplastycznionej poślizgowo

Rozpatrzmy dwa identyczne geometrycznie i materiałowo grubościennie nieskończone cylindry, z których na jeden działa tylko ciśnienie wewnętrzne, na drugi natomiast działa to samo ciśnienie wewnętrzne oraz dodatkowo znajduje się on w polu mikropolarnych momentów objętościowych $\mathbf{Y} = (0, 0, \gamma_z)$, gdzie $Y_z = H \ln \frac{b}{r}$.

Wprowadzając walcowy układ współrzędnych przy założeniu niezależności przyczyn od kąta θ i zmiennej z otrzymujemy w obu przypadkach płaski stan odkształcenia przy dodatkowej osiowej symetrii. O ośrodku zakładamy dodatkowo, że jest nieściśliwy. Zespół warunków brzegowych odpowiadających naszym założeniom jest następujący:

$$\begin{array}{llll} I \quad \sigma_{rr}(a) = -p, & \sigma_{rr}(b) = 0, & II \quad \sigma_{rr}(a) = -p, & \sigma_{rr}(b) = 0, \\ \sigma_{r\theta}(a) = 0, & u_\theta(b) = 0, & \sigma_{r\theta}(a) = 0, & u_\theta(b) = 0, \\ \sigma_{rz}(a) = 0, & \sigma_{rz}(b) = 0, & \sigma_{rz}(a) = 0, & \sigma_{rz}(b) = 0, \\ \mu_{rz}(a) = 0, & \mu_{rz}(b) = 0, & \mu_{rr}(a) = 0, & \mu_{rr}(b) = 0, \\ \mu_{r\theta}(a) = 0, & \mu_{r\theta}(b) = 0, & \mu_{r\theta}(a) = 0, & \mu_{r\theta}(b) = 0, \\ \mu_{rr}(a) = 0, & \mu_{rr}(b) = 0, & \mu_{rz}(a) = 0, & \mu_{rz}(b) = 0, \\ \mathbf{X} = (0, 0, 0) & \mathbf{Y} = (0, 0, 0) & \mathbf{X} = (0, 0, 0), & \mathbf{Y} = (0, 0, Y_z) \end{array}$$

$$Y_z = H \ln \frac{b}{r}$$

Obciążenia działające na cylinder I nie wywołują efektów mikropolarnych [3] — zachowuje się on jak ośrodek klasyczny, a więc rozwiązanie w strefie sprężystej przyjmuje znaną postać [2]:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{pa^2 b^2 r}{2\mu(b^2 - a^2)} + \frac{pa^2}{2(\mu + \lambda)(b^2 - a^2)} \frac{1}{r}, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Uplastycznienie rozpoczyna się od wewnętrznej pobocznic walca. Wartość ciśnienia, dla którego zaczyna się pojawiać strefa uplastycznienia poślizgowego, wyznaczamy ze wzoru

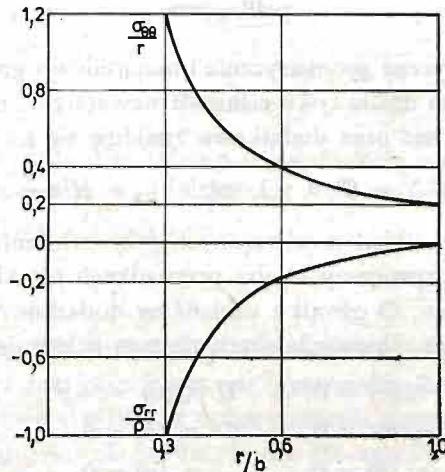
$$U_{p1} = \frac{1}{8\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 = k^2, \quad (6.3)$$

podstawiając w nim $r = a$. Wynosi ona [2] $p_0 = \frac{\sqrt{2\mu k}}{b^2} (b^2 - a^2)$. Przyjmując następnie wartości stałych materiałowych

$$E = 2 \cdot 10^6, \quad \nu = 2 \cdot 10^3, \quad \alpha = 0,1, \quad \lambda = 0,5, \quad \xi = 0,2, \quad \varepsilon = 0,1,$$

skąd

$$\mu = 6,6 \cdot 10^5, \quad \gamma = 833,33, \quad \eta^2 = 4,79 \cdot 10^{-4},$$



Rys. 7

i podstawiając wartości promieni pobocznic walca $a = 0,3$, $b = 1,0$, otrzymujemy wartość ciśnienia $p_0 = 1,06 \cdot 10^3$, dla $k = \frac{1}{3} 10^3 \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Dla $p < p_0$ cały ośrodek jest sprężysty, dla $p \geq p_0$ pojawia się strefa uplastycznienia poślizgowego, o promieniu zależnym od p .

Wykorzystując rozwiązanie [4] dla $p > p_0$ otrzymujemy następujące równanie na zasięg strefy plastycznej

$$2kb^2\sqrt{2\mu} \ln \frac{\varrho}{a} = pb^2 - b^2k\sqrt{2\mu} + k\varrho^2\sqrt{2\mu}. \quad (6.4)$$

Podstawiając do równania (6.4) przyjęte wartości $a = 0,3$, $b = 1,0$ otrzymamy

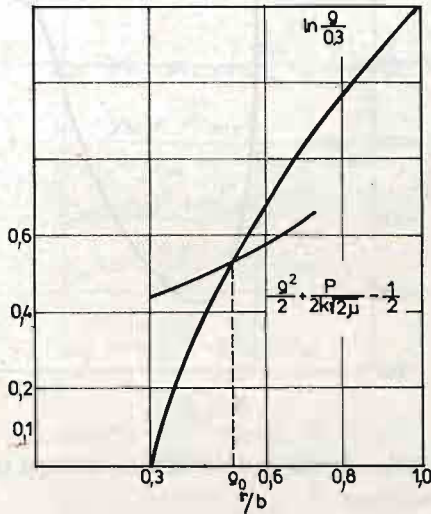
$$\ln \varrho = \frac{1}{2} \varrho^2 + \frac{p}{2k\sqrt{2\mu}} - \frac{1}{2} + \ln 0,3, \quad (6.5)$$

skąd dla $p = 2,1 \cdot 10^3$ otrzymamy $\varrho \cong 0,52$.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, gdy na cylinder działają ciśnienia wewnętrzne

oraz momenty objętościowe. Rozwiązanie układu równań z warunkami brzegowymi (6.1)_{II} przyjmie postać następującą:

$$\begin{aligned}
 u_r &= A_3 r + \frac{1}{r} B_3, \\
 u_\theta &= A_2 r + \frac{1}{r} B_2 - \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)\eta^2} \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{2} r \left(\ln \eta r - \frac{1}{2} \right) \right], \\
 \eta \varphi_z &= A_1 I_0(\eta r) - B_1 K_0(\eta r) - \frac{H}{(\gamma + \varepsilon)\eta} \ln \eta r + \eta \left(A_2 - \frac{H}{4} \ln \eta b \right), \\
 u_z &= \varphi_r = \varphi_\theta = 0,
 \end{aligned} \tag{6.6}$$



Rys. 8

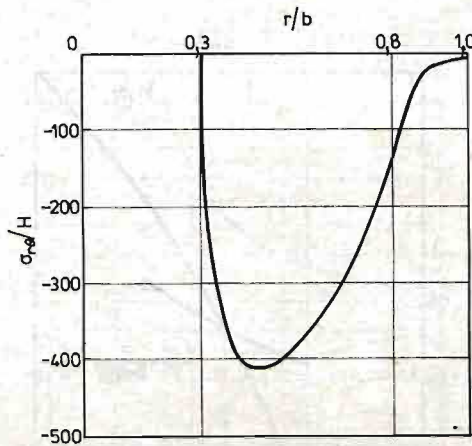
oraz

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r0} &= (\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) + \frac{H}{4} [2 \ln(\eta^2 r b) - 1] - 2B_2 \frac{\mu}{r^2}], \\
 \sigma_{\theta r} &= \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)\eta} [A_1 I_0(\eta r) - B_1 K_0(\eta r)] - \frac{H}{4} [1 + 2 \ln(\eta^2 r b)] \\
 &\quad - \frac{\gamma + \varepsilon}{r} [A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r)] - 2B_2 \frac{\mu}{r^2}, \\
 \sigma_{rr} &= 2\mu \left(A_3 - \frac{1}{r^2} B_3 \right) + 2\lambda A_3, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 2(\mu + \alpha) A_3 + \frac{1}{r^2} (2\mu + \lambda) B_3, \\
 2\sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta},
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \mu_{rz} &= (\gamma + \varepsilon) \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{r} \frac{1}{(\gamma + \varepsilon) \eta^2} \right], \\ \mu_{zr} &= (\gamma - \varepsilon) \left[A_1 I_1(\eta r) + B_1 K_1(\eta r) - \frac{H}{r} \frac{1}{(\gamma + \varepsilon) \eta^2} \right], \end{aligned} \quad (6.7) \quad [\text{cd.}]$$

gdzie stałe $A_i, B_i (i = 1, 2)$ wyznaczamy z warunków brzegowych.

Jeżeli wartości stałych materiałowych będą takie same jak w przypadku I, to funkcje σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ nie ulegną zmianie. Wykresy funkcji $\sigma_{r\theta}$ i μ_{rz} przedstawiamy na rys. 9. Łatwo zauważyć, że dla $p < p_0$, nawet bliskiego p_0 , oraz $H < 10^3$, wartości naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ są dużo większe od wartości naprężeń $\sigma_{r\theta}$ i $\sigma_{\theta r}$.



Rys. 9

Gdy na cylinder działa tylko ciśnienie wewnętrzne, energia odkształcenia postaciowego poślizgowego wyraża się wzorem

$$U_{p1} = \frac{1}{8\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 = \frac{p^2 a^4 b^4}{2\mu r^4 (b^2 - a^2)^2}. \quad (6.8)$$

Jeżeli na ten sam cylinder działa ciśnienie p oraz dodatkowo mikropolarny moment objętościowy $Y_2 = H \ln \frac{b}{r}$, energia ta przyjmie postać następującą:

$$\begin{aligned} U_{p1} &= \frac{1}{8\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \frac{1}{8\mu} (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2 = \\ &= \frac{p^2 a^4 b^4}{2\mu r^4 (b^2 - a^2)^2} + \frac{1}{8\mu} (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ze względu na to, że ciśnienie działające w obu przypadkach jest takie samo, energia poślizgowego odkształcenia postaciowego przyjmuje wyższe wartości, gdy działają dodatkowe mikropolarne momenty objętościowe. Wynika stąd oczywisty wniosek, że uplastycznienie poślizgowe w walcu poddanym działaniu objętościowych momentów mikropolarnych zostanie osiągnięte przy niższych wartościach ciśnienia działającego na pobocznicy walca.

Założmy, że strefa uplastycznienia poślizgowego występuje, tzn. $p > p_0$. Dla $p = 2,1 \cdot 10^3$ oraz $Y_2 = H \ln \frac{b}{r}$, $H = 10^{-7}$ wyznaczmy zasięg strefy uplastycznienia w obu przypadkach, gdy działa wyłącznie ciśnienie wewnętrzne i z dodatkowo działającymi momentami mikropolarnymi.

W obszarze uplastycznionym poślizgowo otrzymamy następujący układ równań (równowagi, geometrycznej zgodności odkształceń, kryterium uplastycznienia, oraz równania konstytutywne):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} &= 0, \\ \sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r} + \mu_{rz,r} + \frac{\mu_{rz}}{r} + H \ln \frac{b}{r} &= 0, \\ \gamma_{rr} - \gamma_{\theta\theta} &= r\gamma_{\theta\theta,r} \\ r\gamma_{\theta r,r} - r\kappa_{rz} &= -(\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}), \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})^2 &= 8k^2\mu, \\ \gamma_{rr} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(r\theta)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma_{\langle r\theta \rangle}, \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{1 + \varphi_1}{2\mu} \sigma_{(\theta r)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma_{\langle \theta r \rangle}, \\ \mu_{rz} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{rz}, \\ \mu_{zr} &= (\gamma - \varepsilon)\kappa_{zr}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

gdzie $U_{p_2} = \frac{1}{8\alpha} (\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r})^2 + \frac{1}{8\gamma} (\mu_{rz} + \mu_{zr})^2 + \frac{1}{8\varepsilon} (\mu_{rz} - \mu_{zr})^2 < I^2$,

Ze związków (6.10)₁₋₃ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= -r\sigma_{rr,r}, \\ -r\sigma_{r\theta,r} &= \sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}, \\ 2\sigma_{\langle r\theta \rangle} &= 2\sigma_{r\theta} - 2\sigma_{(\theta r)} = 2\sigma_{r\theta} + r\sigma_{r\theta,r}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Podstawiając związki (6.11) do pozostałych równań układu oraz zastępując odkształcenia przez naprężenia w związkach geometrycznych zgodności otrzymujemy następujący zredukowany układ równań:

$$2\sigma_{r\theta} + r\sigma_{r\theta,r} + \mu_{rz,r} + \frac{\mu_{rz}}{r} + H \ln \frac{b}{r} = 0, \quad (6.12)$$

$$(\sigma_{rr,r})^2 + (\sigma_{\theta\theta,r})^2 = \frac{8k^2\mu}{r^2}, \quad (6.12)$$

[cd.]

$$-\frac{1+\varphi_1}{2\mu} r\sigma_{rr,r} = r \left[\frac{1+\varphi_1}{4\mu} r\sigma_{rr,r} \right]_{,r}$$

$$\left[\frac{1+\varphi_1}{2\mu} r\sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{\alpha} \sigma_{\langle r\theta \rangle} + \frac{1}{2\alpha} r\sigma_{\theta r,r} \right]_{,r} + \frac{2\mu_{rz}}{\gamma+\varepsilon} = -\frac{1+\varphi_1}{\mu} \sigma_{r\theta,r}.$$

Układ powyższych równań udaje się sprowadzić do jednego nieliniowego równania różniczkowego zwyczajnego na zmienną μ_{rz} :

$$\frac{8\mu k^2 Cr(r^3\mu_{rz,rr} - r^2\mu_{rz,r} + r\mu_{rz} + 4D)}{\left[8\mu k^2 r^4 - \left(-r^2\mu_{rz,r} + r\mu_{rz} + r^2 \frac{H}{2} + 2D_1 \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\mu_{rz}}{\gamma+\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{4\alpha} \left[\mu_{rz,rr} + \frac{1}{r} \mu_{rz,r} - \frac{1}{r^2} \mu_{rz} - \frac{H}{r} \right]. \quad (6.13)$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego (6.13) rozwiązujemy kolejno równania układu (6.12)₁, (6.12)₃ i (6.12)₂. Równanie (6.13) można zlinearyzować, sprowadzając je do liniowego równania różniczkowego zwyczajnego o współczynnikach funkcyjnych. W tym celu należy wykorzystać fakt, że dla $H = 10^{-7}$, $\sigma_{rr,r} \gg \sigma_{r\theta,r}$. Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$\left(\frac{C}{\sqrt{2\mu}kr^2} + \frac{1}{2\alpha} \right) \frac{d^2m}{dr^2} + \left(\frac{C}{\sqrt{2\mu}kr^3} + \frac{3}{2\alpha r} \right) \frac{dm}{dr} - \frac{2m}{\gamma+\varepsilon} + \frac{4CD}{\sqrt{2\mu}kr^6} - \frac{H}{2\alpha r^2} = 0, \quad (6.14)$$

gdzie $rm = \mu_{rz}$, C, D — stałe całkowania.

Dla bardzo małych wartości H zwiększenie zasięgu strefy uplastycznionej poślizgowo można wykazać w sposób uproszczony. Przyjmując, że dla zadanych obciążeń p oraz H suma $\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}$ jest mała wobec różnicy $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ oraz zakładając pewną wartość stałą $\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r} = A_0 = -2,7 \cdot 10^{-7}$ (na przykład) łatwo zauważymy, że zamiast rozwiązywać pełny układ równań (6.10), możemy poprzestać na wykorzystaniu pierwszych dwóch równań równowagi oraz warunku plastyczności:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0,$$

$$\sigma_{r\theta,r} + \frac{A_0}{r} = 0, \quad (6.15)$$

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + A_0^2 = 8\mu k^2.$$

Rozwiązaniem układu równań (6.15), po uwzględnieniu warunków brzegowych, jest następujący układ funkcji:

$$\sigma_{rr} = \sqrt{8\mu k^2 - A_0^2} \ln \frac{r}{a} - p, \quad (6.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2} \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right) - p, \tag{6.16}$$

[cd.]

$$\sigma_{r\theta} = -\Lambda_0 \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_{\theta r} = \Lambda_0 \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right),$$

określający rozkład naprężeń w ramach strefy uplastycznionej poślizgowo.

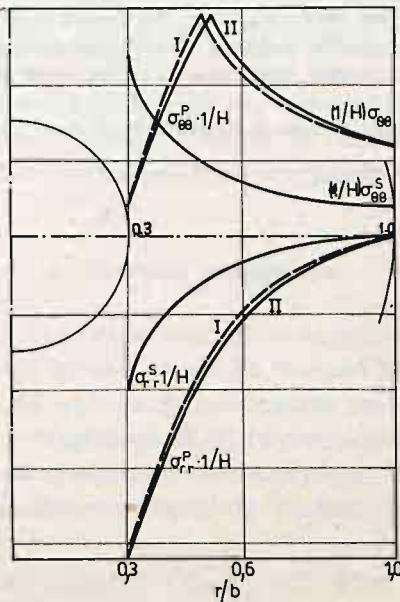
W celu przybliżonego wyznaczenia zasięgu strefy uplastycznionej poślizgowo znajdziemy w pierw rozkład naprężeń dla strefy sprężystej otaczającej strefę plastyczną, a następnie wykorzystamy wyrażenie na energię odkształcenia postaciowego poślizgowego, która w strefie sprężystej osiągnie wartość krytyczną dla $r = \varrho$. W naszym przypadku równanie na poszukiwany promień przyjmie postać

$$4 \left(\sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2} \ln \frac{\varrho}{a} - p \right)^2 b^4 = (8\mu k^2 - \Lambda_0^2) (b^2 - \varrho^2)^2, \tag{6.17}$$

czyli, dla $a = 0,3$, $b = 1,0$

$$\sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2} \ln \frac{\varrho}{a} = p + \frac{1}{2} (\varrho^2 - 1) \sqrt{8\mu k^2 - \Lambda_0^2}. \tag{6.18}$$

Porównując powyższe równanie z równaniem (6.5), widzimy, że różni się ono od niego tylko współczynnikiem przy p , przy czym w równaniu (6.5) współczynnik ten jest mniejszy. Wynika stąd, że wyznaczone w tym przypadku ϱ jest większe niż poprzednio, tzn. dla cylindra, na który działa tylko ciśnienie. Przybliżając $\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}$ przez najmniejszą wartość sumy otrzymujemy już efekt, wskazujący na zwiększenie zakresu strefy uplastycznionej poślizgowo w wyniku obciążeń objętościowych momentami mikropolarnymi. Zmianę zakresu strefy uplastycznienia pokazaliśmy na rys. 10.



Rys. 10

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN 1970, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, Wyd. 2 poprawione i rozszerzone, 1981.
2. L. M. KACHANOV, *Foundations of the theory of plasticity*, North-Holland Publishing Company — Amsterdam, Londyn 1971.
3. Z. OLESIAK, M. WĄGROWSKA, *Zagadnienia mikropolarnej sprężystej rury grubościennej*, MTiS, 14, 1976.
4. M. WĄGROWSKA, *Zagadnienia uplastycznionego ośrodka mikropolarnego*, rozprawa doktorska, 1983. Uniwersytet Warszawski. Inst. Mech.
5. M. MIȘICU, *On theory of asymmetric plastic and viscoplastic plastic solids*, Revu Rou. Sci. tech. Sér. de Mech Appl. 9, 1969.
6. H. LIPPMANN, *Eine Cosserat Theorie des Plastischen Fließens*, Acta Mechanica, 8, 1969.
7. A. SAWCZUK, *On yielding of Cosserat Continua*, Arch. Mech. Stos. 3, 19, 1967.

Резюме

АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В рамках сред с свободными внутренними оборотами мы рассматриваем упруго-пластические цилиндрические тела. Средства переносить также моментные напряжения. Представлены условия текучести, определяющие уравнения, а также уравнения аксиально симметричных двухмерных задач для упруго-пластических тел. Как частный случай мы рассматриваем влияние микрополярных массовых моментов на размер пластической зоны.

Summary

AXIALLY SYMMETRIC PROBLEMS OF THE MICROPOLAR THEORY OF PLASTICITY

Within the frames of the continuum with free rotations we consider elastic-plastic cylindrical bodies. The continuum is capable of carrying moment stresses. We present yield criteria, constitutive equations, and the equations for the axially symmetric problems of two-dimensional elastic-plastic bodies. As a special case we discuss the effect of micropolar mass moments on the extent of the plastic zone.

Praca została złożona w Redakcji 26 stycznia 1984 roku