

## PRZYROSTOWE RÓWNANIA NIELINIOWEJ TEORII PŁYT Z NAPRĘŻENIAMI I UGIĘCIAMI POCZĄTKOWYMI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM MATERIAŁU

MARIAN K M I E C I K

*Politechnika Szczecińska*

### 1. Wstęp

Badania doświadczalne [1] płyt ściskanych osiowo z naprężeniami wstępnymi i ugięciami początkowymi wskazują na ich nieliniowe zachowanie się. Nie zachodzi bowiem proporcjonalność pomiędzy zewnętrznym obciążeniem ściskającym, a wywołanym nim ugięciem, nawet w zakresie sprężystym. Granica plastyczności zostaje osiągnięta przy obciążeniach znacznie niższych od obciążeń maksymalnych, jakie może przenieść płyta. Maksymalna nośność płyty występuje przy ugięciach przekraczających wielokrotnie grubość płyty i przy znacznym uplastycznieniu materiału. Uwzględnienie naprężeń wstępnych i ugięć początkowych w obliczeniach wytrzymałościowych płyt ściskanych osiowo pociąga więc za sobą konieczność uwzględnienia zarówno nieliniowości fizycznej, jak i geometrycznej. Efektywne rozwiązywanie zagadnień nieliniowych wymaga sformułowań przyrostowych [2, 3, 4]. Poniżej, opierając się na wariacyjnym sformułowaniu równań równowagi oraz teorii plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa, wyprowadzone zostały przyrostowe równania nieliniowej teorii płyt z naprężeniami wstępnymi i ugięciami początkowymi. Podano także stosowne wyrażenia przyrostowe dla rozwiązywania zagadnienia metodą elementu skończonego.

### 2. Przyrostowe związki konstytutywne w zakresie sprężysto-plastycznego materiału

Rozpatrzone zostaną płyty z materiału izotropowego. Zakłada się także wzmocnienie izotropowe po przekroczeniu granicy plastyczności. Przyjmujemy ponadto, że spełniony jest postulat Druckera [5] wykluczający przyrost odkształcenia plastycznego przy spadku wartości naprężenia. Cechę tę posiada większość materiałów konstrukcyjnych, w tym stale okrętowe. W powszechnym zastosowaniu są dwie teorie plastyczności: odkształceniowa i plastycznego płynięcia. Dalsze rozważania będą oparte na tej ostatniej. Jest ona bowiem teorią bardziej ogólną. Teoria odkształceniowa daje poprawne wyniki i zgodne z wynikami uzyskanymi na bazie teorii plastycznego płynięcia tylko przy obciążeniu

prostym, czyli proporcjonalnym, które zdefiniował ILIUSZIN [6]. W związku z tym wyniki oparte na teorii plastycznego płynięcia są na ogół bardziej zgodne z eksperymentem [7]. Istotnym jest także przyrostowy charakter tej teorii, bardziej odpowiedni do rozwiązywania złożonych problemów nieliniowych.

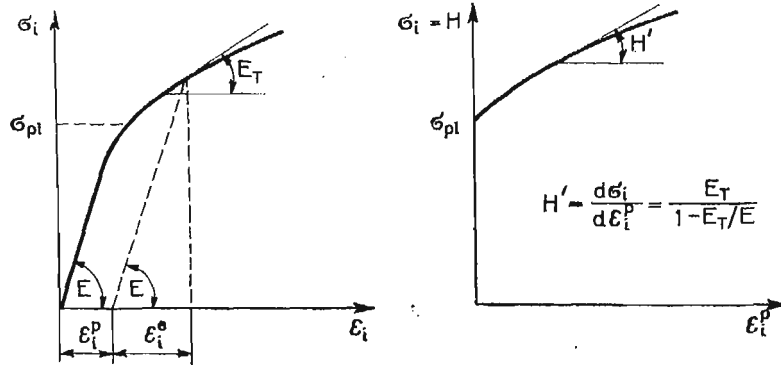
Postulat Druckera zapewnia jednoznaczność uzyskiwanych rozwiązań [8], a jego spełnienie wymaga wypukłej powierzchni płynięcia plastycznego oraz ortogonalności do tej powierzchni wektora przyrostu odkształcenia plastycznego [5, 8]. Najczęściej stosowany w praktyce warunek plastyczności Hubera-Misesa należy także do tych, które dostarczają wypukłą powierzchnię płynięcia. Zgodnie z tym warunkiem powierzchnię tą można określić następująco:

$$f = \sigma_i - H(\kappa) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Natomiast  $H(\kappa)$  — granica plastyczności zależna od parametru wzmocnienia  $\kappa$ . Parametr wzmocnienia jest tak określony, że przy braku odkształceń plastycznych  $\kappa = 0$ . W związku z tym  $H(\kappa = 0)$  — jest wartością początkowej granicy plastyczności  $\sigma_{pl}$  (rys. 2.1).



Rys. 2.1

Istnieją dwa sposoby wyznaczania parametru  $\kappa$ . Pierwszy zakłada, że jego miarą jest praca odkształcenia plastycznego

$$\kappa = W^p = \int_0^{\epsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (2.3)$$

lub

$$\kappa = W^p = \int_0^{\epsilon_i^p} \sigma_i d\epsilon_i^p, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{xy}^p)^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{yz}^p)^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{zx}^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

W sposobie drugim

$$\kappa = \varepsilon_i^p = \int_0^{\varepsilon_i^p} d\varepsilon_i^p \quad (2.6)$$

Dowodzono, że dla warunku plastyczności Hubera-Misesa obie drogi prowadzą do tego samego rezultatu [9].

W dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń powierzchnia  $f$  oddziela stan sprężysty od plastycznego. W związku z tym  $f < 0$  jest stanem sprężystym,  $f = 0$  — stanem plastycznym, natomiast  $f > 0$  — stanem niedopuszczalnym.

Zgodnie z (2.1) i (2.6) różniczka funkcji uplastycznienia

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i^p} d\varepsilon_i^p \quad (2.7)$$

Stąd w stanie plastycznym ( $f = 0$ )

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{— oznacza odciążenie} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{— obciążenie neutralne,} \quad (2.9)$$

natomiast

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad \text{— obciążenie prowadzące do nowej powierzchni płynięcia} \quad (2.10)$$

Ponieważ  $f$  jest powierzchnią ekwipotencjalną gradient tej powierzchni jest do niej ortogonalny a jego składowymi są pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}}$ , co przy ortogonalności do powierzchni także wektora przyrostu odkształcenia plastycznego o module  $d\varepsilon_i^p$  pozwala na określenie jego składowych w oparciu o związek

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_i^p. \quad (2.8)$$

W zapisie macierzowym wektor składowych przyrostów odkształceń plastycznych

$$\{d\varepsilon_{ij}^p\} = \{d\varepsilon^p\} = \{d\varepsilon_x^p d\varepsilon_y^p d\varepsilon_z^p d\gamma_{xy}^p d\gamma_{yz}^p d\gamma_{zx}^p\} = \left\{ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} \right\} d\varepsilon_i^p \quad (2.12)$$

gdzie, zgodnie z (2.2)

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = \left\{ \frac{3\sigma'_x}{2\sigma_i} \frac{3\sigma'_y}{2\sigma_i} \frac{3\sigma'_z}{2\sigma_i} \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \frac{3\tau_{yz}}{\sigma_i} \frac{3\tau_{zx}}{\sigma_i} \right\}. \quad (2.13)$$



Dla płaskiego stanu naprężeń [2]:

$$[E_{ep}] = \frac{E}{Q} \begin{bmatrix} \sigma'_y \sigma'_y + 2P & -\sigma'_x \sigma'_y + 2\nu P & -\frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{1+\nu} \\ \sigma'_x \sigma'_x + 2P & -\frac{\sigma'_y + \nu \sigma'_x}{1+\nu} \tau_{xy} & \\ & & \frac{R}{2(1+\nu)} + \frac{2H'}{9E} (1-\nu) \sigma_i^2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

gdzie:

$$P = \frac{2H'}{9E} \sigma_i^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{1+\nu},$$

$$Q = R + 2(1-\nu)P,$$

$$R = \sigma'_x \sigma'_x + 2\nu \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_y.$$

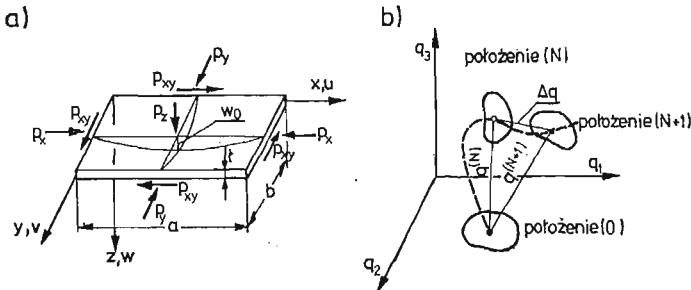
### 3. Przyrostowe wariacyjne sformułowanie stanów równowagi

Zgodnie z zasadą prac przygotowanych w dowolnym stanie równowagi płyty (rys. 3.1) przy pominięciu sił masowych

$$\int_{Vol} \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma_\epsilon\} dV - \int_S \{\delta q\}^T \{p\} dS = 0 \quad (3.1)$$

gdzie:

- { $\delta \epsilon$ } — wektor wariacji składowych tensora odkształceń,
- { $\sigma$ } — wektor składowych tensora naprężeń,
- { $\delta q$ } — wektor wariacji składowych pomieszczeń,
- { $p$ } — wektor powierzchniowych obciążeń zewnętrznych.



Rys. 3.1

W płytach cienkich istotne znaczenie mają tylko trzy składowe tensora odkształceń  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$  i naprężeń ( $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ ). Przy istnieniu ugięć początkowych  $w_0$  i dużych ugięciach płyty

$$\epsilon_x = u_{,x} - z w_{,xx} + w_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2,$$

$$\epsilon_y = v_{,y} - z w_{,yy} + w_{0,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2,$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy} + w_{0,x} w_{,y} + w_{0,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y}.$$
(3.2)

Jeżeli założymy, że istnieje taka funkcja stanu  $U$ , że

$$\{\sigma\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right\}, \quad (3.3)$$

to równanie (3.1) można także przedstawić w postaci

$$\int_{vol} \delta U dV - \int_S \{\delta q\}^T \{p\} dS = 0, \quad (3.4)$$

czyli

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\Pi = \int_{vol} U dV - \int_S \{q\}^T \{p\} dS, \quad (3.6)$$

nazwiemy potencjałem układu.

Równanie (3.5) jest znanym wariacyjnym sformułowaniem stanu równowagi, zgodnie z którym dowolny stan równowagi charakteryzuje się stacjonarnością potencjału  $\Pi$ , ponieważ różniczka potencjału w tym stanie jest równa zeru.

W zakresie liniowym materiału

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma^0\}, \quad (3.7)$$

gdzie:

$\{\sigma^0\}$  — wektor składowych tensora samorzównoważonych naprężeń początkowych

Stąd, zgodnie z (3.3)

$$U = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma^0\}, \quad (3.8)$$

oraz

$$\Pi = \int_{vol} \left( \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma^0\} \right) dV - \int_S \{q\}^T \{p\} dS. \quad (3.9)$$

Równanie (3.5) łącznie ze związkami (3.9) i 3.2) może stanowić podstawę wielu algorytmów analizy płyt w zakresie sprężystym. Zastosowanie wariacyjnych równań Eulera sprowadza (3.5) do znanych nieliniowych równań dużych ugięć płyt von Kármána, które następnie mogą być rozwiązywane stosowanymi metodami analitycznymi lub numerycznymi [13, 14]. Wykorzystanie natomiast w równaniu (3.5) wyrażen różnicowych na pochodne cząstkowe stanowi podstawę numerycznych metod wariacyjno-różnicowych [15], a wprowadzenie do tych równań stosowanych funkcji opisujących przemieszczenia elementów płyty za pomocą przemieszczeń ich węzłów — to znana i powszechnie już stosowana metoda elementu skończonego [2.16].

Jak już zaznaczono; przy rozwiązywaniu zadań nieliniowych w mechanice ciał stałych stosuje się zazwyczaj przyrostowy opis zagadnień brzegowo-początkowych. W zakresie sprężystym materiału i problemie tylko geometrycznie nieliniowym ujęcie takie jest jednym z możliwych, podczas, gdy przy przyrostowych związkach konstytutywnych, na które zdecydowano się wyżej, jest ono nieuniknione. Traktując stan równowagi ( $N$ )

(rys. 3.1b) jako stan odniesienia dla stanu równowagi ( $N+1$ ), zgodnie z zasadą prac przygotowanych winno być spełnione równanie [17]:

$$\int_{Vol} \{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T (\{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} + \{\Delta \boldsymbol{\sigma}\}) dV - \int_S \{\delta \Delta \boldsymbol{q}\}^T (\{\boldsymbol{p}^{(N)}\} + \{\Delta \boldsymbol{p}\}) dS = 0, \quad (3.10)$$

któremu, wzorując się na (3.3) i (3.4 - 6), można także nadać postać:

$$\delta(\Delta II) = 0, \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\Delta II = \int_{Vol} \Delta U dV - \int_S \{\Delta \boldsymbol{q}\}^T (\{\boldsymbol{p}^{(N)}\} + \{\Delta \boldsymbol{p}\}) dS, \quad (3.12)$$

$\{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\}$  i  $\{\boldsymbol{p}^{(N)}\}$  — wektory naprężeń i obciążeń w stanie ( $N$ ), przy czym

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} = \{\boldsymbol{\sigma}^0\} + \{\boldsymbol{\sigma}_p^{(N)}\}, \quad (3.13)$$

jest stanem naprężeń w  $N$  wywołanym naprężeniami początkowymi  $\{\boldsymbol{\sigma}^0\}$  oraz obciążeniem  $\{\boldsymbol{p}^{(N)}\}$ .

Dla ostatecznie małych przyrostów odkształceń, zgodnie z (2.16)

$$\{\Delta \boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] (\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\}), \quad (3.14)$$

wobec tego

$$\Delta U = \frac{1}{2} \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\} + \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} \quad (3.15)$$

a na tej podstawie

$$\begin{aligned} \Delta II = & \int_{Vol} \left( \frac{1}{2} \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\} + \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} \right) dV - \\ & - \int_S \{\Delta \boldsymbol{q}\}^T (\{\boldsymbol{p}^{(N)}\} + \{\Delta \boldsymbol{p}\}) dS, \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie:

$$\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\Delta \varepsilon_x \Delta \varepsilon_y \Delta \gamma_{xy}\}, \quad \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\} = \{\Delta \varepsilon_x^p \Delta \varepsilon_y^p \Delta \gamma_{xy}^p\},$$

natomiast w oparciu o (3.2)

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \Delta u_{,x} - z \Delta w_{,xx} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2 \\ \Delta \varepsilon_y &= \Delta v_{,y} - z \Delta w_{,yy} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2 \\ \Delta \gamma_{xy} &= \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} - 2z \Delta w_{,xy} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \Delta w_{,x} \cdot \Delta w_{,y}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

W powyższych związkach

$$w_0^{(N)} = w_0 + w. \quad (3.18)$$

Jest to suma ugięcia początkowego  $w_0$  oraz ugięcia  $w$  wywołanego obciążeniem w położeniu równowagi ( $N$ ). Suma ta stanowi więc ugięcie początkowe dla przyrostu obciążenia

$\{\Delta p\}$ . Podobnie, jak w zakresie sprężystym, na bazie równania (3.11) oraz związków (3.16) i (3.17) można budować algorytmy w technice przyrostowej. Zastosowanie wariacyjnych równań Eulera dostarcza przyrostowych różniczkowych równań równowagi nieliniowej teorii płyt z uwzględnieniem uplastycznienia materiału. Równania te mogą być następnie rozwiązywane na drodze obliczeniowej. Bezpośrednie wykorzystanie w równaniu (3.11) związków różnicowych na pochodne cząstkowe jest podstawą algorytmów o technice wariacyjno-różnicowej, natomiast opis wektora  $\{\Delta \varepsilon\}$  za pomocą stosownych funkcji kształtu prowadzi do metody elementu skończonego.

#### 4. Przyrostowe równania różniczkowe równowagi nieliniowej teorii płyt z naprężeniami wstępnymi i ugięciami początkowymi w zakresie sprężysto-plastycznym

W przyrostach odkształceń (3.17) wyróżnimy część liniową  $\{\Delta \varepsilon^I\}$  i nieliniową  $\{\Delta \varepsilon^{nl}\}$  oraz przyjmiemy oznaczenia:

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_x &= \Delta \varepsilon_x^I + \Delta \varepsilon_x^{II} + \Delta \varepsilon_x^{III} + \Delta \varepsilon_x^{IV} = \Delta \varepsilon_x^I + \Delta \varepsilon_x^{nl}, \\ \Delta \varepsilon_y &= \Delta \varepsilon_y^I + \Delta \varepsilon_y^{II} + \Delta \varepsilon_y^{III} + \Delta \varepsilon_y^{IV} = \Delta \varepsilon_y^I + \Delta \varepsilon_y^{nl}, \\ \Delta \gamma_{xy} &= \Delta \gamma_{xy}^I + \Delta \gamma_{xy}^{II} + \Delta \gamma_{xy}^{III} + \Delta \gamma_{xy}^{IV} = \Delta \gamma_{xy}^I + \Delta \gamma_{xy}^{nl},\end{aligned}\quad (4.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_x^I &= \Delta u_{,x}, \Delta \varepsilon_y^I = \Delta v_{,y}, \Delta \gamma_{xy}^I = \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}, \\ \Delta \varepsilon_x^{II} &= -z \Delta w_{,xx}, \Delta \varepsilon_y^{II} = -z \Delta w_{,yy}, \Delta \gamma_{xy}^{II} = -2z \Delta w_{,xy}, \\ \Delta \varepsilon_x^{III} &= w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x}, \Delta \varepsilon_y^{III} = w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y}, \Delta \gamma_{xy}^{III} = w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x}, \\ \Delta \varepsilon_x^{IV} &= \frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2, \Delta \varepsilon_y^{IV} = \frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2, \Delta \gamma_{xy}^{IV} = \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_x^{nl} &= \Delta \varepsilon_x^{II} + \Delta \varepsilon_x^{III} + \Delta \varepsilon_x^{IV}, \Delta \varepsilon_y^{nl} = \Delta \varepsilon_y^{II} + \Delta \varepsilon_y^{III} + \Delta \varepsilon_y^{IV}, \\ \Delta \gamma_{xy}^{nl} &= \Delta \gamma_{xy}^{II} + \Delta \gamma_{xy}^{III} + \Delta \gamma_{xy}^{IV}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Korzystając z równań wariacyjnych Eulera można dowieść, że

$$\delta \left( \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon\}^T \{\sigma^{(N)}\} dV - \int_S \{\Delta q\}^T \{p^{(N)}\} dS \right) = 0 \quad (4.4)$$

wobec tego wyrażenie na przyrost potencjału (3.16) przyjmuje postać następującą:

$$\Delta \Pi = \int_{Vol} \left( \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} + \{\Delta \varepsilon^{nl}\}^T \{\sigma^{(N)}\} \right) dV - \int_S \{\Delta q\}^T \{\Delta p\} dS \quad (4.5)$$

Po uwzględnieniu związków (4.1), wartości poszczególnych członów pierwszej całki powyższego wyrażenia wyniosą:

$$\int_{Vol} \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon\} dV = \quad (4.6)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^I\} dV + \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{II}\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV + \\
&+ \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV + \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

[cd.]

W wyrażeniu tym pominięto człony zawierające składowe wektora  $\{\Delta \varepsilon^{II}\}$  w pierwszej potęgze. Składowe te są zależne od  $z$  (4.2), a więc wartości całek, w których one występują są równe zero.

$$\begin{aligned}
\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^P\} dV &= \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^P\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^P\} dV + \\
&+ \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^P\} dV + \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^P\} dV. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T \{\sigma^{(N)}\} dV = \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T \{\sigma^{(N)}\} dV. \quad (4.8)$$

Korzystając z kolei z zależności (4.2) oraz przyjętych oznaczeń na rys. (3.1a)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^I\} dV = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S \left[ (\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y}) \Delta u_{,x} + (\nu \Delta u_{,x} + \Delta v_{,y}) \Delta v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x})^2 \right] dS, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{II}\} dV &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t^3}{12(1-\nu^2)} \int_S [(\Delta w_{,xx} + \nu \Delta w_{,yy}) \Delta w_{,xx} + \\
&+ (\nu \Delta w_{,xx} + \Delta w_{,yy}) \Delta w_{,yy} + 2(1-\nu) \Delta w_{,xy}^2] dS. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV &= \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S \left[ (\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y}) w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + (\nu \Delta u_{,x} + \Delta v_{,y}) w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \right. \\
&+ \left. \frac{1-\nu}{2} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}) (w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x}) \right] dS, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y}) \Delta w_{,x}^2 + \\
&+ (\nu \Delta u_{,x} + \Delta v_{,y}) \Delta w_{,y}^2 + (1-\nu) (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}) \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}] dS, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\} [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}t}{1-\nu^2} \int_S \left[ (w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \nu w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y}) w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \right. \\
&+ (\nu w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y}) w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \\
&+ \left. \frac{1-\nu}{2} (w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x})^2 \right] dS. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\} dV = \frac{1}{8} \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta w_{,x}^2 + \nu \Delta w_{,y}^2) \Delta w_{,x}^2 + (\nu \Delta w_{,x}^2 + \Delta w_{,y}^2) \Delta w_{,y}^2 + 2(1-\nu) (\Delta w_{,x} \Delta w_{,y})^2] dS, \quad (4.14)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S \left[ (\Delta \varepsilon_x^{bp} + \nu \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta u_{,x} + (\nu \Delta \varepsilon_x^{bp} + \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} \Delta \gamma_{xy}^{bp} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}) \right] dS, \quad (4.15)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta m_x^p + \nu \Delta m_y^p) \Delta w_{,xx} + (\nu \Delta m_x^p + \Delta m_y^p) \Delta w_{,yy} + (1-\nu) \Delta m_{xy}^p \Delta w_{,xy}] dS, \quad (4.16)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S \left[ (\Delta \varepsilon_x^{bp} + \nu \Delta \varepsilon_y^{bp}) w_{\delta,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + (\nu \Delta \varepsilon_x^{bp} + \Delta \varepsilon_y^{bp}) w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \frac{1-\nu}{2} \Delta \gamma_{xy}^{bp} (w_{\delta,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x}) \right] dS, \quad (4.17)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^p\} dV = \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} \int_S [(\Delta \varepsilon_x^{bp} + \nu \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta w_{,x}^2 + (\nu \Delta \varepsilon_x^{bp} + \Delta \varepsilon_y^{bp}) \Delta w_{,y}^2 + (1-\nu) \Delta \gamma_{xy}^{bp} \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}] dS, \quad (4.18)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} dV = \int_S \left( \frac{1}{2} N_x^{(N)} \Delta w_{,x}^2 + \frac{1}{2} N_y^{(N)} \Delta w_{,y}^2 + N_{xy}^{(N)} \Delta w_{,x} \Delta w_{,y} \right) dS, \quad (4.19)$$

$$\int_S \{\Delta \mathbf{q}\}^T \{\Delta \mathbf{p}\} dS = \int_S [\Delta p_z \Delta w + t \Delta p_x \Delta u_{,x} + t \Delta p_y \Delta v_{,y} + t \Delta p_{xy} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x})] dS, \quad (4.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^{bp} &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_x^p dz, & \Delta \varepsilon_y^{bp} &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_y^p dz, & \Delta \gamma_{xy}^{bp} &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \gamma_{xy}^p dz, \\ \Delta m_x^p &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_x^p \cdot z dz, & \Delta m_y^p &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \varepsilon_y^p \cdot z dz, & \Delta m_{xy}^p &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta \gamma_{xy}^p \cdot z dz, \\ N_x^{(N)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x^{(N)} dz, & N_y^{(N)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y^{(N)} dz, & N_{xy}^{(N)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy}^{(N)} dz. \end{aligned}$$

Zsumowanie wszystkich całek (4.9 - 20) z uwzględnieniem znaków występujących w równaniu (4.5) daje funkcjonał

$$\phi = \phi(\Delta u_{,x}, \Delta u_{,y}, \Delta v_{,x}, \Delta v_{,y}, \Delta w_{,x}, \Delta w_{,y}, \Delta w_{,xx}, \Delta w_{,yy}, \Delta w_{,xy}), \quad (4.22)$$

zgodnie z którym

$$\Delta \Pi = \int_S \phi \, dS \quad (4.23)$$

Zgodnie z zasadami rachunku wariacyjnego, przyrostowy warunek równowagi (3.11),  $\delta(\Delta \Pi) = 0$ , jest równoważny spełnieniu przez funkcjonał następujących równań Eulera [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \Delta u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta u_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta u_{,y}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \Delta v} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta v_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta v_{,y}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,y}} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \Delta w_{,xy}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dwa pierwsze równania Eulera dostarczają związków:

$$\begin{aligned} (\Delta N_x - t \Delta p_x)_{,x} + (\Delta N_{xy} - t \Delta p_{xy})_{,y} &= 0, \\ (\Delta N_{xy} - t \Delta p_{xy})_{,x} + (\Delta N_y - t \Delta p_y)_{,y} &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

natomiast trzecie

$$\begin{aligned} D(\Delta w_{,xxxx} + 2\Delta w_{,xxyy} + \Delta w_{,yyyy}) &= \\ = \Delta p_z + N_x^{(N)} \Delta w_{,xx} + N_y^{(N)} \Delta w_{,yy} + 2N_{xy}^{(N)} \Delta w_{,xy} + t[\Delta F_{,xx}(w_0^{(N)} + \Delta w)_{,yy} + \\ + \Delta F_{,yy}(w_0^{(N)} + \Delta w)_{,xx} - 2\Delta F_{,xy}(w_0^{(N)} + \Delta w)_{,xy}] - \frac{Et}{1-\nu^2} [(\Delta m_x^p + \nu \Delta m_y^p)_{,xx} + \\ + (\nu \Delta m_x^p + \Delta m_y^p)_{,yy} + (1-\nu) \Delta m_x^p], \end{aligned} \quad (4.26)$$

gdzie:  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$F$  — funkcja naprężeń Airy'ego, zgodnie z którą

$$\Delta N_x = t \Delta F_{,yy}, \quad \Delta N_y = t \Delta F_{,xx}, \quad \Delta N_{xy} = -t \Delta F_{,xy}$$

Równania (4.25) są znanymi różniczkowymi warunkami równowagi Naviera dla płaskiego stanu naprężeń, nie dotyczą więc naszego zagadnienia. Równanie (4.26) wiąże przyrosty funkcji ugięć  $\Delta w$  z przyrostami funkcji naprężeń błonowych  $\Delta F$ , powstałe w wyniku przyrostu obciążenia  $\Delta p_z$ , przy zadanym stanie naprężeń i ugięć płyty w położeniu równowagi ( $N$ ). Jest to więc równanie z dwoma niewiadomymi, bowiem przyrosty odkształceń plastycznych, których miarą w tym równaniu są  $\Delta m_x^p$ ,  $\Delta m_y^p$ ,  $\Delta m_{xy}^p$ , zależą także od  $\Delta w$  i  $\Delta F$ .

Dodatkowe równanie wiążące obie te wielkości otrzymamy na bazie równania nierozdzielności odkształceń de Saint-Venanta odniesionego do płaszczyzny środkowej płyty [19].

$$(\Delta \varepsilon_x^b)_{,yy} + (\Delta \varepsilon_y^b)_{,xx} - (\Delta \gamma_{xy}^b)_{,xy} = 0. \quad (4.27)$$

Mając na uwadze, że (3.17)

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^b &= \Delta \varepsilon_x(z=0) = \Delta u_{,x} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,x} + \frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2, \\ \Delta \varepsilon_y^b &= \Delta \varepsilon_y(z=0) = \Delta v_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,y} + \frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\Delta \gamma_{xy}^b = \Delta \gamma_{xy}(z=0) = \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} + w_{0,x}^{(N)} \Delta w_{,y} + w_{0,y}^{(N)} \Delta w_{,x} + \Delta w_{,x} \Delta w_{,y},$$

ą także

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^b &= \Delta \varepsilon_x^{be} + \Delta \varepsilon_x^{bp}, \\ \Delta \varepsilon_y^b &= \Delta \varepsilon_y^{be} + \Delta \varepsilon_y^{bp}, \\ \Delta \gamma_{xy}^b &= \Delta \gamma_{xy}^{be} + \Delta \gamma_{xy}^{bp}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^{be} &= \frac{\Delta F_{,yy}}{E} - \nu \frac{\Delta F_{,xx}}{E}, \\ \Delta \varepsilon_y^{be} &= \frac{\Delta F_{,xx}}{E} - \nu \frac{\Delta F_{,yy}}{E}, \\ \Delta \gamma_{xy}^{be} &= -2(1+\nu) \frac{\Delta F_{,xy}}{E}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

równanie (4.27) dostarcza:

$$\begin{aligned} \Delta F_{,xxxx} + 2\Delta F_{,xxyy} + \Delta F_{,yyyy} &= \\ &= E\{(\Delta w_{,xy}^2 - \Delta w_{,xx} \Delta w_{,yy}) - (w_{0,xx}^{(N)} \Delta w_{,yy} + w_{0,yy}^{(N)} \Delta w_{,xx} - \\ &\quad - 2w_{0,xy}^{(N)} \Delta w_{,xy} - [(\Delta \varepsilon_x^{bp})_{,yy} + (\Delta \varepsilon_y^{bp})_{,xx} - (\Delta \gamma_{xy}^{bp})_{,xy}]\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Równanie (4.31) można również otrzymać na drodze wariacyjnej, jeżeli wykorzystana zostanie znana zasada stacjonarności potencjału komplementarnego [19, 20]. Oba równania natomiast, tzn. (4.26) i (4.31) jednocześnie, można uzyskać także, ale po wprowadzeniu do zasady prac przygotowawczych mnożników Lagrange'a czyli w oparciu o zasadę wariacyjną Hellingera-Reissnera [20, 21, 22]. Łatwo dostrzec, że w zakresie sprężystym, i gdy nie istnieją naprężenia początkowe, a przyrost obciążenia  $\Delta p$  i ugięcia  $\Delta w$  potraktujemy jako obciążenie i ugięcie całkowite (tylko jeden przyrost obciążenia), równania (4.26) i (4.31) przyjmują postać znanych równań nieliniowej teorii dużych ugięć płyt:

$$\begin{aligned} D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) &= p_z + t[F_{,xx}(w_0 + w)_{,yy} + F_{,yy}(w_0 + w)_{,xx} - 2F_{,xy}(w_0 + w)], \\ F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} + F_{,yyyy} &= E[(w_{,xy}^2 - w_{,xx} \cdot w_{,yy}) - \\ &\quad - (w_{0,xx} \cdot w_{,yy} + w_{0,yy} \cdot w_{,xx} - 2w_{0,xy} w_{,xy})]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Równania te dla płyt bez ugięć początkowych ( $w_0 = 0$ ) zostały wprowadzone w roku 1910 przez von Kármána, natomiast postać podaną wyżej nadał im znacznie później, bo w 1937 r., Marguerre [23].

Równania (4.26) i (4.31) stanowią więc uogólnienie, w ujęciu przyrostowym, nieliniowej teorii dużych ugięć płyt cienkich von Kármána na obszar sprężysto-plastyczny z uwzględnieniem zarówno naprężeń, jak i ugięć początkowych.

### 5. Przyrostowe równania równowagi nieliniowej teorii płyt z naprężeniami i ugięciami początkowymi w zakresie sprężysto-plastycznym materiału w metodzie elementu skończonego

Zgodnie z (4.2)

$$\{\Delta \varepsilon^I\} = \{\Delta \varepsilon_x^I \Delta \varepsilon_y^I \Delta \gamma_{xy}^I\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u(x, y) \\ \Delta v(x, y) \end{Bmatrix} = [A^I] \{\Delta g(x, y)\}, \quad (5.1)$$

Dla każdego elementu płyty dobieramy odpowiednią funkcję opisującą przemieszczenia jego płaszczyzny środkowej w postaci:

$$\{g(x, y)\} = [B^I(x, y)] \{u\}, \quad (5.2)$$

gdzie  $\{u\}$  jest wektorem przemieszczeń liniowych punktów węzłowych elementu.

Stąd

$$\{\Delta g(x, y)\} = [B^I(x, y)] \{\Delta u\}, \quad a, \quad (5.3)$$

$$\{\Delta \varepsilon^I\} = [A^I] [B^I] \{\Delta u\} = [C^I] \{\Delta u\}. \quad (5.4)$$

Wobec tego (4.5)

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [E] \{\Delta \varepsilon^I\} dV = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta u\}^T [C^I]^T [E] [C^I] \{\Delta u\} dV = \frac{1}{2} \{\Delta u\}^T [k_b] \{\Delta u\}, \quad (5.5)$$

gdzie:

$$[k_b] = \int_{Vol} [C^I]^T [E] [C^I] dV \quad (5.6)$$

jest znaną liniową macierzą sztywności błonowej elementu płyty [16].

Ponieważ (4.2)

$$\{\Delta \varepsilon^{II}\} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \Delta w(x, y) = [A^{II}] \Delta w(x, y) \quad (5.7)$$

więc po doborze odpowiedniej funkcji opisującej ugięcia elementu płyty w postaci:

$$w(x, y) = [\mathbf{B}^{II}(x, y)] \{w\}, \quad (5.8)$$

gdzie  $\{w\}$  jest wektorem przemieszczeń liniowych i kątowych punktów węzłowych elementu, wówczas

$$\Delta w(x, y) = [\mathbf{B}^{II}(x, y)] \{\Delta w\}, \quad a, \quad (5.9)$$

$$\{\Delta \varepsilon^{II}\} = [\mathbf{A}^{II}] [\mathbf{B}^{II}] \{\Delta w\} = [\mathbf{C}^{II}] \{\Delta w\}. \quad (5.10)$$

Stąd (4.10)

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{II}\} dV = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta w\}^T [\mathbf{C}^{II}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{C}^{II}] \{\Delta w\} dV = \frac{1}{2} \{\Delta w\}^T [\mathbf{k}_z] \{\Delta w\}, \quad (5.11)$$

gdzie:

$$[\mathbf{k}_z] = \int_{Vol} [\mathbf{C}^{II}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{C}^{II}] dV, \quad (5.12)$$

jest natomiast znaną liniową macierzą sztywności na zginanie elementów płyty [16].

Kontynuując określanie w podobny sposób wartości następnych całek (4.11 - 20) przy założeniu, że ugięcia początkowe dla stanów równowagi ( $N$ ),  $w_0^{(N)}$  będą wyznaczone w oparciu o zbliżone lub identyczne funkcje kształtu, jak w wyrażeniu (5.8) otrzymamy:

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV = C_1(\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta u\}, \{\Delta w\}), \quad (5.13)$$

gdzie, zgodnie z (4.11) elementy wektorów  $\{w_0^{(N)}\}$ ,  $\{\Delta u\}$ ,  $\{\Delta w\}$  w tej całce wystąpią w pierwszej potędze.

Następnie

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV = C_2(\{\Delta u\}, \{\Delta w^2\}) \quad (5.14)$$

gdzie z kolei, zgodnie z (4.12) elementy wektora  $\{\Delta u\}$  wystąpią w pierwszej, natomiast wektora  $\{\Delta w\}$  w drugiej potędze. I dalej:

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{III}\} dV = C_3(\{w_0^{(N)2}\}, \{\Delta w^2\}), \quad (5.15)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV = C_4(\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta w^3\}), \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^{IV}\} dV = C_5(\{\Delta w^4\}), \quad (5.17)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^I\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV = C_6(\{\Delta \varepsilon^{b^p}\}, \{\Delta u\}), \quad (5.18)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \varepsilon^{II}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \varepsilon^p\} dV = C_7(\{\Delta m^p\}, \{\Delta w\}), \quad (5.19)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{III}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^P\} dV = C_8(\{\Delta \mathbf{e}^{bP}\}, \{\mathbf{w}_0^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{w}\}), \quad (5.20)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T [\mathbf{E}] \{\Delta \mathbf{e}^P\} dV = C_9(\{\Delta \mathbf{e}^{bP}\}, \{\Delta \mathbf{w}^2\}), \quad (5.21)$$

$$\int_{Vol} \{\Delta \mathbf{e}^{IV}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{(N)}\} dV = C_{10}(\{N^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{w}^2\}), \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \int_S \{\Delta \mathbf{q}\}^T \{\Delta \mathbf{p}\} dS &= \int_S \Delta p_z \Delta w dS + t \int_S [\Delta p_x \Delta u_{,x} + \Delta p_y \Delta v_{,y} + \Delta p_{xy} (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x})] dS = \\ &= C_{11}(\Delta p_z, \{\Delta \mathbf{w}\}) + C_{12}(\{\Delta \mathbf{p}_b\}, \{\Delta \mathbf{u}\}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

W powyższych całkach przez  $\{\Delta \mathbf{e}^{bP}\}$ ,  $\{\Delta \mathbf{m}^P\}$ ,  $\{N^{(N)}\}$ ,  $\{\Delta \mathbf{p}_b\}$  oznaczono następujące wektory:

$$\begin{aligned} \{\Delta \mathbf{e}^{bP}\} &= \{\Delta \varepsilon_x^{bP} \Delta \varepsilon_y^{bP} \Delta \gamma_{xy}^{bP}\}, \quad \{N^{(N)}\} = \{N_x^{(N)} N_y^{(N)} N_{xy}^{(N)}\}, \\ \{\Delta \mathbf{m}^P\} &= \{\Delta m_x^P \Delta m_y^P \Delta m_{xy}^P\}, \quad \{\Delta \mathbf{p}_b\} = \{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_{xy}\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ponieważ winno być  $\delta(\Delta II) = 0$ , a przyrost potencjału jest funkcją wektorów  $\{\Delta \mathbf{u}\}$ ,  $\{\Delta \mathbf{w}\}$  przeto:

$$\delta(\Delta II) = \sum^n \left[ \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{u}\}} \delta(\{\Delta \mathbf{u}\}) + \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{w}\}} \delta(\{\Delta \mathbf{w}\}) \right] = 0, \quad (5.25)$$

gdzie przez  $n$  oznaczono liczbę elementów płyty.

Stąd

$$\sum^n \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{u}\}} = 0, \quad \sum^n \frac{\partial(\Delta II)}{\partial\{\Delta \mathbf{w}\}} = 0. \quad (5.26)$$

Warunki (5.26) dostarczają poniższe nieliniowe równania algebraiczne, w oparciu o które można wyznaczyć  $\{\Delta \mathbf{u}\}$  i  $\{\Delta \mathbf{w}\}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_b] \{\Delta \mathbf{u}\} + ([\mathbf{K}_{bz}^I(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\})] + [\mathbf{K}_{bz}^{II}(\{\Delta \mathbf{w}\})]) \{\Delta \mathbf{w}\} &= \{\Delta p_b^I\} + \Delta p_b^{II}(\{\Delta \mathbf{e}^{bP}\}), \\ ([\mathbf{K}_{zb}^I(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\})] + [\mathbf{K}_{zb}^{II}(\{\Delta \mathbf{w}\})]) \{\Delta \mathbf{u}\} + ([\mathbf{K}_z^I] + [\mathbf{K}_z^{II}(\{\mathbf{w}_0^{(N)2}\})] + [\mathbf{K}_z^{III}(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{w}\})] + \\ &+ [\mathbf{K}_z^{IV}(\{\Delta \mathbf{w}^2\})] + [\mathbf{K}_z^V(\{\Delta \mathbf{e}^{bP}\})] + [\mathbf{K}_z^{VI}(\{N^{(N)}\})]) \{\Delta \mathbf{w}\} = \{\Delta p_z^I\} \\ &+ \{\Delta p_z^{II}(\{\Delta \mathbf{m}^P\})\} + \{\Delta p_z^{III}(\{\mathbf{w}_0^{(N)}\}, \{\Delta \mathbf{e}^{bP}\})\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdzie:

$[\mathbf{K}_b]$  — liniowa macierz sztywności błonowej płyty

$[\mathbf{K}_z^I]$  — liniowa macierz sztywności na zginanie płyty

$\{\Delta \mathbf{u}\}$  — wektor przyrostów przemieszczeń błonowych płyty (przemieszczenia liniowe w kierunku osi  $x$  i  $y$ , rys. 3.1a)

$\{\Delta \mathbf{w}\}$  — wektor przyrostów przemieszczeń wywołanych zginaniem płyty (przemieszczenia liniowe wzdłuż osi  $z$  i kątowe względem  $x$  i  $y$ )

$\{\Delta p_b^I\}$  — wektor przyrostu ekwiwalentnych zewnętrznych obciążeń błonowych płyty

$\{\Delta p_z^I\}$  — wektor przyrostu ekwiwalentnych zewnętrznych obciążeń poprzecznych płyty.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{bz}^I(\{w_0^{(N)}\})] \{\Delta u\} &= \sum^n \frac{\partial C_1}{\partial \{\Delta u\}}, \\
[\mathbf{K}_{zb}^I(\{w_0^{(N)}\})] \{\Delta u\} &= \sum^n \frac{\partial C_1}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_{bz}^{II}(\{\Delta w\})] \{\Delta u\} &= \sum^n \frac{\partial C_2}{\partial \{\Delta u\}}, \\
[\mathbf{K}_{zb}^{II}(\{\Delta w\})] \{\Delta u\} &= \sum^n \frac{\partial C_2}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{III}(\{w_0^{(N)2}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_3}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{III}(\{w_0^{(N)}, \{\Delta w\}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_4}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{IV}(\{\Delta w^2\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_5}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^V(\{\Delta \varepsilon^{bp}\})] \{\Delta w\} &= - \sum^n \frac{\partial C_9}{\partial \{\Delta w\}}, \\
[\mathbf{K}_z^{VI}(\{N^{(N)}\})] \{\Delta w\} &= \sum^n \frac{\partial C_{10}}{\partial \{\Delta w\}}, \\
\{\Delta p_b^I\} &= \sum^n \frac{\partial C_{12}}{\partial \{\Delta u\}}, \quad \{\Delta p_b^{II}(\{\Delta \varepsilon^{bp}\})\} = \sum^n \frac{\partial C_6}{\partial \{\Delta u\}}, \\
\{\Delta p_z^I\} &= \sum^n \frac{\partial C_{11}}{\partial \{\Delta w\}}, \quad \{\Delta p_z^{II}(\{\Delta m^p\})\} = \sum^n \frac{\partial C_7}{\partial \{\Delta w\}}, \\
\{\Delta p_z^{III}(\{\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta \varepsilon^{bp}\})\})\} &= \sum^n \frac{\partial C_9}{\partial \{\Delta w\}}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Bardziej zwięzła postać równań (5.27) przystosowana do powszechnie już używanej w zagadnieniach nieliniowych procedury numerycznej Newtona-Raphsona z siłami korekcyjnymi [2.3] jest następująca:

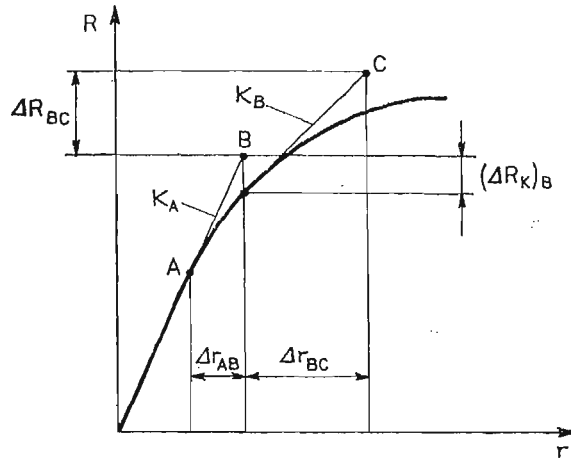
$$[\mathbf{K}]_B \{\Delta r\}_{BC} = \{\Delta R\}_{BC} + \{\Delta R_K\}_B, \tag{5.29}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}]_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_b \\ \mathbf{K}_{zb}^I & \mathbf{K}_z^I + \mathbf{K}_z^{II} + \mathbf{K}_z^{VI} \end{bmatrix}, \quad \{\Delta r\}_{BC} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \end{Bmatrix} \\
\{\Delta R\}_{BC} &= \begin{Bmatrix} \Delta p_b^I \\ \Delta p_z^I \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta R_K\}_B = \begin{Bmatrix} \Delta p_b^{II} \\ \Delta p_z^{II} + \Delta p_z^{III} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{bz}^{II} \\ \mathbf{K}_{zb}^{II} & \mathbf{K}_z^{III} + \mathbf{K}_z^{IV} + \mathbf{K}_z^V \end{bmatrix} \{\Delta r\}_{AB}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Znaczenie poszczególnych symboli w równaniu (5.29) wyjaśnia rys. 5.1





Rys. 5.1

Dla dostatecznie małych kroków obciążeń równania (5.27) można nieco uprościć na drodze ich linearyzacji, czyli przez pominięcie członów zależnych od iloczynów przyrostów składowych poszczególnych wektorów, względnie przyrostów składowych wektorów w potęgach drugiej i wyższych. Wówczas  $\mathbf{K}_{bz}^{II} = \mathbf{K}_{zb}^{II} = \mathbf{K}_z^{III} = \mathbf{K}_z^{IV} = \mathbf{K}_z^V = 0$ . W konsekwencji tego siły korekcyjne zależą tylko od ugięć początkowych oraz stopnia uplastycznienia materiału:

$$\{\Delta R_K\}_B = \left\{ \frac{\Delta p_b^{II}(\{\Delta \varepsilon^{bp}\})}{\Delta p_z^{II}(\{\Delta m^p\}) + \Delta p_z^{III}(\{w_0^{(N)}\}, \{\Delta \varepsilon^{bp}\})} \right\}_B. \quad (5.31)$$

W odniesieniu do przyrostowych różniczkowych równań (4.26) (4.31) takie uproszczenie jest równoznaczne wyeliminowaniu iloczynów  $\Delta F_{,xx} \Delta w_{,yy}$ ,  $\Delta F_{,yy} \Delta w_{,xx}$ ,  $2\Delta F_{,xy} \Delta w_{,xy}$ , w równaniu (4.26) oraz  $\Delta w_{,xy}^2 - \Delta w_{,xx} \Delta w_{,yy}$  w równaniu (4.31). Dla tych samych rezultatów prowadzi zaniechanie w wektorze  $\{\Delta \varepsilon\}$  w wyrażeniu (4.5) jego składowych nieliniowych  $\frac{1}{2} \Delta w_{,x}^2$ ,  $\frac{1}{2} \Delta w_{,y}^2$ ,  $\Delta w_{,x} \Delta w_{,y}$  na początku wszelkich działań.

Przyrostowa nieliniowa teoria płyt w zakresie sprężysto-plastycznych odkształceń materiału oraz metoda elementu skończonego stanowiły podstawę algorytmu i programu obliczeń nośności granicznej płyt, których szczegółowy opis zamieszczono w pracy [10]. Program opracowano w ramach problemu międzyresortowego MRI-27. Jest on wykorzystywany do analizy wpływu naprężeń i ugięć początkowych na nośność graniczną płyt poszycia statków przy ściskaniu osiowym. Uzyskane wyniki badań będą przedmiotem kolejnych publikacji.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. KMIECIK, *Badania modelowe nośności granicznej osiowo-ściskowych wzdłużnie usztywnionych płyt okrętowych*, Zeszyty Problemowe Techniki Okrętowej, Zeszyt Nr 1. Budownictwo Okrętowe, Gdańsk, 1972.

2. R. D. COOK, *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley Sons, Inc. 1974.
3. M. KLEIBER, *Nieliniowa, styczna i dynamiczna analiza powłok metodą elementów skończonych*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Tom 18, Zeszyt 2, PWN — Warszawa, 1980.
4. C. S. SMITH, J. BÄCKLUND, P. G. BERGAN, Y. FUJITA, N. JONES, M. КМІЕЦІК, P. MAJERS, P. T PEDERSEN, K. A. RECKLING, A. B. STAVOVY, *Nonlinear structural response*. Proceedings of the Seventh International Ship Structures Congress, Vol. I, Institute de Recherches de la Construction Navale — Paris, 1979.
5. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją: W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, PWN — Warszawa, 1965.
6. A. A. ILIUSZIN, *Plasticznost*, Gostechizdat — Moskwa, 1948.
7. N. N. MELININ, J. RZYSKO, *Mechanika materiałów*, PWN — Warszawa, 1981.
8. J. B. MARTIN, *Plasticity: Fundamentals and general results*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
9. R. HILL, *Mathematical theory of plasticity*, Oxford, 1950.
10. A. JAZUKIEWICZ, M. КМІЕЦІК, *Opis programu PLAMES do nieliniowej analizy usztywnionych płyt z uwzględnieniem odkształceń i naprężeń spawalniczych metodą elementu skończonego*. Opracowanie Nr 37-S. Politechnika Szczecińska, Instytut Okrętowy, Zakład Konstrukcji i Mechaniki Okrętów, Szczecin, 1981.
11. Y. YAMADA, N. YOSHIMURA, T. SAKARAI, *Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method*, IJMSci, Vol. 10, No. 5, 1968.
12. O. C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN, I. P. KING, *Elastoplastic solutions of engineering problems*, Initial stress, Finite element approach, IJNME, Vol 1, No. 1, 1969.
13. M. КМІЕЦІК, *Metody rozwiązywania równań nieliniowej teorii płyt*, Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 162, Szczecin, 1981.
14. H. PFAU, M. КМІЕЦІК, H. J. KNAPPE, *Ein Beitrag zur Berechnung der Verformungen und Spannungen in druckbelasteten isotropen Rechteckplatten grosser Ausbiegung unter Verwendung von Geeigneten Differenzenmethoden*, Schiffbauforschung 5/6, 1978.
15. J. DANKERT, *Numerische Methoden der Mechanik*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1977.
16. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady — Warszawa, 1972.
17. K. WASHIZU, *Complementary variational principles in elasticity*; Praca zamieszczona w: „Duality and complementarity in mechanics of solids”, PAN IPPT, Ossolineum, 1979.
18. J. COLVILLE, *A general solution of the von Kármán plate equations by finite element method*, University Microfilms, A XEROX Company, Ann Arbor, Michigan, 1971.
19. T. KOZŁOWSKI, *Zarys teorii sprężystości*, Arkady — Warszawa, 1968.
20. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN — Warszawa, 1970.
21. T. H. RICHARDS, *Energy methods in stress analysis*, Applied Science Publishers Ltd, London, 1977.
22. H. PFAU, U. HÄR, *Mathematische Modelle zur Berechnung von axial und normal belasteten, vorverformten Rechteckplatten grosser Verformung mittels Differenzenmethoden*, Schiffbauforschung, 3/1980.
23. S. WOLMIR, *Gibkije plastinki i oboloczki*, Moskwa, 1956.

## Р е з ю м е

ИНКРИМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК  
С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ПРОГИБАМИ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ  
ОБЛАСТИ

Эффективное решение нелинейных задач требует инкриментной формулировки. В работе, на основе вариационной формулировки уравнений равновесия и теории течения Прандтля-Рейсса выведены инкриментные уравнения нелинейной теории пластинок с начальными напряжениями и прогибами. Таким способом получено инкриментное обобщение нелинейной теории пластинок фон Кармана на упругопластическую область. Даны также соответственные выражения для решения обобщенной теории методом конечных элементов.

## S u m m a r y

INCREMENTAL EQUATIONS OF NONLINEAR THEORY OF PLATES WITH  
INITIAL DEFLECTIONS AND STRESSES IN ELASTIC-PLASTIC RANGE

Incremental approach is necessary for effective solution of nonlinear problems of structural mechanics. The incremental equations of finite deflection theory of plates have been derived on the base of variational formulation of equilibrium equations taking into account Prandtl-Reuss flow theory.

Initial deflections and stresses have also been into account. In this way an incremental generalization on elastic-plastic range of von Kármán nonlinear theory of plates has been derived. Finite element solution of the generalization has been demonstrated.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1982 roku*

---