

DYSKRETNA ANALIZA MODELI REOLOGICZNYCH¹⁾

ROMUALD ŚWITKA,
BOGDAN HUSIAR

Poznań, Politechnika Poznańska

1. Wstęp

Problemy związane z wyznaczaniem naprężeń i odkształceń w ciałach lepkosprężystych komplikują się przede wszystkim z powodu reologicznych równań stanu, które występują z reguły w postaci związków różniczkowych bądź całkowych [1 ÷ 5]. Trudności z tym związane rozwiązuje najogólniej znana analogia sprężysto-lepkosprężysta ALFREY'a i LEE [2]. Analogia ta dotyczy podobieństwa pomiędzy transformacjami Laplace'a związków opisujących ciało lepkosprężyste a równaniami teorii sprężystości. Tą drogą możliwe jest rozwiązanie niektórych podstawowych zadań, co unaocznia znana monografia NOWACKIEGO [2]. Jednakże możliwości tej analogii są ograniczone trudnościami natury matematycznej, które pojawiają się przy wyznaczaniu transformacji odwrotnej.

Rozwiązania większości problemów praktycznych lepkosprężystości należy więc szukać na drodze metod numerycznych.

PEDACHOWSKI [6] zaproponował pewną metodę „kontinualno-dyskretną” opartą na znajomości funkcji pełzania. Sumując przyrosty odkształceń reologicznych otrzymał on związek między odkształceniem w danej chwili a naprężeniami we wszystkich chwilach poprzednich.

Do rozwiązywania zadań lepkosprężystych w ujęciu metody elementów skończonych powszechnie stosowane są metody iteracyjne. Spośród nich można wymienić sposób naprężeń początkowych i sposób odkształcenia początkowego, obydwa opisane przez ZIENKIEWICZA [7]. Sposób odkształcenia początkowego był stosowany przez wielu autorów, m.in. przez ZIENKIEWICZA [8] oraz ARGYRISA [9].

Do rozwiązywania problemów reologii mają też szerokie zastosowanie metody numerycznego całkowania liniowych i nieliniowych równań ruchu. Metody te, a mają one również charakter iteracyjny, dzieli się na proste (explicit) i złożone (implicit). Do metod prostych zalicza się np. metodę Eulera i metodę Rungego-Kutty, do złożonych m.in. metodę stycznych [10] i metodę czasoprzestrzennych elementów skończonych KĄCZKOW-

¹⁾ Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” — koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

SKIEGO [11]. Ta ostatnia metoda stwarza, jak się wydaje, nowe możliwości również w dziedzinie lepkosprężystości.

Autorzy niniejszego opracowania wybrali inną drogę. Opierając się na opisie ciała lepkosprężystego za pomocą związku różniczkowego aproksymują przebieg naprężeń w poszczególnych przedziałach czasu wielomianem. Takie ujęcie pozwala na opis zjawisk pełzania w ciałach liniowo lepkosprężystych. W rezultacie otrzymuje się związki rekurencyjne, w których odkształcenie w danej chwili jest określone przez naprężenie w tejże chwili i przez stan układu w chwili poprzedniej. Przedłożoną metodę można więc zakwalifikować do metod prostych. Przedział czasu dzielący obie chwile może być, w wielu przypadkach dowolnie długi, co jest zaletą metody, w pozostałych — długość przedziału czasowego należy regulować w oparciu o kryterium dokładności. Powyższa metoda była już stosowana w pracach [12, 13].

W niniejszej pracy problem został uogólniony przez dopuszczenie nieciągłości funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$ oraz funkcji $\varepsilon(t)$ i $\dot{\varepsilon}(t)$. Zastosowano aproksymację liniową i kwadratową funkcji $\sigma(t)$. Przeprowadzono analizy wyników dla podstawowych modeli reologicznych (Kelvin-Voigt, Zener, Burgers) i analizy błędów obliczeń w zależności od aproksymacji i długości kroku.

Jakkolwiek ograniczono analizy tylko do modeli reologicznych, to jednak uzyskane wyniki pozwalają na dalsze zastosowanie metody w złożonych układach lepkosprężystych. Jako przykład można podać wstępnie napiętą siatkę ciągnową. Nad problemem pełzania siatki ciągnowej są prowadzone obecnie prace.

2. Równanie konstytutywne ciała lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym

Równanie konstytutywne dla materiału lepkosprężystego można przedstawić w postaci związku różniczkowego [2]

$$P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t) \quad (2.1)$$

w którym $D = d/dt$ jest operatorem różniczkowania względem czasu t , $P(D)$ i $Q(D)$ są liniowymi operatorami różniczkowymi (wielomianami argumentu D w ogólności stopnia n , przy czym stopień może być niższy, jeśli część współczynników wielomianu będzie równa zero), σ jest naprężeniem i ε — odkształceniem.

Na osi czasu wyodrębniamy chwile t_τ ($\tau = 0, 1, 2, \dots$) dzieląc oś na przedziały $\vartheta_\tau = t_\tau - t_{\tau-1}$.

Przyjęto, że przebieg naprężenia w czasie jest funkcją niekoniecznie ciągłą. Miejsca nieciągłości będą węzłami na osi czasu. Poza tym inne węzły rozmieszcza się stosownie do potrzeb obliczeniowych. Tak więc w ogólności w węźle τ naprężenie może doznawać przyrostu o

$$\Delta\sigma_\tau = \sigma'_\tau - \sigma_\tau,$$

a prędkość naprężenia — skoku o

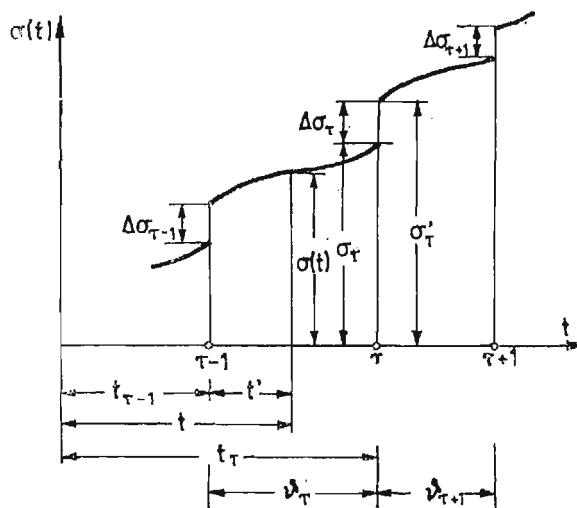
$$\Delta\dot{\sigma}_\tau = \dot{\sigma}'_\tau - \dot{\sigma}_\tau.$$

Wprowadzono oznaczenia

$$\sigma_{\tau} = [\sigma(t)]_{t=t_{\tau}-0}, \quad \sigma'_{\tau} = [\sigma(t)]_{t=t_{\tau}+0},$$

$$\dot{\sigma}_{\tau} = \left[\frac{d\sigma(t)}{dt} \right]_{t=t_{\tau}-0}, \quad \dot{\sigma}'_{\tau} = \left[\frac{d\sigma(t)}{dt} \right]_{t=t_{\tau}+0}.$$

Podział osi czasu i przebieg funkcji $\sigma(t)$ ilustruje rys. 1.



Rys. 1

Napężenie $\sigma(t)$ w przedziale czasu $\vartheta_{\tau} = t_{\tau} - t_{\tau-1}$ można aproksymować za pomocą wielomianu stopnia m :

$$\sigma(t') = \alpha_0 + \alpha_1 t' + \alpha_2 (t')^2 + \dots + \alpha_m (t')^m,$$

$$t' = t - t_{\tau-1}, \quad t' \in (0, \vartheta_{\tau}). \quad (2.2)$$

Jeśli $m = 1$ (aproksymacja liniowa), to

$$\alpha_0 = \sigma'_{\tau-1}, \quad \alpha_1 = \frac{\sigma_{\tau} - \sigma'_{\tau-1}}{\vartheta_{\tau}}. \quad (2.3)$$

Jeśli $m = 2$ (aproksymacja kwadratowa), to

$$\alpha_0 = \sigma'_{\tau-1}, \quad \alpha_1 = \dot{\sigma}'_{\tau-1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\vartheta_{\tau}^2} (\sigma_{\tau} - \sigma'_{\tau-1} - \dot{\sigma}'_{\tau-1} \vartheta_{\tau}). \quad (2.4)$$

Z wyższych stopni wielomianu (2.2) w niniejszej pracy nie korzystano. Krzywe aproksymujące funkcję $\sigma(t)$ przedstawiono na rysunkach 2 (aproksymacja liniowa) i 3 (aproksymacja kwadratowa).

Rozwiązanie równania (2.1), w którym $\sigma(t')$ dane jest wzorem (2.2), będziemy poszukiwać w przedziale $t' \in (0, \infty)$, przyjmując najpierw, że funkcje $\sigma(t')$ i $\varepsilon(t')$ są w całym tym przedziale określone i są funkcjami rzędu wykładniczego, co pozwala na zastosowanie transformacji całkowej Laplace'a. Z przedziału $(0, \infty)$ można następnie wyodrębnić

przedział $(0, t_r)$. Po wykonaniu transformacji Laplace'a na równaniach (2.1) i (2.2) otrzymuje się

$$\begin{aligned} P(p)\tilde{\sigma}(p) - P_0(p, D)\sigma(0) &= Q(p)\tilde{\varepsilon}(p) - Q_0(p, D)\varepsilon(0), \\ \tilde{\sigma}(p) &= \frac{1}{p}\alpha_0 + \frac{1}{p^2}\alpha_1 + \frac{2}{p^3}\alpha_2 + \dots + \frac{m}{p^{m+1}}\alpha_m. \end{aligned} \quad (2.5)$$

W równaniach (2.5) $\tilde{\sigma}(p)$ i $\tilde{\varepsilon}(p)$ są transformatami Laplace'a funkcji $\sigma(t')$ i $\varepsilon(t')$, p jest parametrem całkowania, a wielomiany P , Q , P_0 i Q_0 mają postać:

$$\begin{aligned} P(p) &= \sum_{j=0}^n a_j p^j, & Q(p) &= \sum_{j=0}^n b_j p^j, \\ P_0(p, D) &= \sum_{j=1}^n (a_j + a_{j+1}p + \dots + a_n p^{n-j}) D^{j-1}, \\ Q_0(p, D) &= \sum_{j=1}^n (b_j + b_{j+1}p + \dots + b_n p^{n-j}) D^{j-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Operację $D^{j-1}\sigma(0)$ lub $D^{j-1}\varepsilon(0)$, $j = 1, 2, \dots, n$ należy rozumieć jako granicę lewostronną funkcji i ich pochodnych w punkcie $t' = 0$:

$$D^{j-1}\sigma(0) = \left[\frac{d^{j-1}\sigma(t)}{dt^{j-1}} \right]_{t=t_r-0}, \quad D^{j-1}\varepsilon(0) = \left[\frac{d^{j-1}\varepsilon(t)}{dt^{j-1}} \right]_{t=t_r-0}.$$

Jest to związane z nieciągłością funkcji transformowanych w punkcie $t = t_r$. Można się tu powołać na rozważania zawarte np. w [14] str. 75 - 76²⁾

Z równania (2.5)₁ oblicza się transformatę $\tilde{\varepsilon}(p)$. Dalsze rozważania wymagają bliższych ustaleń w odniesieniu do związku konstytutywnego (2.1) i aproksymacji (2.2). Przyjęto model reologiczny co najwyżej pięcioparametrowy, to znaczy model opisany równaniem

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

w którym niektóre współczynniki a_i i b_i mogą być równe zero, oraz aproksymację co najwyżej kwadratową ($m = 2$). W równaniu (2.7) występuje 6 współczynników, z których jednakże tylko 5 jest niezależnych.

Rozwiązanie zadania będzie tak ujęte, że wyniki będą słuszne również dla modeli niższych rzędów.

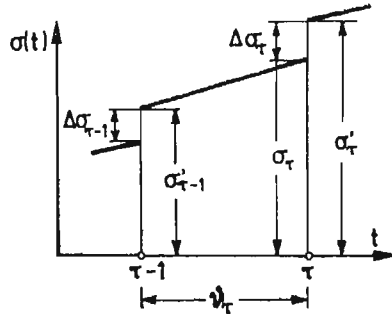
²⁾ Dobrym przykładem istoty problemu jest funkcja Heaviside'a $H(t)$. Transformata Laplace'a pochodnej funkcji Heaviside'a jest równa

$$\mathcal{L}[H'(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

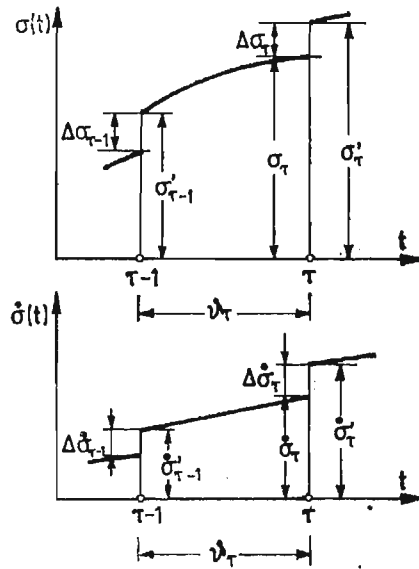
Taki sam wynik uzyskamy na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu oryginału

$$\mathcal{L}[H'(t)] = p\mathcal{L}[H(t)] - H(0) = 1 - H(0)$$

jeśli przyjmie się $H(0) = H(0^-) = 0$.



Rys. 2



Rys. 3

Uwzględniając w (2.5) powyższe uwagi oraz warunki początkowe $\sigma(0) = \sigma_{\tau-1}$, $\dot{\sigma}(0) = \dot{\sigma}_{\tau-1}$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_{\tau-1}$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_{\tau-1}$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(p) = & \tilde{c}_0(p) \varepsilon_{\tau-1} + \tilde{c}_1(p) \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \tilde{c}_2(p) (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + \tilde{c}_3(p) (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + \tilde{c}_4(p) 2a_0 \alpha_2 + \\ & + [a_1 \tilde{c}_5(p) + a_2 \tilde{c}_6(p)] (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 \tilde{c}_5(p) (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

We wzorze (2.8):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0(p) = \frac{b_1 + b_2 p}{Q(p)}, \quad \tilde{c}_1(p) = \frac{b_2}{Q(p)}, \quad \tilde{c}_2(p) = \frac{1}{p Q(p)}, \\ \tilde{c}_3(p) = \frac{1}{p^2 Q(p)}, \quad \tilde{c}_4(p) = \frac{1}{p^3 Q(p)}, \quad \tilde{c}_5(p) = \frac{1}{Q(p)}, \\ \tilde{c}_6(p) = \frac{p}{Q(p)}, \quad Q(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tablica 1. Wartości współczynników $c_{i,\tau}$

Lp.	Przypadek	$c_{0,\tau}$	$c_{1,\tau}$	$c_{2,\tau}$	$c_{3,\tau}$	$c_{4,\tau}$	$c_{5,\tau}$	$c_{6,\tau}$
1	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 = 0$	0	0	$\frac{1}{b_0}$	$\frac{1}{b_0} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{2b_0} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{b_0} \delta(\vartheta_\tau)$	$\frac{1}{b_0} \delta(\vartheta_\tau)$
2	$b_0 = 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	1	0	$\frac{1}{b_1} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{2b_1} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{6b_1} \vartheta_\tau^3$	$\frac{1}{b_1}$	$\frac{1}{b_1} \delta(\vartheta_\tau)$
3	$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	1	ϑ_τ	$\frac{1}{2b_2} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{6b_2} \vartheta_\tau^3$	$\frac{1}{24b_2} \vartheta_\tau^4$	$\frac{1}{b_2} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{b_2}$
4	$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	1	$\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \vartheta_\tau})$	$\frac{1}{b_1} (\vartheta_\tau - c_{1,\tau})$	$\frac{1}{2b_1} \frac{\vartheta_\tau^2 - c_{2,\tau}}{\lambda}$	$\frac{1}{6b_1} \frac{\vartheta_\tau^3 - c_{3,\tau}}{\lambda}$	$\frac{1}{b_1} (1 - e^{-\lambda \vartheta_\tau})$	$\frac{1}{b_2} e^{-\lambda \vartheta_\tau}$
5	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	$\cos \omega_0 \vartheta_\tau$	$\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \vartheta_\tau$	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} (\vartheta_\tau - c_{1,\tau})$	$\frac{1}{2b_0} \frac{\vartheta_\tau^2 - c_{2,\tau}}{\omega_0^2}$	$\frac{1}{b_2} c_{1,\tau}$	$\frac{1}{b_2} c_{0,\tau}$
6	$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	$e^{-\alpha \vartheta_\tau}$	0	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} \vartheta_\tau - \alpha$	$\frac{1}{2b_0} \frac{\vartheta_\tau^2 - c_{3,\tau}}{\alpha}$	$\frac{1}{b_1} e^{-\alpha \vartheta_\tau}$	$\frac{1}{b_1} [\delta(\vartheta_\tau) - \alpha e^{-\alpha \vartheta_\tau}]$
7	$b_0 \neq 0, D = 1$	$\lambda c_{1,\tau} + (1 - \omega_0 \vartheta_\tau) e^{-\omega_0 \vartheta_\tau}$	$\vartheta_\tau e^{-\omega_0 \vartheta_\tau}$					
8	$b_1 \neq 0, D < 1$	$\lambda c_{1,\tau} + \frac{\omega_0}{\varphi_1} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sin \varphi_1$	$\frac{1}{\varphi_1} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sin \varphi_1 \vartheta_\tau$	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} (\vartheta_\tau - \frac{1}{b_1} c_{2,\tau} - \frac{1}{-c_{1,\tau}})$	$\frac{1}{b_0} (\frac{\vartheta_\tau^2}{2} - \frac{1}{-b_1 c_{3,\tau}} - \frac{1}{-b_2 c_{2,\tau}})$	$\frac{1}{b_2} c_{1,\tau}$	$\frac{1}{b_2} c_{0,\tau} - \lambda c_{1,\tau}$
9	$b_2 \neq 0, D > 1$	$\lambda c_{1,\tau} + \frac{\omega_0}{\varphi_2} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sinh \varphi_2$	$\frac{1}{\varphi_2} e^{-D\omega_0 \vartheta_\tau} \sinh \varphi_2 \vartheta_\tau$					

$$\alpha = \frac{b_0}{b_1}, \quad \lambda = \frac{b_1}{b_2}, \quad \omega_0^2 = \frac{b_0}{b_2} = \lambda \alpha, \quad D = \frac{\lambda}{2\omega_0}$$

$$\varphi_1 = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \quad \psi_1 = \arctg \frac{\varphi_1}{(-D\omega_0)}, \quad \Phi_1 = \varphi_1 \vartheta_\tau + \psi_1,$$

$$\varphi_2 = \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}, \quad \psi_2 = \operatorname{artgh} \frac{\varphi_2}{(-D\omega_0)}, \quad \Phi_2 = \varphi_2 \vartheta_\tau + \psi_2.$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się

$$\begin{aligned} \varepsilon(t') = & c_0(t') \varepsilon_{\tau-1} + c_1(t') \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + c_2(t') (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + c_3(t') (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + c_4(t') 2a_0 \alpha_2 + \\ & + [a_1 c_5(t') + a_2 c_6(t')] (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 c_5(t') (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podstawiając $t' = \vartheta_\tau$ i uwzględniając, że $\varepsilon(\vartheta_\tau) = \varepsilon_\tau$, dostajemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau = & c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + c_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + c_{2,\tau} (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + c_{3,\tau} (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + c_{4,\tau} \cdot 2a_0 \alpha_2 + \\ & + (a_1 c_{5,\tau} + a_2 c_{6,\tau}) (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 c_{5,\tau} (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dla prostoty zapisu oznaczono:

$$c_{i,\tau} = c_i(\vartheta_\tau), \quad i = 0, 1, \dots, 6.$$

Zestawienie współczynników $c_{i,\tau}$ dla różnych postaci wielomianu $Q(D)$ zawiera tablica 1.

Wykorzystanie tej tablicy i dobór współczynników a_0 , a_1 i a_2 we wzorze (2.11) pozwala wykorzystać ten związek dla każdego modelu co najwyżej pięcioparametrowego.

Związek rekurencyjny (2.11) pozwala obliczyć ε w chwili t_τ jeśli jest w tejże chwili określone σ oraz jeśli dany jest stan układu w chwili poprzedniej $t_{\tau-1}$. W równaniu (2.11) występuje również prędkość odkształcenia $\dot{\varepsilon}$ i niezbędny jest wzór dla jej obliczenia. Prędkość odkształcenia otrzymamy obliczając pochodną $\dot{\varepsilon}(t')$ ze wzoru (2.10) i podstawiając $t' = \vartheta_\tau$. W wyniku otrzymuje się

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau = & \dot{c}_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \dot{c}_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \dot{c}_{2,\tau} (2a_2 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_0 \alpha_0) + \\ & + \dot{c}_{3,\tau} (2a_1 \alpha_2 + a_0 \alpha_1) + \dot{c}_{4,\tau} \cdot 2a_0 \alpha_2 + \\ & + (a_1 \dot{c}_{5,\tau} + a_2 \dot{c}_{6,\tau}) (\alpha_0 - \sigma_{\tau-1}) + a_2 \dot{c}_{5,\tau} (\alpha_1 - \dot{\sigma}_{\tau-1}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\dot{c}_{i,\tau} = \left[\frac{dc_i(t')}{dt'} \right]_{t'=\vartheta_\tau}, \quad i = 0, 1, \dots, 6.$$

Współczynniki $\dot{c}_{i,\tau}$ zestawiono w tablicy 2. Wzory (2.11) i (2.12) są słuszne zarówno dla aproksymacji kwadratowej, jak i liniowej. W tablicach 1 i 2 zostały zestawione współczynniki $c_{i,\tau}$ i $\dot{c}_{i,\tau}$ dla wszystkich możliwych teoretycznie kombinacji współczynników b_0 , b_1 i b_2 . Niekoniecznie musi to oznaczać, że wszystkie podane kombinacje są fizycznie możliwe. Np. pod pozycją 1 przypadek $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ oznaczałby w ogólności, że odkształcenie jest kombinacją liniową σ , $\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$, co raczej wydaje się być przypadkiem fizycznie niemożliwym. Jeśli jednakże przyjąć, że $a_0 \neq 0$ i $a_1 = a_2 = 0$, to przypadek 1 doprowadzi nas do ciała Hooke'a. Podobnie pojawianie się dystrybucji $\delta(\vartheta_\tau)$ i jej pochodnych przy niektórych współczynnikach $c_{6,\tau}$ trudne jest do fizycznego zinterpretowania. Należy jednak zwrócić uwagę, że współczynnik $c_{6,\tau}$ występuje w iloczynie ze współczynnikiem a_2 . Można by więc postawić pytanie, czy istnieją takie modele reologiczne, dla których występuje w równaniu stanu przyspieszenie naprężenia i jednocześnie współczynniki b_0 , b_1 i b_2 odpowiadają przypadkom poz. 2 i poz. 6 omawianych tablic? Na to pytanie brak jest w tej pracy odpowiedzi, choć autorzy sądzą, że odpowiedź byłaby negatywna. Do takiego sądu skłania analiza wszystkich znanych autorom modeli reologicznych. W dalszych rozważaniach przyjmuje się więc, że jeśli zachodzi przypadek 2 lub 6, to $a_2 = 0$.

Tablica 2. Wartości współczynników $\dot{c}_{i,r}$

Lp.	Przypadek	$\dot{c}_{0,r}$	$\dot{c}_{1,r}$	$\dot{c}_{2,r}$	$\dot{c}_{3,r}$	$\dot{c}_{4,r}$	$\dot{c}_{5,r}$	$\dot{c}_{6,r}$
1	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 = 0$	0	0	0	$\frac{1}{b_0}$	$\frac{1}{b_0} \theta_r$	$\frac{1}{b_0} \delta'(\theta_r)$	$\frac{1}{b_0} \delta''(\theta_r)$
2	$b_0 = 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	0	0	$\frac{1}{b_1}$	$\frac{1}{b_1} \theta_r$	$\frac{1}{2b_1} \theta_r^2$	0	$\frac{1}{b_1} \delta'(\theta_r)$
3	$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	0	1	$\frac{1}{b_2} \theta_r$	$\frac{1}{2b_2} \theta_r^2$	$\frac{1}{6b_2} \theta_r^3$	$\frac{1}{b_2}$	0
4	$b_0 = 0, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$	0	$e^{-\lambda \theta_r}$	$\frac{1}{b_1} (1 - \dot{c}_{1,r})$	$\frac{1}{b_1} \theta_r - \frac{1}{\lambda} \dot{c}_{2,r}$	$\frac{1}{2b_1} \theta_r^2 - \frac{1}{\lambda} \dot{c}_{3,r}$	$\frac{1}{b_2} e^{-\lambda \theta_r}$	$\frac{\lambda}{b_2} e^{-\lambda \theta_r}$
5	$b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0$	$-\omega_0 \sin \omega_0 \theta_r$	$\cos \omega_0 \theta_r$	$-\frac{1}{b_0} \dot{c}_{0,r}$	$\frac{1}{b_0} (1 - \dot{c}_{1,r})$	$\frac{1}{b_0} \theta_r - \frac{1}{\omega_0^2} \dot{c}_{2,r}$	$\frac{1}{b_2} \dot{c}_{1,r}$	$\frac{1}{b_2} \dot{c}_{0,r}$
6	$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0$	$-\alpha e^{-\alpha \theta_r}$	0	$-\frac{1}{b_0} \dot{c}_{0,r}$	$\frac{1}{b_0} - \frac{1}{\alpha} \dot{c}_{2,r}$	$\frac{1}{b_0} \theta_r - \frac{1}{\alpha} \dot{c}_{3,r}$	$\frac{\alpha}{b_1} e^{-\alpha \theta_r}$	$\frac{1}{b_1} [\delta'(\theta_r) + \alpha^2 e^{-\alpha \theta_r}]$
7	$b_0 \neq 0$	$\lambda \dot{c}_{1,r} - \omega_0 (2 - \omega_0 \theta_r) e^{-\omega_0 \theta_r}$	$(1 - \omega_0 \theta_r) e^{-\omega_0 \theta_r}$					
8	$b_1 \neq 0$	$\lambda \dot{c}_{1,r} + \omega_0 e^{-D\omega_0 \theta_r} (\cos \Phi_1 - \frac{D\omega_0}{\varphi_1} \sin \Phi_1)$	$(\cos \varphi_1 \theta_r - \frac{D\omega_0}{\varphi_1} \sin \varphi_1 \theta_r) e^{-D\omega_0 \theta_r}$					
9	$b_2 \neq 0$	$\lambda \dot{c}_{1,r} + \omega_0 e^{-D\omega_0 \theta_r} (\cosh \Phi_2 - \frac{D\omega_0}{\varphi_2} \sinh \Phi_2)$	$(\cosh \varphi_2 \theta_r - \frac{D\omega_0}{\varphi_2} \times \sinh \varphi_2 \theta_r) e^{-D\omega_0 \theta_r}$	$-\frac{1}{b_0} \dot{c}_{0,r}$	$\frac{1}{b_0} (1 - \frac{1}{b_1} \dot{c}_{2,r} - \dot{c}_{1,r})$	$\frac{1}{b_0} (\theta_r - \frac{1}{b_1} \dot{c}_{3,r} - \frac{1}{b_2} \dot{c}_{2,r})$	$\frac{1}{b_2} \dot{c}_{1,r}$	$\frac{1}{b_2} (\dot{c}_{0,r} - \lambda \dot{c}_{1,r})$

W przypadku aproksymacji liniowej podstawia się α_0 i α_1 zgodnie ze wzorami (2.3) oraz uwzględnia się, że $\alpha_2 = 0$. Po przekształceniach otrzymuje się następujący związek rekurencyjny dla odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau = & c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + c_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \gamma_\tau \sigma_\tau + (a_0 c_{2,\tau} - \gamma_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 c_{5,\tau} + a_2 c_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} - a_2 c_{5,\tau} \frac{1}{\vartheta_{\tau-1}} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

We wzorze (2.13):

$$\begin{aligned} \gamma_\tau = & \frac{1}{\vartheta_\tau} (a_0 c_{3,\tau} + a_1 c_{2,\tau} + a_2 c_{5,\tau}), \\ \Delta \sigma_\tau = & \sigma'_\tau - \sigma_\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

We wzorze (2.13) występuje ponadto prędkość odkształcenia, którą oblicza się wzorem

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau = & \dot{c}_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \dot{c}_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \dot{\gamma}_\tau \sigma_\tau + (a_0 \dot{c}_{2,\tau} - \dot{\gamma}_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 \dot{c}_{5,\tau} + a_2 \dot{c}_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} - a_2 \dot{c}_{5,\tau} \frac{1}{\vartheta_{\tau-1}} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}), \\ \dot{\gamma}_\tau = & \frac{1}{\vartheta_\tau} (a_0 \dot{c}_{3,\tau} + a_1 \dot{c}_{2,\tau} + a_2 \dot{c}_{5,\tau}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

W przypadku aproksymacji kwadratowej otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau = & c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + c_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \bar{\gamma}_\tau \sigma_\tau + (a_0 c_{2,\tau} - \bar{\gamma}_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_0 c_{3,\tau} + a_1 c_{2,\tau} - \vartheta_\tau \bar{\gamma}_\tau) \dot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 c_{5,\tau} + a_2 c_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} + a_2 c_{5,\tau} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\bar{\gamma}_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau^2} (a_0 c_{4,\tau} + a_1 c_{3,\tau} + a_2 c_{2,\tau}),$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau = & \dot{c}_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \dot{c}_{1,\tau} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \dot{\bar{\gamma}}_\tau \sigma_\tau + (a_0 \dot{c}_{2,\tau} - \dot{\bar{\gamma}}_\tau) \sigma'_{\tau-1} + \\ & + (a_0 \dot{c}_{3,\tau} + a_1 \dot{c}_{2,\tau} - \vartheta_\tau \dot{\bar{\gamma}}_\tau) \dot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ & + (a_1 \dot{c}_{5,\tau} + a_2 \dot{c}_{6,\tau}) \Delta \sigma_{\tau-1} + a_2 \dot{c}_{5,\tau} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \\ \dot{\bar{\gamma}}_\tau = & \frac{2}{\vartheta_\tau^2} (a_0 \dot{c}_{4,\tau} + a_1 \dot{c}_{3,\tau} + a_2 \dot{c}_{2,\tau}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\dot{\sigma}_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau} (\sigma_\tau - \sigma'_{\tau-1}) - \dot{\sigma}'_{\tau-1},$$

$$\dot{\sigma}'_\tau = \frac{2}{\vartheta_\tau} (\sigma_\tau - \sigma'_{\tau-1}) + \Delta \dot{\sigma}_\tau - \dot{\sigma}'_{\tau-1}.$$

Wzory (2.13) i (2.16) pozwalają obliczyć ε_τ , to znaczy granicę lewostronną funkcji $\varepsilon(t)$ w punkcie $t = t_\tau$. Jeśli funkcja jest w tym punkcie nieciągła, to zachodzi potrzeba obliczenia również granicy prawostronnej ε'_τ . Granicę tę obliczymy za pomocą wzoru (2.10), bowiem $\varepsilon(0) = \varepsilon'_{-1}$.

Można wykazać, że wyłączwszy przypadek 1 w tablicy 1 jako mogący prowadzić tylko do ciała Hooke'a, dla wszystkich pozostałych przypadków otrzymuje się $c_0(0) = 1$,

$c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = c_4(0) = 0$ oraz $c_5(0) = \frac{1}{b_1}$, jeśli $b_1 \neq 0$ i $b_2 = 0$ oraz $c_5(0) = 0$ jeśli $b_2 \neq 0$. W końcu $c_6(0) = \frac{1}{b_2}$ jeśli $b_2 \neq 0$, a w przypadkach 2 i 6 uzasadnione zostało już, że $a_2 = 0$. Otrzymuje się więc w postaci ogólnej

$$\varepsilon'_{\tau-1} = \varepsilon_{\tau-1} + [a_1 c_5(0) + a_2 c_6(0)] \Delta \sigma_{\tau-1},$$

lub, z uwzględnieniem powyższych wywodów

$$\varepsilon'_\tau = \varepsilon_\tau + \frac{a_1}{b_1} \Delta \sigma_\tau, \quad (2.18)$$

jeśli $b_1 \neq 0$ i $b_2 = 0$, oraz

$$\varepsilon'_\tau = \varepsilon_\tau + \frac{a_2}{b_2} \Delta \sigma_\tau, \quad (2.19)$$

jeśli $b_2 \neq 0$.

Wzory (2.18 - 2.19) są słuszne dla aproksymacji liniowej i kwadratowej. Ze wzorów tych wynika też, że funkcja $\varepsilon(t)$ jest ciągła (mimo nieciągłości funkcji $\sigma(t)$), jeśli $a_1 = 0$ w przypadkach 2 i 6, lub $a_2 = 0$ w przypadkach pozostałych. Jest tak np. w modelu Kelvina-Voigta (przyp. 6), w którym $a_1 = 0$. Dla modelu Maxwella (przyp. 2) jest $a_1 = \frac{1}{E}$ i skok funkcji $\sigma(t)$ powoduje nieciągłość $\varepsilon(t)$.

W podobny sposób można określić granice prawostronne funkcji $\dot{\varepsilon}(t)$ jeśli jest nieciągła. Otrzymuje się:

$$\dot{\varepsilon}'_\tau = \dot{\varepsilon}_\tau + \frac{a_0 - \alpha a_1}{b_1} \Delta \sigma_\tau + \frac{a_1}{b_1} \Delta \dot{\sigma}_\tau, \quad (2.20)$$

jeśli $b_1 \neq 0$ i $b_2 = 0$, oraz

$$\dot{\varepsilon}'_\tau = \dot{\varepsilon}_\tau + \frac{a_1 - \lambda a_2}{b_2} \Delta \sigma_\tau + \frac{a_2}{b_2} \Delta \dot{\sigma}_\tau, \quad (2.21)$$

jeśli $b_2 \neq 0$.

3. Dyskretna analiza modeli reologicznych

3.1. Model Kelvina-Voigta. Własności fizyczne ciała Kelvina-Voigta opisuje związek różniczkowy

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.1)$$

w którym występują dwa parametry: E i η .

Model Kelvina-Voigta jest więc przypadkiem szczególnym modelu opisanego równaniem (2.7), w którym należy przyjąć: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_0 = E$, $b_1 = \eta$, $b_2 = 0$.

W ujęciu dyskretnym równanie stanu ciała Kelvina-Voigta ma postać

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha \delta \tau} \varepsilon_{\tau-1} + \gamma_\tau \sigma_\tau + \left[\frac{1}{E} (1 - e^{-\alpha \delta \tau}) - \gamma_\tau \right] \sigma'_{\tau-1}, \quad (3.2)$$

w przypadku aproksymacji liniowej, oraz

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha\vartheta_\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \bar{\gamma}_\tau \sigma_\tau + \left[\frac{1}{E} (1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}) - \bar{\gamma}_\tau \right] \sigma'_{\tau-1} + \frac{\vartheta_\tau}{E} \left(1 - E \bar{\gamma}_\tau - \frac{1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}}{\alpha\vartheta_\tau} \right) \dot{\sigma}'_{\tau-1} \quad (3.3)$$

w przypadku aproksymacji kwadratowej. We wzorach (3.2) i (3.3)

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= \frac{1}{E} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}}{\alpha\vartheta_\tau} \right), \\ \bar{\gamma}_\tau &= \frac{1}{E} \left[1 - \frac{2}{\alpha\vartheta_\tau} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}}{\alpha\vartheta_\tau} \right) \right], \quad \alpha = \frac{E}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.1. Wyznaczmy krzywą pełzania przyjmując w tym celu

$$\sigma(t) = \sigma^0 H(t), \quad (3.5)$$

$H(t)$ — funkcja Heaviside'a.

Rozwiązanie ściśle jest ogólnie znane

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (3.6)$$

Ponieważ dla $t > 0$ jest $\dot{\sigma}(t) = 0$, więc $\dot{\sigma}'_{\tau-1} = 0$ oraz $\sigma'_{\tau-1} = \sigma_\tau = \sigma^0$, wobec czego

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha\vartheta_\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \frac{\sigma^0}{E} (1 - e^{-\alpha\vartheta_\tau}), \quad (3.7)$$

zarówno dla aproksymacji liniowej, jak też kwadratowej. Wyniki uzyskane za pomocą wzoru (3.7) pokrywają się dokładnie z wynikami ścisłymi wg (3.6) i to niezależnie od doboru długości kroku ϑ_τ w (3.7).

3.1.2. Przebieg naprężeń w przedziale $t \in \left(0, \frac{\pi}{\omega}\right)$ dany jest funkcją

$$\sigma(t) = \sigma^0 \sin \omega t. \quad (3.8)$$

Rozwiązanie ściśle ma postać [1]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \left[\frac{\omega}{\alpha} e^{-\alpha t} + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \sin(\omega t - \varphi) \right], \quad (3.9)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

Do dalszych obliczeń przyjęto dane według monografii [15] s. 170 zawierające wyniki badań J. Kmity nad parametrami lepkosprężystymi lin stalowych: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\eta = 4\,249\,000$ kGdni/cm² = $42,49 \cdot 10^4$ MPa dni = $102 \cdot 10^5$ MPah. Przyjęto, że wolnozmiennie obciążenie przebiega w przedziale (0; 14 dni) wg półfali sinusoidy; $\omega = \frac{\pi}{14 \text{ dzień}} = \frac{\pi}{24 \cdot 14} \text{ h}^{-1}$, $\sigma^0 = 6 \cdot 10^{-3}$ MPa.

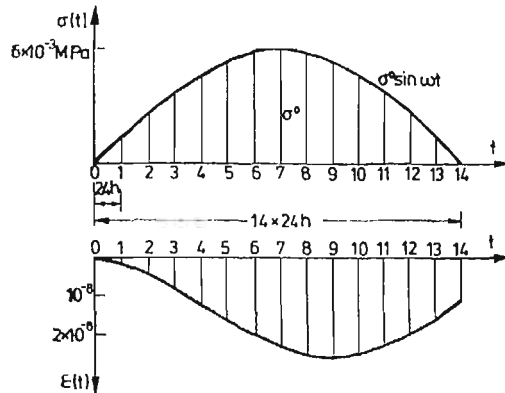
Obliczenia wykonano

1° według wzoru ścisłego (3.9);

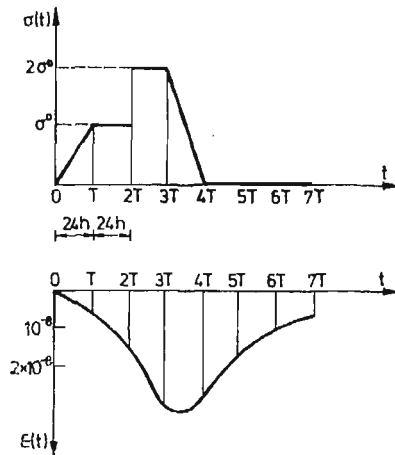
2° według związku rekurencyjnego (3.2) (aproksymacja liniowa) ze stałym krokiem równym kolejno: $\vartheta = 24h$, $\vartheta = 2 \cdot 24h$, $\vartheta = 4 \cdot 24h$;

Tablica 3

t [dni]	$\sigma(t) \times 10^3$ [MPa]	$\varepsilon(t) \times 10^9$													
		Wartość dokładna wg (3.9)	aproksymacja liniowa					aproksymacja kwadratowa							
			$\phi = 1$ dzień	$\phi = 2$ dni	$\phi = 4$ dni	$\phi = 1$ dzień	$\phi = 2$ dni	$\phi = 4$ dni	$\phi = 1$ dzień	$\phi = 2$ dni	$\phi = 4$ dni	$\phi = 7$ dni			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1,335126	1,351084	0	1,351084	0	1,354597	1,354597	1,354597	0	0	0	0	0	0	0
2	2,603304	4,633433	4,583307	4,633433	4,583307	4,652984	4,652984	4,628131	4,628131	4,628131	4,628131	4,628131	4,628131	4,628131	4,628131
3	3,740940	8,968880	8,931960	8,931960	8,931960	8,967508	8,967508	13,633330	13,633330	13,633330	13,633330	13,633330	13,633330	13,633330	13,633330
4	4,690986	13,618750	13,402390	13,562380	13,402390	13,619720	13,619720	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760	18,073760
5	5,405814	18,074830	17,999750	17,999750	17,999750	18,073760	18,073760	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260	21,931260
6	5,849568	21,930030	21,838720	21,838720	21,838720	24,875510	24,875510	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850	26,695850
7	6,0	24,876360	24,772590	24,772590	24,772590	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670	27,247670
8	5,849568	26,694450	26,582910	26,582910	26,582910	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960	26,483960
9	5,405814	27,248350	27,134350	27,134350	27,134350	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960	24,416960
10	4,690986	26,482480	26,371460	26,371460	26,371460	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020	21,148020
11	3,740940	24,417620	24,315100	24,315100	24,315100	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660	16,825660
12	2,603304	21,146513	21,057520	21,057520	21,057520	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980
13	1,335126	16,826360	16,755320	16,755320	16,755320	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980
14	0	11,669530	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980	11,619980



Rys. 4



Rys. 5

3° według związku rekurencyjnego (3.3) (aproksymacja kwadratowa) ze stałym krokiem równym kolejno $\vartheta = 24h$, $\vartheta = 2 \cdot 24h$, $\vartheta = 4 \cdot 24h$, $\vartheta = 7 \cdot 24h$.

Wyniki zestawiono w tabelicy 3 oraz na rysunku 4. Widoczny jest wpływ długości kroku na dokładność obliczeń oraz przewaga aproksymacji kwadratowej nad liniową. Niemniej można stwierdzić, że aproksymacja liniowa daje dostatecznie dokładne dla celów praktycznych wyniki nawet przy znacznej długości kroku.

3.1.3. Przebieg naprężeń jest funkcją nieciągłą przedstawioną na rysunku 5:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^0 \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ \sigma^0, & T \leq t < 2T, \\ 2\sigma^0, & 2T < t \leq 3T, \\ 2\sigma^0 \left(4 - \frac{t}{T}\right), & 3T \leq t \leq 4T, \\ 0, & t \geq 4T. \end{cases} \quad (3.10)$$

Otrzymuje się następujące rozwiązanie ścisłe:

$$\begin{aligned}
 t \in [0, T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \frac{1}{\alpha T} (e^{-\alpha t} + \alpha t - 1), \\
 t \in [T, 2T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 - \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} e^{-\alpha t} \right), \\
 t \in (2T, 3T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left[2 - \left(\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} + e^{2\alpha T} \right) e^{-\alpha t} \right], \\
 t \in [3T, 4T]: \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left[8 + \frac{2}{\alpha T} (1 - \alpha t) - \left(\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} + e^{2\alpha T} + \frac{2}{\alpha T} e^{3\alpha T} \right) e^{-\alpha t} \right], \\
 t \in [4T, \infty): \quad \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{\alpha T} - \alpha T e^{2\alpha T} - 2e^{3\alpha T} + 2e^{4\alpha T}) e^{-\alpha t}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

W ujęciu dyskretnym przyjmujemy $\vartheta_\tau = T$ uwzględniając się, że

$$\begin{aligned}
 \sigma'_0 &= 0, \quad \sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma^0, \quad \sigma_2 = \sigma^0, \quad \sigma'_2 = 2\sigma^0, \quad \sigma_3 = \sigma'_3 = 2\sigma^0, \\
 \sigma_4 &= \sigma'_4 = 0, \quad \sigma_5 = \sigma'_5 = 0, \dots, \text{ oraz} \\
 \dot{\sigma}'_0 &= \frac{\sigma^0}{T}, \quad \dot{\sigma}'_1 = 0, \quad \dot{\sigma}'_2 = 0, \quad \dot{\sigma}'_3 = -\frac{2\sigma^0}{T}, \quad \dot{\sigma}'_4 = 0, \quad \dot{\sigma}'_5 = 0, \dots
 \end{aligned}$$

Dla aproksymacji liniowej otrzymuje się związek rekurencyjny w postaci

$$\varepsilon_\tau = e^{-\alpha T} \varepsilon_{\tau-1} + \frac{\sigma_\tau}{E} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + \frac{\sigma'_{\tau-1}}{E} \left(\frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} \right), \tag{3.12}$$

skąd, przy warunku początkowym $\varepsilon_0 = 0$, oblicza się kolejno:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right), \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 - \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} e^{-2\alpha T} \right), \\
 \varepsilon_3 &= \frac{\sigma^0}{E} \left(2 - e^{-\alpha T} - \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} e^{-3\alpha T} \right), \\
 \varepsilon_4 &= \frac{\sigma^0}{E} \left[\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} (2e^{-\alpha T} - e^{-4\alpha T}) - e^{-2\alpha T} \right], \\
 \varepsilon_5 &= \frac{\sigma^0}{E} \left[\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} (2e^{-2\alpha T} - e^{-5\alpha T}) - e^{-3\alpha T} \right], \dots
 \end{aligned}$$

Stosując aproksymację kwadratową otrzymuje się związek rekurencyjny

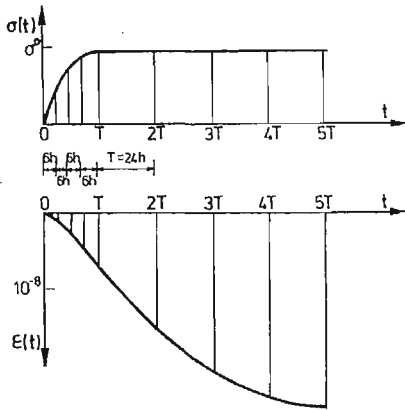
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\tau &= e^{-\alpha T} \varepsilon_{\tau-1} + \frac{\sigma_\tau}{E} \left[1 - \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \right] + \\
 &+ \frac{\sigma'_{\tau-1}}{E} \left[\frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) - e^{-\alpha T} \right] + \\
 &+ \frac{\dot{\sigma}'_{\tau-1} T}{E} \left[\frac{2}{\alpha T} - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \left(1 + \frac{2}{\alpha T} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wyniki otrzymane za pomocą wzoru (3.13) są identyczne z otrzymanymi ze wzoru (3.12) oraz, jak łatwo sprawdzić, z wynikami rozwiązania ścisłego (3.11).

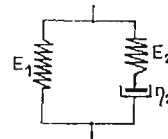
3.1.4. Przebieg naprężeń dany jest funkcją

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma^0}{T^2} t(2T-t), & 0 \leq t \leq T, \\ \sigma^0, & t \geq T. \end{cases} \quad (3.14)$$

W tabelicy 4 zestawiono wartości funkcji $\varepsilon(t)$. Aproksymacja kwadratowa daje wyniki pokrywające się ze ścisłymi, ponieważ dokładnie opisuje przebieg naprężeń w całym zakresie zmienności t . Wykresy $\sigma(t)$ i $\varepsilon(t)$ pokazane są na rysunku 6.



Rys. 6



Rys. 7

Tabela 4

t [godz.]	$\sigma(t) \times 10^3$ [MPa]	$\varepsilon(t) \times 10^9$		
		wartość dokładna	aproksymacja liniowa	% błędu
0	0	0	0	
6	2,625	0,77750	0,74282	4,46
12	4,500	2,71353	2,64802	2,41
18	5,625	5,26316	5,17024	1,76
24	6,000	7,94196	7,82468	1,48
48	6,000	16,22330	16,15007	0,45
72	6,000	21,39553	21,34982	0,21
96	6,000	24,62593	24,59740	0,12
120	6,000	26,64352	26,62573	0,07
144	6,000	27,90364	27,89255	0,04

3.2. Model Zenera (rys. 7)

Równanie stanu ma postać

$$\frac{E_2}{\eta_2} \sigma(t) + \dot{\sigma}(t) = \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \varepsilon(t) + (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}(t). \quad (3.15)$$

Przyjmując stały krok $\vartheta_r = T$, otrzymuje się dla aproksymacji liniowej

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = e^{-\alpha T} \varepsilon_{r-1} + \frac{\sigma_r}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + \\ + \frac{\sigma'_{r-1}}{E_1} \left(\frac{E_2}{E_1 + E_2} \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} \right) + \frac{\Delta \sigma_{r-1}}{E_1 + E_2} e^{-\alpha T}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

oraz dla aproksymacji kwadratowej

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = e^{-\alpha T} \varepsilon_{r-1} + \frac{\sigma_r}{E_1} \left[1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \right] + \\ + \frac{\sigma'_{r-1}}{E_1} \left[\frac{E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) - e^{-\alpha T} \right] + \\ + \frac{\sigma'_{r-1} T}{E_1} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[\frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right] + \frac{\Delta \sigma_{r-1}}{E_1 + E_2} e^{-\alpha T}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

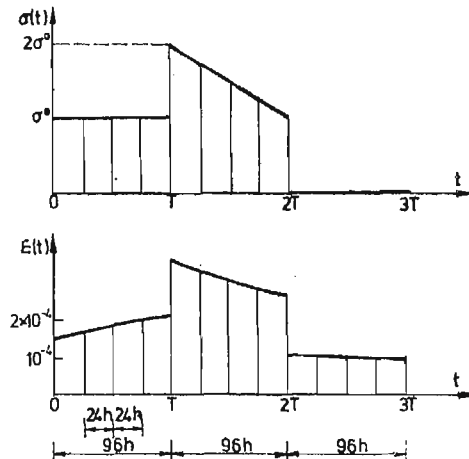
$$\alpha = \frac{E_1 E_2}{\eta_2 (E_1 + E_2)}.$$

Dla granicy prawostronnej otrzymuje się wzór

$$\varepsilon'_r = \varepsilon_r + \frac{\Delta \sigma_r}{E_1 + E_2}. \quad (3.18)$$

Niech przebieg naprężeń przedstawia wykres na rysunku 8. To znaczy

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^0, & 0 < t < T, \\ \sigma^0 \left(3 - \frac{t}{T} \right), & T < t < 2T, \\ 0, & 2T < t < \infty. \end{cases} \quad (3.19)$$



Rys. 8

Rozwiązanie ściśle ma postać:

$$t \in (0, T):$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-\alpha t} \right),$$

$$t \in (T, 2T):$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E_1} \left\{ 3 - \frac{t}{T} + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[\frac{1}{\alpha T} - \left(1 + e^{-\alpha T} + \frac{1}{\alpha T} \right) e^{-\alpha(t-T)} \right] \right\}, \quad (3.20)$$

$$t \in (2T, \infty):$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{E_1} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} (1 + e^{-\alpha T}) \right] e^{-\alpha(t-2T)}.$$

W ujęciu dyskretnym przyjmujemy stały krok $\vartheta_\tau = T$ i uwzględniamy w obliczeniach, że $\sigma'_0 = \sigma^0$, $\Delta\sigma_0 = \sigma^0$, $\sigma_1 = \sigma^0$, $\sigma'_1 = 2\sigma^0$, $\Delta\sigma_1 = \sigma^0$, $\sigma_2 = \sigma^0$, $\sigma'_2 = 0$, $\Delta\sigma_2 = -\sigma^0$, $\sigma_3 = \sigma'_3 = \dots = 0$; $\dot{\sigma}'_0 = \dot{\sigma}_1 = 0$, $\dot{\sigma}'_1 = \dot{\sigma}_2 = -\frac{\sigma^0}{T}$, $\dot{\sigma}'_2 = \dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}'_3 = \dots = 0$.

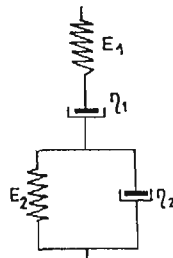
Aproksymacja liniowa (3.16) i kwadratowa (3.17) dają identyczne następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma^0}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-\alpha T} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma^0}{E_1} \left\{ 1 + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[\frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} (1 + e^{-\alpha T}) \right] \right\}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma^0}{E_1} \cdot \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} (1 + e^{-\alpha T}) \right] e^{-\alpha T}, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Granice prawostronne funkcji $\varepsilon(t)$ są równe:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_0 &= \frac{\sigma^0}{E_1 + E_2}, & \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1 + \frac{\sigma^0}{E_1 + E_2}, \\ \varepsilon'_2 &= \varepsilon_2 - \frac{\sigma^0}{E_1 + E_2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Łatwo można sprawdzić, że za pomocą wzorów ścisłych (3.20) otrzymana się identyczne wartości odkształceń w chwilach $t_\tau = T^\pm, 2T^\pm, 3T, \dots$. W celu sporządzenia wykresu $\varepsilon(t)$ zagęszczono węzły na osi czasu przyjmując $\vartheta_\tau = \frac{1}{4}T$. Wyniki obliczeń dla $T = 96 \text{ h}$, $\sigma^0 = 5 \text{ MPa}$, $E_1 = 9,5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $E_2 = 22,5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $\eta_2 = 49,92 \cdot 10^5 \text{ MPah}$ ilustruje wykres na rysunku 8. Powyższe dane zostały wzięte z monografii I. KISIELA [15] według badań A. Mitzla i A. Dziendziela dotyczących betonu.



Rys. 9

3.3. Model Burgersa (rys. 9)

W czteroparametrowym modelu Burgersa jest $a_0 = 1$,

$$a_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_1}, \quad a_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}, \quad b_0 = 0,$$

$$b_1 = \eta_1, \quad b_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}.$$

Przyjmując stały krok $\vartheta_\tau = T$ otrzymuje się dla aproksymacji liniowej

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau &= \varepsilon_{\tau-1} + \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left(\frac{T}{2\eta_1} + \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma_\tau + \\ &+ \left[\frac{T}{2\eta_1} - \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \left(\frac{T}{\eta_1} - \frac{1}{E_2} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right] \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{1}{E_1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right] \Delta \sigma_{\tau-1} - \frac{1}{E_1} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau &= e^{-\lambda T} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left(\frac{1}{E_1 T} + \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma_\tau - \\ &- \left(\frac{1}{E_1 T} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\lambda T} + \frac{1}{\eta_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) e^{-\lambda T} \Delta \sigma_{\tau-1} - \frac{1}{E_1} \frac{e^{-\lambda T}}{T} (\sigma_{\tau-1} - \sigma'_{\tau-2}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dla aproksymacji kwadratowej otrzymuje się

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau &= \varepsilon_{\tau-1} + \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left[\frac{T}{3\eta_1} + \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{2}{E_2} \frac{1}{\lambda T} \left(1 - \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \right] \sigma_\tau - \\ &- \left[\frac{T}{3\eta_1} + \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \left(\frac{T}{\eta_1} + \frac{2}{E_2 \lambda T} \right) \left(1 - \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \right] \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{T^2}{6\eta_1} + \frac{2}{E_2 \lambda} - \left(\frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} + \frac{2}{E_2 \lambda T} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right] \ddot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{1}{E_1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right] \Delta \sigma_{\tau-1} + \frac{1}{E_1} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\tau &= e^{-\lambda T} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{2}{T} \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{2}{E_2 T} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma_\tau - \\ &- \left(\frac{1}{\eta_1} e^{-\lambda T} + \frac{2}{T} \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} - \frac{2}{E_2 T} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) \sigma'_{\tau-1} + \\ &+ \left[\frac{2}{E_2} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T} - \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} (1-e^{-\lambda T}) \right] \ddot{\sigma}'_{\tau-1} + \\ &+ \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) e^{-\lambda T} \Delta \sigma_{\tau-1} + \frac{1}{E_1} e^{-\lambda T} \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\lambda = \frac{E_2}{\eta_2}.$$

3.3.1. Dla obciążenia

$$\sigma(t) = \sigma^0 H(t) \quad (3.27)$$

otrzymuje się

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{b_1} \left[t + \left(a_1 - \frac{1}{\lambda} \right) (1 - e^{-\lambda t}) + a_2 \lambda e^{-\lambda t} \right]. \quad (3.28)$$

Jest to wynik ścisły. Identyczne wyniki otrzymuje się za pomocą wzorów rekurencyjnych, co wynika stąd, że każda aproksymacja opisuje dokładnie funkcję typu (3.27). Krok ϑ_τ może być dowolnie długi.

W aproksymacji liniowej w pierwszym kroku należy przyjąć: $\varepsilon_0 = 0$, $\dot{\varepsilon}_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma'_0 = \sigma^0$, $\Delta\sigma_0 = \sigma^0$, $\sigma_1 = \sigma^0$, czyli dla $\tau = 1$ ($\vartheta_\tau = T$):

$$\varepsilon_1 = \sigma^0 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{T}{\eta_1} + \frac{T}{\eta_2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sigma^0 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} e^{-\lambda T} \right).$$

Granice prawostronne odkształcenia i prędkości odkształcenia dla $t = 0$ obliczamy wzorem (2.19)

$$\varepsilon'_0 = \frac{\sigma^0}{E_1},$$

i wzorem (2.21)

$$\dot{\varepsilon}'_0 = \sigma^0 \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}.$$

Identyczne wyniki otrzymamy z (3.28)

Dla $\tau = 2, 3, \dots$ otrzymuje się

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\tau-1} + \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \frac{\sigma^0 T}{\eta_1} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_\tau = e^{-\lambda T} \dot{\varepsilon}_{\tau-1} + \frac{\sigma^0}{\eta_1} (1 - e^{-\lambda T}).$$

Dla aproksymacji kwadratowej należy dodatkowo przyjąć $\Delta\dot{\sigma}_\tau = 0$ dla wszystkich τ .

3.3.2. Przyjęto program obciążenia

$$\sigma(t) = \sigma^0 \sin \omega t. \quad (3.29)$$

Bezpośrednie rozwiązanie równania różniczkowego metodą transformacji Laplace'a daje wynik

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^0}{b_2} \left[\frac{1}{\omega \lambda} + A e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\omega \lambda} + A \right) \cos \omega t + \left(a_2 + \frac{\lambda}{\omega} A \right) \sin \omega t \right], \quad (3.30)$$

$$A = \frac{\omega}{\lambda} \cdot \frac{a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - 1}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

Tablica 5

t [godz]	$\sigma(t)$ [MPa]	$\varepsilon(t) \times 10^4$											
		wartość dokładna wg (3.30)				Aproksymacja liniowa				Aproksymacja kwadratowa			
		$\theta = 0,2h$	$\theta = 0,4h$	$\theta = 1h$	$\theta = 1,2h$	$\theta = 0,2h$	$\theta = 0,4h$	$\theta = 1h$	$\theta = 1,2h$	$\theta = 0,2h$	$\theta = 0,4h$	$\theta = 1h$	$\theta = 1,2h$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0,2	1,85410	5,65747	10,87733	18,42131	18,11828	5,65786	10,88268	18,46182	19,07510	18,35592	0	0	
0,4	3,52671	10,88331	17,96569	18,45242	16,00894	10,88550	17,99166	18,46316	12,04843	12,04843	0	0	
0,6	4,85410	15,14230	19,13947	16,00894	12,03380	15,14216	17,99166	16,02053	6,92320	6,92320	0	0	
0,8	5,70634	17,99154	18,46300	12,04566	6,91206	17,98492	18,46300	12,04566	1,15196	1,15093	0	0	
1,0	6,0	19,13947	16,00894	6,92325	1,15180	19,13065	16,00894	6,92325	1,15196	1,15093	0	0	
1,2	5,70634	18,46300	12,04566	1,15180	1,15180	18,45242	12,04566	1,15196	1,15196	1,15093	0	0	
1,4	4,85410	16,00894	6,92325	1,15180	1,15180	16,00894	6,92325	1,15196	1,15196	1,15093	0	0	
1,6	3,52671	12,04566	1,15180	1,15180	1,15180	12,04566	1,15180	1,15196	1,15196	1,15093	0	0	
1,8	1,85410	6,92325	1,15180	1,15180	1,15180	6,92325	1,15180	1,15196	1,15196	1,15093	0	0	
2,0	0	1,15180	1,15180	1,15180	1,15180	1,15180	1,15180	1,15196	1,15196	1,15093	0	0	
2,2	-1,85410	-4,70587	-10,09684	-17,35997	-18,49547	-4,70587	-10,09684	-17,35997	-18,49547	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
2,4	-3,52671	-10,07794	-14,43967	-17,36493	-18,56387	-10,07794	-14,43967	-17,36493	-18,56387	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
2,6	-4,85410	-14,43967	-17,36493	-18,56387	-18,56387	-14,43967	-17,36493	-18,56387	-18,56387	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
2,8	-5,70634	-17,36493	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-17,36493	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
3,0	-6,0	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-18,56387	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
3,2	-5,70634	-17,93142	-15,51795	-11,53292	-11,53292	-17,93142	-15,51795	-11,53292	-11,53292	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
3,4	-4,85410	-15,51795	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-15,51795	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
3,6	-3,52671	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-11,53292	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
3,8	-1,85410	-6,45680	-0,67284	-0,53270	-0,53270	-6,45680	-0,67284	-0,53270	-0,53270	-10,07569	-9,82924	-9,82924	
4,0	0	-0,69048	-0,67284	-0,53270	-0,53270	-0,69048	-0,67284	-0,53270	-0,53270	-10,07569	-9,82924	-9,82924	

Obliczenia numeryczne wykonano przyjmując dla polistyrenu KA w temperaturze 293 K ($\sim 20^\circ\text{C}$) za [16] następujące dane:

$$E_1 = 3,32 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \quad E_2 = 4,30 \cdot 10^4 \text{ MPa},$$

$$\eta_1 = 6,45 \cdot 10^8 \text{ MPa} \cdot \text{s}, \quad \eta_2 = 9,62 \cdot 10^7 \text{ MPa} \cdot \text{s}.$$

Przyjęto różne długości kroku w celu zbadania, jaki to ma wpływ na dokładność obliczeń ($\vartheta = 0,2h, \vartheta = 0,4h, \vartheta = 1h, \vartheta = 1,2h$). Przyjęto nadto $\sigma = 6 \text{ MPa}$ i $\omega = \frac{\pi}{2} h^{-1}$.

W pierwszym kroku należy przyjąć następujące wartości początkowe: $\varepsilon_0 = 0, \dot{\varepsilon}_0 = 0, \sigma_0 = \sigma'_{-1} = \sigma'_0 = 0, \Delta\sigma_0 = 0, \dot{\sigma}'_0 = \omega\sigma^0, \Delta\dot{\sigma}'_0 = \omega\sigma^0$. Granicę prawostronną prędkości odkształcenia dla $t = 0$ oblicza się wzorem:

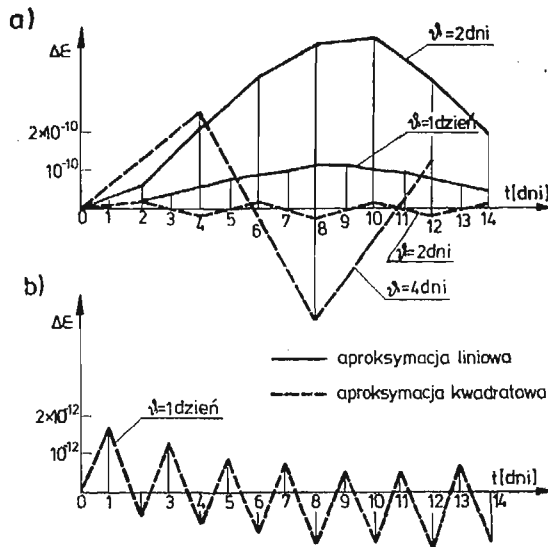
$$\varepsilon'_0 = \frac{\omega\sigma^0}{E_1}.$$

Wyniki zestawiono w tabelicy 5. Widoczne jest, że aproksymacja kwadratowa daje przy tej samej długości kroku znacznie dokładniejsze wyniki.

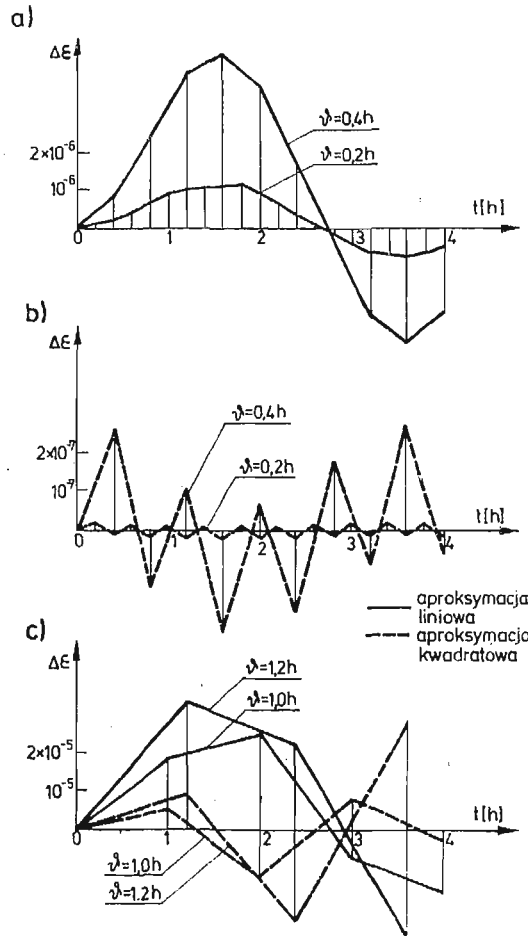
4. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda pozwala opisać zjawisko pełzania materiałów, przy czym w niniejszej pracy ograniczono się do jednoosiowego stanu naprężenia. Metoda jest dobrze przystosowana do skończonej liczby nieciągłości funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$. Punkty nieciągłości muszą być węzłami na osi czasu.

Metoda jest obciążona tylko błędem aproksymacji przebiegu naprężeń. Oznacza to, że jeśli funkcja $\sigma(t)$ jest odcinkami liniowa lub paraboliczna i jeśli węzły umieści się przy-



Rys. 10

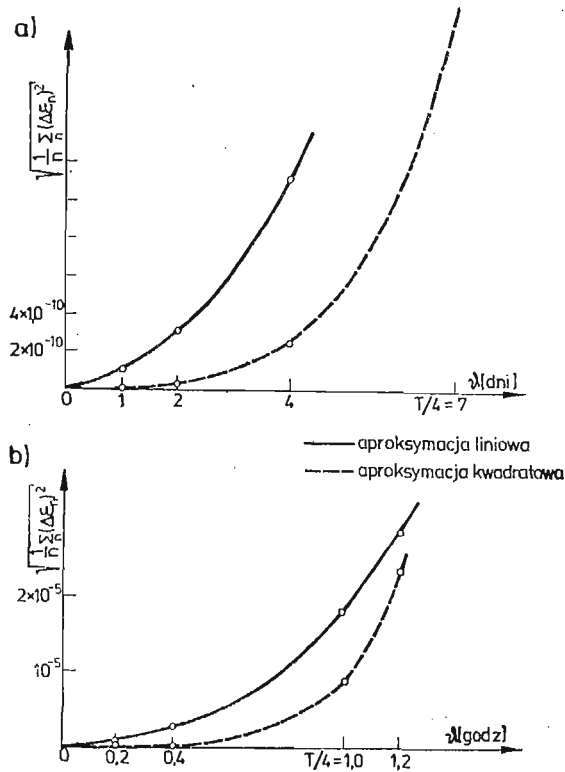


Rys. 11

najmniej we wszystkich punktach nieciągłości funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$, to otrzymamy we wszystkich węzłach wyniki ściśle niezależnie od długości kroku.

Przebieg naprężeń w ogólności może być bardziej złożony. W takim przypadku otrzymuje się wyniki obarczone błędem zależnym od długości kroku. Problem ten został przeanalizowany dla przebiegu sinusoidalnego w przypadku modelu Kelvina-Voigta opisanym w pkt. 3.1.2 i w tabelicy 3 (rys. 10) oraz w przypadku modelu Burgersa opisanym w pkt. 3.3.2 i w tabelicy 5 (rys. 11).

Na wykresach przedstawiono błąd bezwzględny $\Delta \epsilon$ (różnica między rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem wg opisanej metody) jako funkcję czasu (lub ściślej: wskaźnika kolejnych chwil τ) oraz w zależności od rodzaju aproksymacji i długości kroku. Z wykresów tych wynika oczywista zresztą przewaga aproksymacji kwadratowej nad liniową i wyraźna stabilność metody. Jest charakterystyczne, że przebieg błędu aproksymacji liniowej jest w przybliżeniu proporcjonalny do przebiegu funkcji aproksymowanej, natomiast przy aproksymacji kwadratowej błąd oscyluje zmieniając znak krok za krokiem. „Amplituda”



Rys. 12

tej „krzywej oscylującej” jest, praktycznie rzecz biorąc, stała w całym badanym przedziale czasu. O stabilności metody świadczy też przebieg błędu zanotowany w tabelicy 4.

Na rysunku 12 przedstawiono średni błąd kwadratowy jako funkcję długości kroku. Dla modelu Kelvina-Voigta i danych dotyczących lin stalowych średni błąd kwadratowy obliczono w przedziale czasu (0, 14 dni). Krok $\vartheta = 7$ dni odpowiada ćwiartce sinusoidy przebiegu naprężeń $\left(\frac{1}{4} T\right)$. Widoczne jest na rysunku 12a, że jeśli długość kroku zbliża się do $\frac{1}{4} T$, to błąd metody szybko rośnie nawet przy zastosowaniu aproksymacji kwadratowej.

Wykresy na rys. 12b dotyczą modelu Burgersa i danych przyjętych dla polistyrenu KA. Średni błąd kwadratowy obliczono w przedziale czasu (0, 4h). Należy zwrócić uwagę na zjawisko zbliżania się obu krzywych błędu do siebie dla $\vartheta > \frac{T}{4}$, co się tłumaczy tym, że przy tak długim w stosunku do okresu funkcji kroku, aproksymowanie sinusoidy odcinkami parabol staje się równie mało przydatne, jak aproksymowanie jej odcinkami prostych.

Stąd należy wnosić postulat takiego doboru długości kroku żeby w przedziale $(t_{\tau-1}, t_{\tau})$ funkcja aproksymowana i jej pochodna były monotoniczne.

Длгоść кроку можна więc на огół przyjmować znaczną, co ma istotne znaczenie przy badaniu długotrwałych процесов пелзання і stanowi залетę opisanej metody.

Literatura cytowana w tekście

1. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1968.
2. W. NOWACKI, *Teoria пелзання*, Arkady, Warszawa, 1963.
3. I. KISIEL, *Reologiczne równania stanu оórodków quasiliniowych*, Wyd. PAN Oddz. we Wrocławiu, 1980.
4. F. J. LOCKETT, *Nonlinear Viscoelastic Solids*, Academic Press, London, New York, 1972.
5. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stalego*, PWN, Warszawa 1969.
6. И. И. ПЕДАХОВСКИЙ, *Дискретно-континуальный метод в линейной теории упруго-ползучего тела*, Применение электронных вычислительных машин в строительной механике, Наука Думка, Киев, 1968.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, M. WATSON, I. P. KING, *A numerical method of visco-elastic stress analysis*, Int. J. of Mech. Sci., 1968.
9. J. H. ARGYRIS, H. BALMER, J. S. DOLTSINIS, *Nieliniowość materiału w analizie metodą elementów skończonych*, *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, Ossolineum, 1977.
10. *Zastosowanie metody elementów skończonych w geotechnice*, праца zbiorowa, Ossolineum, 1980, s. 130 - 135.
11. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., 22, 3, 1976.
12. B. HUSIAR, R. ŚWITKA, *Quasistatyczne пелзание цięгна lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym*, Arch. Inż. Łąd., 25, 1, 1979.
13. B. HUSIAR, R. ŚWITKA, *Statyka lepkosprężystej siatki cięgnowej ze wstępnym napięciem*, Zesz. Nauk. PP, Budownictwo Łądowe nr 24, 1979.
14. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa, 1964.
15. I. KISIEL, *Reologia w budownictwie*, Arkady, Warszawa, 1967.
16. J. ZAWADZKI, *Problemy wyteżenia i znużenia polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, PWN, Warszawa, 1978.

Резюме

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В работе представляется метод дискретизации уравнения состояния линейно-вязкоупругих тел. Метод состоит в разделении оси времени на интервалы, в которых напряжение аппроксимируется линейной или квадратичной функцией. Конститутивное уравнение вязкоупругого тела принято в виде дифференциальной зависимости, в которую входят не больше второй производные по времени. Допускается конечное число разрывностей функции $\sigma(t)$, а также производной $\dot{\sigma}(t)$. Уравнение состояния для данной аппроксимации в произвольном интервале можно решить точно. В результате получаем рекуррентную формулу, в которой деформация в данном моменте выражается через напряжение в том самом моменте и через состояние системы в предшествующем моменте. Формула обременена только ошибкой аппроксимации. Это обозначает, что для линейного или параболического пробега напряжений квадратичная аппроксимация доставляет точные результаты независимо от длины шага. В других случаях длина интервала регулируется на основе признака точности может быть значительной, а это имеет существенное значение при испытаниях длительных процессов ползучести.

Проведено ряд испытательных вычислений для разных реологических моделей (Кельвина — Фойгта, Зинера, Бургера) и для разных программ нагружения. Проведено анализ ошибок для частных аппроксимаций и для разных длин шага.

Summary

DISCRETE ANALYSIS OF RHEOLOGICAL MODELS

The discretization method of the equation of state for the linear visco-elastic materials has been proposed. The time axis has been divided into separate time intervals; within each time interval the stresses have been approximated by means of the linear or quadratic functions. The constitutive relation for a visco-elastic material has been assumed in the form of a differential relation with the time derivatives at most of the second order. It has been assumed that the number of points at which functions $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ suffer discontinuities is finite. The constitutive relation for the given approximation can be solved in the exact form.

As a result the recurrence relation has been obtained for which the state of deformation at a given instant is determined by the state of stress at the same instant and by the state of the body in the preceding (discrete) time instant. Thus for the linear and parabolic time distributions of stress, the quadratic approximation leads to the exact results for any length of steps. In other cases the length of the step, controlled by the criterion of accuracy, can be rather big; this fact plays an essential role when long time creep processes are considered.

A number of test calculations for different rheological models (Kelvin-Voigt, Zener, Burgers) and for different loading programs have been performed. The error analysis for some special approximations and different step lengths has been given.