

DRGANIA UKŁADU SAMOWZBUDNEGO Z WYMUSZENIEM PARAMETRYCZNYM I NIELINIOWĄ SPRĘŻYSTOŚCIĄ

KAZIMIERZ SZABELSKI

Politechnika Lubelska

W pracy rozpatrzono drgania z miękkim samowzbudzeniem, wymuszeniem parametrycznym oraz nieliniową charakterystyką sprężystości typu sześciennego. Rozważając problemy istnienia i stateczności rozwiązań równania różniczkowego, określono efekty wzajemnego oddziaływania drgań samookresowych. Stwierdzono między innymi zaniknięcie drgań samowzbudnych w określonym przedziale częstości wymuszenia parametrycznego. Badania analityczne przeprowadzono przy pewnych założeniach upraszczających a ich wpływ na wyniki określono na drodze modelowania analogowego.

1. Wstęp

W zagadnieniach drgań mechanicznych wyodrębnić można układy o zmiennych okresowo parametrach z jednoczesną możliwością generowania drgań samowzbudnych. W przypadkach takich następuje wzajemne oddziaływanie dwóch rodzajów drgań samookresowych: parametrycznych i samowzbudnych. Problemami takimi zajmowali się N. MINORSKI [1], W. O. KONONIENKO i P. S. KOWALCZUK [2], [3] oraz A. TONDL [4]. Drgania tego typu charakteryzuje — dla określonych warunków — zaniknięcie drgań samowzbudnych. Z tego względu, zjawisko to może mieć istotne znaczenie praktyczne. Przytoczyć można wiele układów, których drgania opisują równania różniczkowe zawierające człony równania Rayleigha lub Van der Pola oraz równania Mathieu lub Hilla. Należą do nich między innymi układy mechaniczne, których modele fizyczne przedstawić można w postaci wahadła Frouda [4], [5] z okresowo zmiennym w kierunku pionowym położeniem punktu zawieszenia bądź w postaci pręta, ściskanego siłą zmienną okresowo z jednoczesnym jego opływem przez gazowy lub ciekły ośrodek [4].

Przyczyny powstawania drgań samowzbudnych w układach mechanicznych [6], mogą być różne: tarcie suche, smarowanie łożysk ślizgowych cienką warstwą oleju, wewnętrzna histereza wałów, bądź przejawiać się w postaci flatteru, wężykowania kół pojazdów lub drgań podczas skrawania. Drgania parametryczne powstają najczęściej na skutek okresowo zmiennej sztywności lub periodycznie zmiennego masowego momentu bezwładności. Tak więc, zakres układów w których oddziałują na siebie oba rodzaje tych drgań jest dość

znaczny. Do przypadków takich należą między innymi: drgania sprzężone wirującego w łożyskach ślizgowych wału którego sztywność przy zginaniu jest okresowo zmienna na skutek różnych głównych momentów bezwładności przekroju, drgania podczas toczenia pryzmatycznego pręta, drgania skrętne wałów korbowych przy uwzględnieniu określonego momentu tarcia w łożyskach ślizgowych oraz zmiany momentu bezwładności mas układu korbowo-tłokowego, drgania sprzężone przedniego koła samochodu przy okresowo zmiennej sztywności promieniowej ogumienia, spowodowanej niejednorodnością budowy opony [7].

W konkretnym przypadku układu, efekty oddziaływania obu rodzajów drgań samo-okresowych zdeterminowane będą strukturą modelu matematycznego oraz wartością współczynników sprzęgających poszczególne współrzędne uogólnione. Rozpatrzmy drgania układu opisane równaniem różniczkowym zawierającym człony równania Van der Pola [4], [5], [8] i równania Mathieu [5], [6] oraz nieliniową siłą sprężystości typu sześciennego

$$m\ddot{x}_1 - (a_0 - a_1 x_1^2)\dot{x}_1 + (c - c_0 \cos 2\omega t)x_1 + c_1 x_1^3 = 0, \quad (1)$$

gdzie:

m — masa,

a_0 i a_1 — współczynniki tłumienia Van der Pola,

c — sztywność średnia,

c_0 — amplituda modulacji sztywności,

c_1 — współczynnik nieliniowości,

ω — częstość wymuszenia parametrycznego.

Wprowadzając czas bezwymiarowy

$$\tau = \omega t,$$

oraz oznaczenia

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{c}{m}; & \mu &= \frac{c_0}{c}; \\ \gamma &= \frac{c_1 x_0^2}{c}; & \alpha &= \frac{a_0}{mp}; \\ \beta &= \frac{a_1 x_0^2}{mp} \\ x &= \frac{x_1}{x_0}; & x_0 &= \frac{mg}{c}, \\ \lambda &= \frac{\omega}{p}, \end{aligned} \quad (2)$$

równanie (1) przyjmuje postać zapisaną we współrzędnej bezwymiarowej

$$\lambda^2 \overset{||}{x} - \lambda(\alpha - \beta x^2) \overset{||}{x} + (1 - \mu \cos 2\tau)x + \gamma x^3 = 0, \quad (3)$$

gdzie

$$\overset{||}{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2}.$$

2. Badania drgań metodą analityczną

Przeprowadźmy analizę drgań układu w zakresie głównego rezonansu parametrycznego. Z tego względu przyjmujemy rozwiązanie równania (3) w postaci

$$x = A \cos \Omega \tau + B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau \quad (4)$$

w którym (drgania samowzbudne aproksymowano funkcją harmoniczną)

A — amplituda drgań samowzbudnych,

B_1 i B_2 — składowe amplitudy drgań parametrycznych,

Ω — częstość drgań samowzbudnych.

Podstawiając rozwiązanie (4) do równania (3), po przekształceniach i uwzględnieniu że amplituda drgań parametrycznych określona jest zależnością

$$R = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

a następnie przyrównując do zera wyrazy z $\cos \tau$, $\sin \tau$, $\cos \Omega \tau$, $\sin \Omega \tau$, otrzymujemy

$$A \left[1 - \Omega^2 \lambda^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (5)$$

$$A \Omega \lambda \left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\left[1 - \frac{1}{2} \mu - \lambda^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \lambda \left[-\alpha + \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0, \quad (7)$$

$$\lambda \left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \left[1 + \frac{1}{2} \mu - \lambda^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0. \quad (8)$$

Z powyższych zależności wynika, że istnieją rozwiązania:

trywialne dla którego $A = 0$; $B_1 = B_2 = R = 0$

półtrywialne $A \neq 0$; $R = 0$

półtrywialne $A = 0$; $R \neq 0$

nietrywialne $A \neq 0$; $R \neq 0$.

Podstawiając w równaniach (5) i (6) $R = 0$, znajdujemy

$$A = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (9)$$

oraz

$$\Omega = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 + 3\gamma \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (10)$$

Skąd częstość drgań samowzbudnych w czasie rzeczywistym wynosi

$$\Omega_r = p \sqrt{1 + 3\gamma \frac{\alpha}{\beta}} = \text{const.} \quad (11)$$

W przypadku rozwiązania nietrywialnego, amplituda drgań samowzbudnych — po wykorzystaniu równania (6) — wynosi

$$A = \sqrt{2 \left(2 \frac{\alpha}{\beta} - R^2 \right)}. \quad (12)$$

Uwzględniając również zależność (5) znajdujemy częstość drgań samowzbudnych dla $A \neq 0$; $R \neq 0$ w postaci (10). Oznacza to, że poszukiwana częstość drgań samowzbudnych jest dla danego układu stała i nie zależy od częstości wymuszenia parametrycznego. Z równania (12) wynika, że amplituda drgań samowzbudnych zależy od amplitudy drgań parametrycznych.

Drgania samowzbudne zanikną gdy

$$R \geq \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}, \quad (13)$$

natomiast będą istniały w przypadku spełnienia warunku

$$R < \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (14)$$

Zamiast parametru λ wprowadźmy

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\omega}. \quad (15)$$

Równanie różniczkowe (1) przyjmuje wtedy postać

$$\overset{||}{x} - \lambda_1(\alpha - \beta x^2)\overset{||}{x} + \lambda_1^2[(1 - \mu \cos 2\tau)x + \gamma x^3] = 0. \quad (16)$$

Przedstawmy zależność (15) w formie

$$\lambda_1^2 = 1 + \delta; \quad \lambda_1 \approx 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (17)$$

gdzie δ jest wariacją częstości wymuszenia parametrycznego. Podstawiając wyrażenia (17) do (16) przy uwzględnieniu, że α , β , γ , μ , δ są znacznie mniejsze od jedności, otrzymujemy

$$\overset{||}{x} - (\alpha - \beta x^2)\overset{||}{x} + (1 + \delta - \mu \cos 2\tau)x + \gamma x^3 = 0. \quad (18)$$

W przypadku tym pominięto wyrazy zawierające iloczyny dwóch małych parametrów układu. Ponieważ wartości tych wyrazów determinują również wielkości kinematyczne drgań, dlatego porównajmy wyniki badań równania (18) względem (16). Tak więc ujęte zagadnienie, umożliwia także ocenę wpływu pomijania tego typu wyrazów na wyniki badań. Podstawiając rozwiązanie (4) do równania (18) po przekształceniach znajdujemy

$$A \left[1 + \delta - \Omega^2 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (19)$$

$$A \Omega \left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{2} A^2 + R^2 \right) \right] = 0, \quad (20)$$

$$\left[-\frac{1}{2} \mu + \delta + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \left[-\alpha + \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0, \quad (21)$$

$$\left[\alpha - \frac{1}{2} \beta \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_1 + \left[\frac{1}{2} \mu + \delta + \frac{3}{2} \gamma \left(A^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] B_2 = 0. \quad (22)$$

Dla rozwiązań $A \neq 0$, $R = 0$ oraz $A \neq 0$, $R \neq 0$ z równań (19) i (20) znajdujemy wyrażenie określające amplitudę drgań samowzbudnych — identyczne jak w przypadkach (9)

oraz (12). Częstość drgań samowzbudnych w tym przypadku oznaczymy przez Ω_1 , określając zależność

$$\Omega_1 = \sqrt{1 + \delta + 3\gamma \frac{\alpha}{\beta}}, \quad (23)$$

lub w czasie rzeczywistym

$$\Omega_r^{(1)} = p \sqrt{1 + \frac{3\gamma\alpha}{\beta(1+\delta)}}. \quad (24)$$

W odróżnieniu od (11), w ujęciu tym częstość drgań samowzbudnych wyrażona jest również przez wariację częstości wymuszenia parametrycznego. Podkreślić należy, że odchylenie względne obliczonej z (24) częstości drgań samowzbudnych w odniesieniu do (11) jest nieznaczne, gdyż o jego wartości decyduje tylko iloczyn $\beta\delta$.

W przypadku $A = 0$, $R \neq 0$ z równań (21) i (22) otrzymujemy

$$\delta^2 + \frac{3}{2} \gamma R^2 \delta + \frac{1}{16} (9\gamma^2 + \beta^2) R^4 + \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta R^2 \right) - \frac{1}{4} \mu^2 = 0,$$

skąd znajdujemy

$$\delta_{1,2} = -\frac{3}{4} \gamma R^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 - \left(\alpha - \frac{1}{4} \beta R^2 \right)^2}, \quad (25)$$

lub

$$R_{1,2}^2 = \frac{4[(\alpha\beta - 3\delta\gamma) \pm 2\sqrt{\Delta_1}]}{9\gamma^2 + \beta^2}$$

gdzie

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{9}{2} \gamma^2 \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \alpha^2 \right) + \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \delta^2 \right) - 3\alpha\delta\gamma \right] \beta \right\}.$$

Dla rozwiązania nietrywialnego, wykorzystując zależność (12) z równań (21) i (22) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} &= 3\gamma \left(\frac{3}{4} R^2 - 2\frac{\alpha}{\beta} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 - \left(\alpha - \frac{3}{4} \beta R^2 \right)^2}, \\ R_{1,2}^2 &= \frac{\left\{ 3 \left[\frac{1}{2} \alpha\beta + \gamma \left(\frac{3}{2} \delta + 9\gamma \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] \pm \sqrt{\Delta_2} \right\}}{9(9\gamma^2 + \beta^2)}, \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie

$$\Delta_2 = \frac{9}{2} \left\{ \frac{9}{2} \gamma^2 \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \alpha^2 \right) + \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \delta^2 \right) - 3\alpha\delta\gamma \right] \beta \right\}.$$

Aby amplitudy drgań były rzeczywiste, muszą być spełnione warunki

$$\Delta_1 \geq 0; \quad \Delta_2 \geq 0,$$

co prowadzi do wspólnej nierówności

$$\frac{9}{2} \gamma^2 \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \alpha^2 \right) + \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4} \mu^2 - \delta^2 \right) - 3\alpha\delta\gamma \right] \beta \geq 0.$$

W rezultacie znajdujemy

$$\begin{aligned} \delta &\leq -3\gamma \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2} \mu \sqrt{1 + 9 \frac{\gamma^2}{\beta^2}}, \\ \delta &\geq -3\gamma \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2} \mu \sqrt{1 + 9 \frac{\gamma^2}{\beta^2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

3. Zagadnienie stateczności

Zbadajmy metodą analityczną stateczność rozwiązania $A = 0$; $R \neq 0$. Przypadek $A \neq 0$; $R = 0$ — z miękkim samowzbudzeniem — odpowiada niestatecznemu położeniu równowagi i statecznemu cyklowi granicznemu [1].

Wprowadźmy do rozwiązania $x(\tau)$ zaburzenie $\delta x = y(\tau)$, po czym otrzymamy

$$\bar{x}(\tau) = x(\tau) + y(\tau)$$

Wykorzystując równanie (18) znajdujemy

$$\ddot{y} - (\alpha - \beta x^2) \dot{y} + 2\beta x \dot{x} y + (1 + \delta - \mu \cos 2\tau + 3\gamma x^2) y = 0.$$

Podstawiając następnie

$$x = B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau,$$

równanie w wariacjach przyjmuje postać

$$\ddot{y} + y = (r_0 + r_1 \cos 2\tau + r_2 \sin 2\tau) \dot{y} + (s_0 + s_1 \cos 2\tau + s_2 \sin 2\tau) y, \quad (28)$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_0 &= \alpha - \frac{1}{2} \beta R^2; & r_1 &= -\frac{1}{2} \beta (B_1^2 - B_2^2), \\ r_2 &= -\beta B_1 B_2; & s_0 &= -\left(\delta + \frac{3}{2} \gamma R^2\right), \\ s_1 &= \mu - \frac{3}{2} \gamma (B_1^2 - B_2^2) - 2\beta B_1 B_2; \\ s_2 &= \beta (B_1^2 - B_2^2) - 3\beta B_1 B_2, \end{aligned} \quad (29)$$

lub w formie skróconej

$$\ddot{y} + y = f_1(\tau) \dot{y} + f_2(\tau) y.$$

Podstawiając

$$y = e^{q\tau} \cdot z(\tau),$$

otrzymujemy równanie

$$\ddot{z} + z = [f_1(\tau) - 2q] \dot{z} + [f_1(\tau)q + f_2(\tau) - q^2] z,$$

dla którego, wykorzystując

$$z = a \cos \tau + b \sin \tau,$$

znajdujemy

$$(s_0 - \varrho^2)^2 - \frac{1}{4} (s_1 - r_2)^2 + (r_0 - 2\varrho)^2 - \frac{1}{4} (r_1 + s_2)^2 = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy

$$2\varrho = r_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} [(s_1 - r_2)^2 + (r_1 + s_2)^2 - s_0^2]},$$

W rezultacie, warunki stateczności przyjmują postać

$$r_0 < 0; \quad r_0^2 > \frac{1}{4} [(s_1 - r_2)^2 + (r_1 + s_2)^2] - s_0^2. \quad (30)$$

Uwzględniając związki

$$B_1^2 - B_2^2 = \pm \frac{2}{\mu} R^2 \sqrt{M},$$

$$B_1 B_2 = \frac{1}{\mu} \left(-\alpha + \frac{1}{4} \beta R^2 \right) R^2,$$

gdzie

$$M = \frac{1}{4} \mu^2 - \left(\alpha - \frac{1}{4} \beta R^2 \right)^2,$$

po wykorzystaniu zależności (29), znajdujemy warunki stateczności rozwiązania

$$R > \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}, \quad (31)$$

$$\pm 3\gamma \sqrt{M} + \beta \left(\alpha - \frac{1}{4} \beta R^2 \right) < 0. \quad (32)$$

4. Przykłady liczbowe i badania analogowe

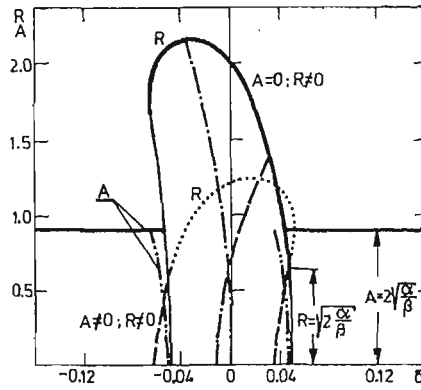
W celu ilustracji wyników badań analitycznych obliczono amplitudy drgań w funkcji wariacji częstości wymuszenia parametrycznego.

Przyjęto następujące wartości współczynników bezwymiarowych

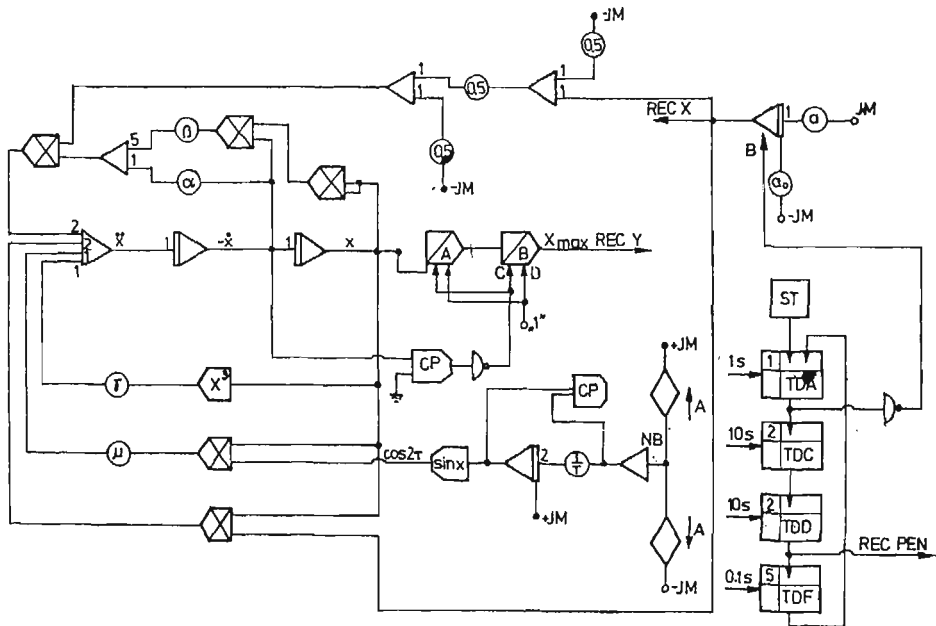
$$\alpha = 0,01; \quad \beta = 0,05; \quad \gamma = 0,01; \quad \mu = 0,1.$$

Wyniki obliczeń ilustruje rys. 1.

W określonym zakresie częstości wymuszenia parametrycznego nie występują drgania samowzbudne, natomiast krzywe amplitudowe dla rozwiązań $A = 0$, $R \neq 0$ oraz $A \neq 0$, $R \neq 0$ przecinają się dla amplitudy drgań parametrycznych $R = \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}$. Od tej wartości — zgodnie z warunkiem (31) — dla rozwiązania $A = 0$, $R \neq 0$ drgania stateczne dotyczą części krzywej amplitudowej zaznaczonej linią grubą. Granica stateczności określona jest na wykresie $R(\delta)$ styczną pionową (32). Podkreślić należy, że wzrostowi δ od-



Rys. 1



Rys. 2

powiada małego częstotliwości wymuszenia parametrycznego (15), (17) i odwrotnie. Tak więc, charakter przebiegu $R(\delta)$ dla $A = 0$; $R \neq 0$ odpowiada sztywnej charakterystyce sprężystości.

Równania (16) i (18) poddano także analizie na maszynie analogowej. W obu przypadkach, równania maszynowe przyjmują postać

$$\ddot{x} = \alpha \varepsilon_1 \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} x - \beta \varepsilon_1 \frac{s^{(2)}}{[s^{(0)}]^2 s^{(1)}} x^2 \dot{x} - \varepsilon_2 \frac{s^{(2)}}{s^{(0)}} x + \mu \frac{s^{(2)}}{s^{(0)}} x \cos 2\tau - \gamma \frac{s^2}{[s^{(0)}]^3} x^3,$$

gdzie: $s^{(n)}$ — współczynniki skali amplitud, ($n = 0, 1, 2$)

Dla równania (16) $\varepsilon_1 = 1 + \frac{\delta}{2}$; $\varepsilon_2 = 1 + \delta$, zaś dla (18) $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 1 + \delta$. Schemat maszynowy zawierający układy: pomiaru amplitudy, zmiany parametru δ oraz sterowania logicznego przedstawia rys. 2.

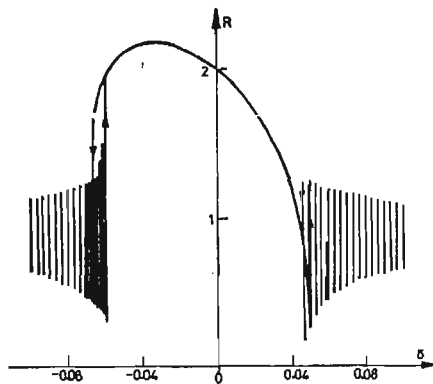
Badania przeprowadzono na maszynie analogowej MEDA 43H przy automatycznym sterowaniu zmianą parametru δ . Pisak rejestrował graniczne wartości wychyleń, w przypadku drgań dwuczęstościowych zakresłał pewną powierzchnię [9], natomiast dla drgań jednoczęstościowych wyznaczał krzywą gładką — obwiednię amplitud. W celu określenia przedziałów dwuznaczności rozwiązań, rejestrację przeprowadzono przy zwiększaniu a następnie zmniejszaniu wartości δ . W badaniach analogowych przyjęto dane liczbowe zamieszczone w tabl. 1.

Tablica 1. Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową sprężystością

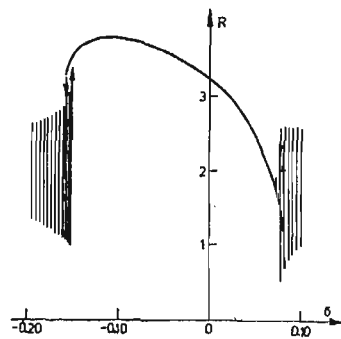
Wariant	α	β	μ	γ
I	0,01	0,05	0,1	0,01
II	0,04	0,04	0,2	0,01
III	0,01	0,05	0,1	0
IV	0,05	0,01	0,2	-0,01

W przypadkach I, II i IV badania analogowe przeprowadzono dla równania (16) oraz (18). Rezultaty dotyczące obu równań zamieszczono — w celach porównawczych — na tych samych rysunkach.

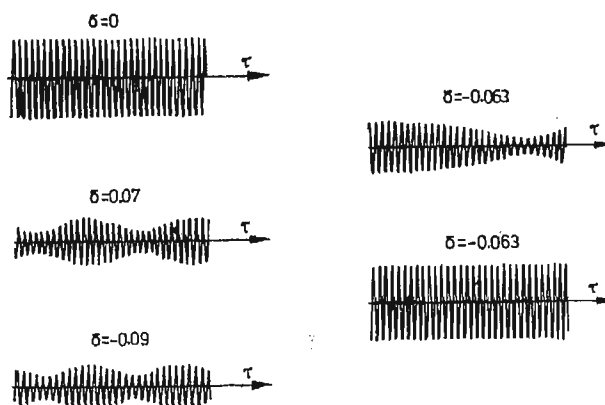
Zupełną zgodność wyników tych badań otrzymano dla wariantów I (rys. 3) oraz II (rys. 4).



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Układ odpowiadający wariantowi I poddano na podstawie (18) również badaniom dodatkowym. Dla niektórych wartości parametru δ zarejestrowano przebiegi czasowe drgań (rys. 5).

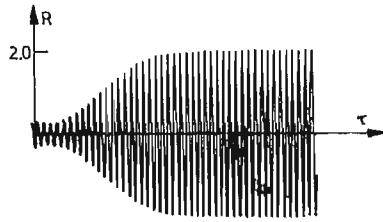
Wyniki obliczeń częstości drgań samowzbudnych przy wykorzystaniu (10) oraz (23) zamieszczono w tabl. 2. Określono również odchylenie względne wartości Ω_1 w stosunku do Ω wykorzystując przy tym zależność

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{\Omega_1}{\Omega} \right| 100\%.$$

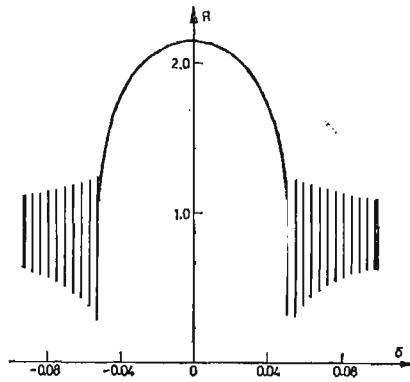
Tablica 2. Drgania układu samowzbudnego z wymuszeniem parametrycznym i nieliniową sprężystością

Wariant	δ	Ω	Ω_1	ε [%]	Ω_1/p
I	0,070	1,039	1,037	0,19	1,0029
	-0,063	0,972	0,971	0,11	
	-0,090	0,959	0,957	0,21	
IV	0,400	1,152	1,118	2,95	0,9219

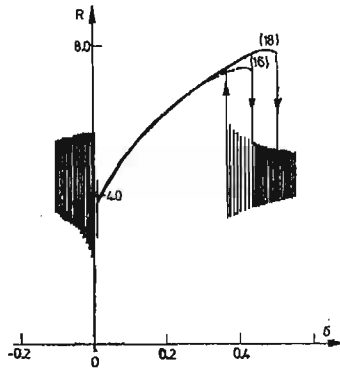
Porównując wyniki badań analitycznych i analogowych (wariant I, rys. 1 i rys. 3) podkreślić należy dobrą zgodność wyników badań. Różnią się one w przypadkach: maksymalnej amplitudy drgań parametrycznych o 1%, amplitudy drgań samowzbudnych o 2,5%, oraz szerokości przedziału δ w którym nie występują drgania samowzbudne o 4%. W rezultacie obu rodzajów badań, stwierdzono występowanie dwóch przedziałów wartości δ dla których istnieją półtrywialne rozwiązania stateczne $A \neq 0, R = 0$ oraz $A = 0, R \neq 0$. Zależnie od kierunku zmiany parametru δ odpowiadają im dudnienia lub okresowe drgania parametryczne (rys. 5).



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

W tego rodzaju badaniach nie wystąpiły drgania odpowiadające rozwiązaniu $A \neq 0$, $R \neq 0$, podobnie jak dla analogicznych układów w [4]. Ponadto obliczono odpowiadające temu rozwiązaniu warunki początkowe dla $\delta = -0,0315$ i zbadano na maszynie analogowej drgania układu. W przypadku tym układ nie realizował drgań zgodnych z rozwiązaniem nietrywialnym natomiast jego ruch ustalony odpowiadał krzywej amplitudowej $A = 0$, $R \neq 0$ (rys. 6).

Rys. 7 przedstawia wyniki badań analogowych dla układu z liniową charakterystyką sprężystości.

Zgodnie z rezultatami badań analitycznych, krzywa szkieletowa jest tutaj liniową pionową tj. niezależną od częstości wymuszenia parametrycznego. Wyniki badań analogowych równań (16) i (18) w przypadku IV przedstawia rys. 8.

Dla określonego zakresu wartości δ ujawnia się tutaj wpływ poczynionych uproszczeń w równaniu różniczkowym na wartość amplitud drgań parametrycznych. Maksymalne amplitudy tych drgań różnią się w tym przypadku o około 7%. Stąd również wynika wpływ na szerokość przedziału wartości δ w którym występują rozwiązania półtrywialne. Z badań obu równań stwierdzić należy dobrą zgodność szerokości przedziałów częstości wymuszenia parametrycznego w których nie występują drgania samowzbudne. Krzywa amplitudowa odpowiada miękkiej charakterystyce sprężystości.

5. Podsumowanie

Drgania układów z miękkim samowzbudzeniem i wymuszeniem parametrycznym charakteryzuje zaniknięcie drgań samowzbudnych w określonych przedziałach częstości odpowiadających głównemu rezonansowi parametrycznemu. Badając układy z nieliniową — symetryczną charakterystyką sprężystości stwierdzono, że na zewnątrz przedziału częstości wymuszenia parametrycznego w którym drgania samowzbudne nie występują, znajdują się przylegające obustronnie dwa przedziały niejednoznaczności określenia amplitud odpowiadające zjawisku „histerezy drgań”. Wewnątrz tych przedziałów występują stateczne drgania parametryczne bądź samowzbudne. Powyższe wyniki należy interpretować jako efekt wzajemnego oddziaływania obu rodzajów drgań samookresowych (parametrycznych i samowzbudnych) bowiem dla tego typu układów nie zachodzi zasada superpozycji.

W pracy ograniczono się do problemów istnienia i stateczności drgań, nie rozpatrzono natomiast zagadnienia obszarów przyciągania. Powyższe rezultaty są zgodne z wynikami analizy drgań tego typu układów [2], [4] uzyskanymi innymi sposobami badań analitycznych. Stwierdzono, że wprowadzone uproszczenia modelu matematycznego nie zmieniają wyrażen określających amplitudy drgań samowzbudnych natomiast mają nieznaczny wpływ ilościowy na częstość tych drgań. W wyniku badań analitycznych rozwiązań równania uproszczonego oraz badań analogowych drgań na podstawie równania bez uproszczeń — przy pewnych parametrach układu — uzyskano zgodność wartości amplitud statecznych drgań parametrycznych.

Nieznaczne różnice maksymalnych wartości tych amplitud (wariant IV) mają wpływ na zakres częstości wymuszenia parametrycznego, w którym występują stateczne drgania parametryczne bądź samowzbudne.

Uproszczenia modelu matematycznego nie mają istotnego wpływu na szerokość przedziału częstości wymuszenia parametrycznego, w którym drgania samowzbudne nie występują.

Przedstawione w pracy badania analityczne można w rozpatrywanych przypadkach traktować jako sposób otrzymania rozwiązań przybliżonych.

Literatura cytowana w tekście

1. N. MINORSKI, *Drgania nieliniowe*, PWN Warszawa 1967.
2. W. O. KONONIENKO, P. S. KOWALCZUK, *Wozdziejstwie parametricznego wozbuzdzenia na awtokolebatielnuju systemu*, Prikladnaja miechanika, t. VII, w. 6, 1971 r.
3. W. O. KONONIENKO, P. S. KOWALCZUK, *Wozdziejstwie wnieszniej garmoniczskoi sily na awtokolebatielnuju systemu s izmienlajuszczimsja parametrom*, Prikladnaja miechanika, t. VII, w. 10, 1971.
4. A. TONDL, *On the interaction between self—excited and parametric vibrations*, Bechavice, Nat. Res. Inst. for Machine Design, Monographs and Memoranda, No 25, 1978.
5. N. N. BOGOLJUBOW, J. A. MITROPOLSKI, *Asimptoticzeskije metody w teorii nieliniowych kolebanii*. Gosudarstvennoje izdatielstwo fizyko-matiematiczeskoj literatury, Moskwa 1958.
6. J. P. DEN HARTOG, *Drgania mechaniczne*, PWN Warszawa.
7. M. MITSCHE, *Dynamika samochodu*, W.K.Ł., Warszawa 1977.
8. R. Ł. HATFMAN, *Dinamika*, Nauka, Moskwa 1972.
9. A. TONDL, *Awtokolebanija mechaniczeskich sistem*, MiR, Moskwa 1979.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ САМОВОЗБУЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ
С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ И НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТЬЮ

В работе рассмотрели колебания системы с мягким самовозбуждением, параметрическим возбуждением а также нелинейную характеристику упругости кубического типа. Рассматривая проблемы существования и устойчивости решений дифференциального уравнения определили эффекты взаимного воздействия периодических колебаний. Констатировали между прочим, что в определенных интервалах частоты параметрического вынуждения самовозбуждающие колебания не выступают. Аналитические исследования провели учитывая опрощающие исходные данные а их влияние на результаты определили путем аналогового моделирования.

Summary

THE VIBRATIONS OF THE SELF-EXCITED SYSTEM WITH THE PARAMETRIC INPUT AND
NON-LINEAR ELASTICITY

In this work there were considered the vibrations of a system with the soft self-excitation, the parametric input and with a non-linear characteristic of the cubical type elasticity. Considering the problems of the existance and stability of the issues of the differential equation there were defined the effects of the mutual influence of self-periodic vibrations in the determinate range of the parametric force's frequency. Analytical researches were proceeded under the certain, simplifying conditions, which influence was defined with the method of an analogue modelling.